Corrigé de l'examen du 15 avril 2016 (durée 2h)

Documents autorisés : polycopiés du cours, notes de cours manuscrites Aucun appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les deux exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les suivantes.

On fixe un corps de base k et une clôture séparable k_s. La terminologie « une extension K/k » signifie que K est un sous-corps de k_s contenant k. Si G est un k-groupe algébrique et K/k une extension, $\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(G_K)$ désigne le groupe des automorphismes du K-groupe algébrique $G_K = G \otimes K$. La notation I_n désigne la matrice identité de taille n. Dans l'exercice 1, R désignera une K-algèbre variable.

Exercice 1 **(k-formes de $\mathrm{GL}_{2,k}$).** — On rappelle que, pour toute extension K/k, on a la suite exacte :

$$(*)\qquad 1 \longrightarrow \mu_{2,K} \xrightarrow{\ i\ } Z \times \mathrm{SL}_{2,K} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{GL}_{2,K} \longrightarrow 1,$$

où $Z \simeq \mathbb{G}_{m,K}$ est le centre de $\mathrm{GL}_{2,K}$ et $i(t)$ est le couple $(t^{-1}I_2, tI_2)$ pour toute K-algèbre R et $t \in \mu_2(R)$.

(1) En utilisant $(*)$, montrer que $\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{GL}_{2,K}) \simeq \mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,K}) \times \{\pm 1\}$.

Solution : Soit ϕ un automorphisme (de K-groupe) de $\mathrm{GL}_{2,K}$. Il induit un automorphisme ϕ_1 de Z et aussi un automorphisme ϕ_2 de $\mathrm{SL}_{2,K}$.[(1)] Bien entendu, ϕ_1 et ϕ_2 coïncident sur $Z \cap \mathrm{SL}_{2,K} \simeq \mathrm{Ker}(\pi)$; réciproquement la donnée de deux tels automorphismes, coïncidant sur $\mu_{2,K}$, définit un automorphisme de $\mathrm{GL}_{2,K}$.

Or $\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mu_{2,K}) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{gpe}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{\mathrm{id}\}$ i.e. tout automorphisme de $\mu_{2,K}$ est trivial, donc deux automorphismes quelconques ϕ_1 et ϕ_2 de Z et $\mathrm{SL}_{2,K}$ induisent l'identité sur $\mu_{2,K}$ donc coïncident sur $\mu_{2,K}$. Le résultat en découle.

(2) Pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$, écrire la matrice $\tau(g) = \mathrm{d\acute{e}t}(g)g^{-1}$. En déduire que l'application $\alpha : g \mapsto g\,\mathrm{d\acute{e}t}(g^{-1})$ est un *automorphisme* du K-groupe $\mathrm{GL}_{2,K}$.

Solution : Pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$ on a $g^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}(g)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{d\acute{e}t}(g)g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On voit ainsi que $\tau : g \mapsto \mathrm{d\acute{e}t}(g)g^{-1}$ est un automorphisme de K-schéma, vérifiant $\tau^2 = \mathrm{id}$, et c'est un *anti-automorphisme* de K-groupe car

$$\tau(g_1g_2) = \mathrm{d\acute{e}t}(g_1)\,\mathrm{d\acute{e}t}(g_2)g_2^{-1}g_1^{-1} = \tau(g_2)\tau(g_1).$$

De même, $i : g \mapsto g^{-1}$ est un anti-automorphisme de K-groupe, donc la composée $\alpha = i \circ \tau = \tau \circ i$ est un automorphisme du K-groupe $\mathrm{GL}_{2,K}$. (De plus, comme i et τ commutent, on a $\alpha^2 = i^2 \circ \tau^2 = \mathrm{id}$.)

---

(1) Pour ϕ_2 ceci nécessite une démonstration : il faut utiliser que le groupe des caractères de $\mathrm{GL}_{n,K}$ est engendré par dét et isomorphe à $\mathbb{Z}$ (un point qui aurait dû être énoncé dans le cours 5MF32), d'où il résulte que $\mathrm{SL}_{n,K}$ est stable par tout automorphisme de $\mathrm{GL}_{n,K}$.

(3) Quelle est la restriction de α à $\mathrm{SL}_{2,K}$? Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(R)$, calculer $\mathrm{dét}(\alpha(g))$ puis $\alpha^2(g)$. Que peut-on en déduire ?

Solution : Il est clair que la restriction de α à $\mathrm{SL}_{2,K}$ est l'identité. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(R)$ on a $\mathrm{dét}(\alpha(g)) = \mathrm{dét}(g)\,\mathrm{dét}(g)^{-2} = \mathrm{dét}(g)^{-1}$ et donc

$$\alpha^2(g) = \alpha(g)\,\mathrm{dét}(\alpha(g))^{-1} = g\,\mathrm{dét}(g)^{-1}\,\mathrm{dét}(g) = g$$

d'où $\alpha^2 = \mathrm{id}$. D'autre part, la restriction de α au centre $Z \simeq \mathbb{G}_{m,K}$ est l'automorphisme non trivial $z \mapsto z^{-1}$ et comme sa restriction à $\mathrm{SL}_{2,K}$ est l'identité, on déduit de la question 1 que

$$\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{GL}_{2,K}) = \mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,K}) \times \{\mathrm{id}, \alpha\}.$$

D'autre part, d'après le cours, on sait que $\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,K}) = \mathrm{PGL}_2(K)$.

Pour la suite de l'exercice, on prend $k = \mathbb{R}$. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \tau\}$, où $\tau(z) = \overline{z}$.[(2)] On pose $\mathscr{A}(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{C}})$ et $\mathscr{A}'(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-gpe}}(\mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}})$.

(4) Déterminer l'action de Γ sur $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{A}'(\mathbb{C})$.

Solution : On a vu en cours que l'action de Γ est triviale sur le sous-groupe $\{\mathrm{id}, \alpha\}$ (car il est contenu dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}})$) et que celle sur $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est donnée comme suit : si $g = \mathrm{Int}(A)$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ alors $\tau(g) = \mathrm{Int}(\overline{A})$, où $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$.

(5) Montrer que se donner un 1-cocycle c de Γ à valeurs dans $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{A}'(\mathbb{C})$) équivaut à se donner l'élément $c(\tau)$, qui doit vérifier une condition que l'on précisera.

Solution : Pour tout cocycle c, la condition $c(e) = c(ee) = c(e)c(e)$ entraîne $c(e) = e$. Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, les conditions

$$c(\gamma e) = c(\gamma)\gamma(e) = c(\gamma) = ec(\gamma) = c(e\gamma)$$

sont vérifiées. Donc ici, comme $\Gamma = \{e, \tau\}$, pour se donner un cocycle $c : \Gamma \to \mathscr{A}$, il suffit de se donner l'élément $a = c(\tau)$, soumis à la condition :

$$(\star) \qquad e = c(e) = c(\tau\tau) = c(\tau)\tau(c(\tau)).$$

Si $c(\tau) = (\mathrm{Int}(A), \varepsilon) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \{\pm 1\}$, la condition précédente s'écrit

$$(\mathrm{id}, 1) = (\mathrm{Int}(A), \varepsilon)(\mathrm{Int}(\overline{A}), \varepsilon) = (\mathrm{Int}(A\overline{A}), 1)$$

et équivaut donc au fait que $A\overline{A} = \lambda I_2$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

(6) Déterminer à quelle condition deux cocycles c, c' à valeurs dans $\mathscr{A}'(\mathbb{C})$ sont équivalents. En déduire que $H^1(\Gamma, \mathscr{A}'(\mathbb{C})) \simeq H^1(\Gamma, \mathscr{A}(\mathbb{C})) \times H^1(\Gamma, \{\pm 1\})$.

Solution : Considérons deux cocycles c et c' donnés par $c(\tau) = (g, \varepsilon)$ et $c'(\tau) = (g', \varepsilon')$. Ils sont équivalents ssi il existe $(h, \eta) \in \mathscr{A}'(\mathbb{C})$ tel que

$$(g', \varepsilon') = (h, \eta)^{-1}(g, \varepsilon)(\tau(h), \eta) = (h^{-1}g\tau(h), \varepsilon)$$

i.e. ssi les cocycles à valeurs dans $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ (resp. $\{\pm 1\}$) définis par g et g' (resp. ε et ε') sont équivalents. D'autre part, un cocyle à valeurs dans $\{\pm 1\}$ n'est autre qu'un morphisme de groupes $\Gamma \to \{\pm 1\}$ et il y en a deux : le morphisme trivial e et l'unique isomorphisme $f : \Gamma \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$. On en déduit que :

$$H^1(\Gamma, \mathscr{A}'(\mathbb{C})) \simeq H^1(\Gamma, \mathscr{A}(\mathbb{C})) \times H^1(\Gamma, \{\pm 1\}) \simeq H^1(\Gamma, \mathscr{A}(\mathbb{C})) \times \{e, f\}.$$

D'autre part, d'après le cours on sait que $H^1(\Gamma, \mathscr{A}(\mathbb{C}))$ est en bijection avec les $\mathbb{R}$-formes de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$ (à isomorphisme près) et qu'il y a deux telles formes : $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$ et le k-groupe $\mathrm{SL}_1(\mathbb{H})$

[(2)] Ce τ, qui est la conjugaison complexe, n'a rien à voir avec le τ apparaissant dans la question 2.

donné par les quaternions de norme 1. Il y a donc quatre $\mathbb{R}$-formes de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$. On va les déterminer.

Soit $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ le corps des quaternions. (On a $i^2 = -1 = j^2 = k^2$ et $ij = k = -ji$.)

(7) Montrer que $\mathbb{H}$ s'identifie à l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} z & -\overline{u} \\ u & \overline{z} \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$. Indication : considérer $\mathbb{H}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel à droite de base $(1, j)$ et faire agir $\mathbb{H}$ sur lui-même par multiplication à gauche.

Solution : Soit $q = a+ib+jc-kd$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a $q \cdot 1 = q = 1(a+ib)+j(c+id)$ (car $ji = -k$) et $q \cdot j = ja + kb - c + id = 1(-c+id) + j(a-ib)$ donc, posant $z = a + ib$ et $u = c + id$, la matrice L_q de la multiplication à gauche par q est $\begin{pmatrix} z & -\overline{u} \\ u & \overline{z} \end{pmatrix}$, et l'on obtient ainsi toutes les matrices de cette forme, avec $z, u \in \mathbb{C}$. Notons que $\mathrm{dét}(L_q) = z\overline{z} + u\overline{u} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = N(q)$, où $N(q)$ désigne la norme de q.

(8) On note β l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$ de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$. Montrer que $\mathbb{H}^\times$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $\overline{A} = \gamma(A)$, pour un certain automorphisme γ de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ que l'on déterminera.

Solution : Soit α l'automorphisme $g \mapsto g\,\mathrm{dét}(g^{-1})$. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(R)$ on a $\mathrm{dét}(\beta(g)) = \mathrm{dét}(g)^{-1}$ et donc

$$(\alpha \circ \beta)(g) = \mathrm{dét}(g)\ {}^t g^{-1} = (\beta \circ \alpha)(g)$$

et si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{dét}(g)\ {}^t g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Par conséquent, notant γ l'automorphisme $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$, on voit que $\mathbb{H}^\times = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A} = \gamma(A)\}$.

(9) En citant le cours, dire quelles sont les $\mathbb{R}$-formes H de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$. Pour chacune d'elles, donner un automorphisme γ_H de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$ tel que $H(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A} = \gamma_H(A)\}$.

Solution : On a déjà dit plus haut qu'il y a deux telles formes : $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$ et le k-groupe $\mathrm{SL}_1(\mathbb{H})$ donné par les quaternions de norme 1. Évidemment,

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A} = A\}.$$

D'autre part, d'après la question 7, $\mathrm{SL}_1(\mathbb{H})$ s'identifie au $\mathbb{R}$-groupe SU_2 défini pour toute k-algèbre R par

$$\mathrm{SU}_2(R) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid \overline{A} = \gamma(A) = \beta(A)\}$$

(rappelons que γ et β ont même restriction à SL_2). Rappelons aussi que le $\mathbb{R}$-groupe U_2 est défini pour toute k-algèbre R par

$$U_2(R) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid \overline{A} = \beta(A)\} = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid {}^t\overline{A}A = I_2\}.$$

(10) Déterminer les $\mathbb{R}$-formes G de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ en donnant pour chacune d'elles un automorphisme γ_G de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ tel que $G(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A} = \gamma_G(A)\}$.

Solution : D'après ce qui précède, on sait qu'il y a quatre formes de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ et on a déjà rencontré $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$, $\mathrm{GL}_1(\mathbb{H})$ et $U(2)$, dont les $\mathbb{R}$-points sont donnés respectivement par :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid \overline{A} = A\}$$
$$\mathrm{GL}_1(\mathbb{H}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid \overline{A} = \gamma(A)\}$$
$$U(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid \overline{A} = \beta(A)\}$$

Enfin, la quatrième forme, notons-la G, est donnée par
$$G(R) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C} \otimes R) \mid \overline{A} = \alpha(A)\};$$
c'est le quotient par $\mu_{2,\mathbb{R}}$ de $S^1 \times \mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$, où
$$S^1(R) = \{(a,b) \in R^2 \mid a^2 + b^2 = 1\} = \{a + ib \in (R \otimes \mathbb{C})^\times \mid 1 = (a+ib)(a-ib)\}.$$

(11) Déterminer le centre de chacune des $\mathbb{R}$-formes de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$.

Solution : Pour $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ et $\mathrm{GL}_1(\mathbb{H})$ le centre est $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$; pour $U(2)$ et G c'est S^1.

Exercice 2. — Soit Γ un groupe fini. Un Γ-groupe est un groupe G muni d'une action de Γ par automorphismes de groupe, i.e. $\gamma(g_1 g_2) = \gamma(g_1)\gamma(g_2)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $g_1, g_2 \in G$. Dans ce cas, $G^\Gamma = \{g \in G \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ \gamma(g) = g\}$ est un *sous-groupe* de G.

Dans le cas où $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/k)$ pour une extension galoisienne finie L/k, où $\mathbf{G}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$ et $G = \mathbf{G}(L)$, on a $G^\Gamma = \mathbf{G}(k)$ et on a défini en cours l'ensemble $Z^1(\Gamma, G)$ des cocycles à valeurs dans G, la notion de cocycles équivalents, et l'ensemble quotient $H^1(\Gamma, G)$. La définition pour des groupes « abstraits » Γ et G est identique. On rappelle que $H^1(\Gamma, G)$ est un ensemble *pointé*, i.e. il possède un point privilégié noté e qui est la classe du cocycle constant de valeur e, l'élément neutre de G.

On se donne une suite exacte de Γ-groupes :

$$(\star) \qquad 1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \overline{G} \longrightarrow 1,$$

c.-à-d. c'est une suite exacte de groupes (H est distingué dans G et $\overline{G} = G/H$) et chacun des morphismes i et π est Γ-invariant, i.e. $i(\gamma(h)) = \gamma(i(h))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $h \in H$, et de même pour π. Le but de l'exercice est de montrer que l'on a une « *suite exacte d'ensembles pointés* » (en un sens précisé dans les questions qui suivent) :

$$(\dagger) \qquad 1 \longrightarrow H^\Gamma \xrightarrow{i'} G^\Gamma \xrightarrow{\pi'} \overline{G}^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, H) \xrightarrow{i''} H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{\pi''} H^1(\Gamma, \overline{G}),$$

où i' (resp. i'') désigne la restriction de i à H^Γ (resp. l'application qui associe à la classe d'un cocycle $c : \Gamma \to H$ la classe du cocycle $i \circ c$) et où π' et π'' sont définis de même.

(1) Montrer que $1 \longrightarrow H^\Gamma \xrightarrow{i'} G^\Gamma \xrightarrow{\pi'} \overline{G}^\Gamma$ est une suite exacte de groupes.

Solution : Il est clair que i' est une injection (si $e = i'(h) = i(h)$ alors $h = e$) et que $\pi' \circ i' = e$, d'où $\mathrm{Im}(i') \subset \mathrm{Ker}(\pi')$. Montrons l'inclusion réciproque : soit $g \in G^\Gamma$ tel que $e = \pi'(g) = \pi(g)$, alors $g \in \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(i)$ donc il existe $h \in H$ tel que $g = i(h)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a donc $i(\gamma(h)) = \gamma(g) = g = i(h)$ et comme i est injectif ceci entraîne $\gamma(h) = h$ pour tout γ, d'où $h \in H^\Gamma$. Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(\pi') = \mathrm{Im}(i')$.

(2) Pour tout $y \in \overline{G}^\Gamma$, on choisit $g \in G$ tel que $\pi(g) = y$.[3] Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose alors $c_g(\gamma) = g^{-1}\gamma(g)$. Montrer que c_g est un cocycle à valeurs dans H et que le choix d'un autre élément g' de $\pi^{-1}(y)$ donne un cocycle équivalent. On note alors $\delta(y)$ la classe du cocyle c_g dans $H^1(\Gamma, H)$.

Solution : Soient $y \in \overline{G}^\Gamma$ et $g \in G$ tels que $\pi(g) = y$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\pi(\gamma(g)) = \gamma(y) = y$ donc $\gamma(g) = gh_\gamma$, avec $h_\gamma \in H$. On pose alors : $c_g(\gamma) = h_\gamma = g^{-1}\gamma(g)$. Montrons que cette application $c_g : \Gamma \to H$ est un cocycle : pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, on a :
$$c_g(\gamma)\gamma(c_g(\gamma')) = g^{-1}\gamma(g)\gamma\big(g^{-1}\gamma'(g)\big) = g^{-1}\gamma\gamma'(g) = c_g(\gamma\gamma').$$

[3] C'est possible car π est surjectif, mais on ne sait pas *a priori* s'il existe un tel g dans G^Γ.

Soit maintenant g' un autre élément de $\pi^{-1}(y)$, d'où $g' = gh$ pour un certain $h \in H$. Alors, notant c' et c au lieu de $c_{g'}$ et c_g, on a :

$$c'(\gamma) = h^{-1}g^{-1}\gamma(gh) = h^{-1}c(\gamma)\gamma(h)$$

donc c' et c sont équivalents. On notera $\delta(y) = [c_g]$ la classe de c_g dans $H^1(\Gamma, H)$.

(3) Montrer que $\delta^{-1}(e) = \pi'(G^\Gamma)$.

Solution : Soient $y \in \overline{G}^\Gamma$ et $g \in G$ tels que $\pi(g) = y$. Alors $\delta(y) = [c_g]$ est trivial ssi il existe $h \in H$ tel que $c_g(\gamma) = g^{-1}\gamma(g)$ égale $h^{-1}\gamma(h)$ pour tout γ, i.e. ssi il existe $h \in H$ tel que $gh^{-1} \in G^\Gamma$, i.e. ssi $y \in \pi'(G^\Gamma)$.

(4) Montrer que $i''^{-1}(e) = \delta(\overline{G}^\Gamma)$.

Solution : Soit c un cocycle $\Gamma \to H$. Alors $i''([c]) = [i'' \circ c]$ est trivial ssi il existe $g \in G$ tel que $c(\gamma) = g^{-1}\gamma(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Sous cette condition, on a $\gamma(g) = gc(\gamma)$ avec $c(\gamma) \in H$ d'où $\gamma(\pi(g)) = \pi(g)$ pour tout γ, donc $y = \pi(g)$ appartient à $\overline{G}^\Gamma$. On voit donc que cette condition équivaut à dire que $[c] \in \mathrm{Im}(\delta)$.

(5) Montrer que $\pi''^{-1}(e) = \mathrm{Im}(i'')$.

Solution : Il est clair que $\pi'' \circ i'' = e$ (car $\pi \circ i = e$) d'où $\mathrm{Im}(i'') \subset \mathrm{Ker}(\pi'')$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit c un cocycle $\Gamma \to G$ tel que $\pi''([c]) = [\pi'' \circ c]$ soit trivial, i.e. il existe $g \in G$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\pi(c(\gamma)) = \overline{g}^{-1}\gamma(\overline{g}) = \pi\big(g^{-1}\gamma(g)\big).$$

Alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on peut écrire

$$(*) \qquad c(\gamma) = h'_\gamma g^{-1}\gamma(g) = g^{-1}h_\gamma\gamma(g)$$

avec h'_γ dans H ainsi que $h_\gamma = gh'_\gamma g^{-1}$. Alors l'application $b : \Gamma \to H$, $\gamma \mapsto h_\gamma = gc(\gamma)\gamma(g^{-1})$ est un cocyle, car $h_{\gamma\gamma'}$ égale :

$$gc(\gamma\gamma')\gamma\gamma'(g^{-1}) = gc(\gamma)\gamma(c(\gamma'))\gamma\gamma'(g^{-1}) = gc(\gamma)\gamma(g^{-1})\gamma\Big(gc(\gamma')\gamma'(g^{-1})\Big) = b(\gamma)\gamma(b(\gamma'))$$

et $(*)$ montre que c est équivalent à $i'' \circ b$, i.e. $[c] \in \mathrm{Im}(i'')$.