Syllabus des UE de L2 maths 2019-2020

Version du 25 avril 2019 [1]

0. Préambule

0.1. Volumes horaires. — Sauf indications spécifiques, les UE sont en général à 6 ects donc comptent a priori $24h = 12 \times 2h$ de cours et $12 \times 2 \times 1h30 = 36h$ de TD (+2h pour la correction des copies de partiel). Toutefois, si dans le futur les créneaux d'amphi descendaient à 1h30, il faudrait repenser le volume des cours et TD. Pour les UE à 3 ects les volumes sont divisés par deux. L'UE Maths en Python de S4 fonctionne sur un format différent.

0.2. Prérequis, objectifs et évaluations. — Pour chaque UE, on s'efforcera d'indiquer (au fil de l'amélioration de ce texte, qui a vocation à être affiché sur le site de la licence) :

(1) Les prérequis (supposés vus dans les semestres antérieurs), en précisant autant que possible quel prérequis vient de quel cours.

(2) Les objectifs d'apprentissage, déclinés en deux niveaux : a) un niveau de base, nécessaire pour valider l'UE et qui sera considéré comme acquis dans les cours des semestres ultérieurs, b) un niveau plus avancé, qui sera nécessaire pour avoir une bonne note (disons $> 70/100$) à l'UE.

(3) Les évaluations (partiel et examen final) doivent permettre aux étudiants ayant assimilé le niveau de base de valider l'UE. Comme ce qui n'est pas évalué n'est pas étudié, il faut aussi que les évaluations portent sur des choses de niveau plus avancé, mais en quantité limitée. Si l'on s'accorde sur le fait que pour une note sur 100 il est raisonnable de faire un barème sur 120, on pourrait envisager que la partie de base représente 70 points et la partie plus avancée 50 points.

(4) Les liens entre UE, en particulier lorsqu'un contenu d'une UE est réutilisé (ou approfondi) dans une autre UE.

Dans chaque descriptif d'UE, les paragraphes signalés par des $(*)$ sont considérés comme des bonus ou compléments de cours : à ne traiter que si le temps le permet, i.e. si l'on est en avance sur la progression envisagée.

[1] Seule modif depuis le 24 avril : nouvelle proposition pour les UE de S4 ALB IIa et IIb.

UE de S3 Séries numériques et séries de fonctions (6 ects) : Monos, Maj, Min

Version du 24 avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — On suppose vu en L1 :

(1) Limite d'une suite réelle ou complexe.

(2) Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, au moins sous la forme que : toute suite croissante majorée converge.

(3) Th. de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite convergente.

(4) Fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, théorème des valeurs intermédiaires.

(5) Fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$, théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

(6) Intégrale de Riemann, au moins pour les fonctions continues. Peut-être aussi que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale ?

0.2. Objectifs. — Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants.

(1) Séries à termes positifs : condition de convergence, critères de comparaison entre deux telles séries, entre une telle série et une intégrale. Exemple des séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$.

(2) Connaître la notion de série absolument convergente et savoir l'utiliser.

(3) Notion de limite uniforme de fonctions, préservation de la continuité. Contre-exemple des fonctions (x^n) sur $[0,1]$.

(4) Théorème de dérivation pour les suites de fonctions dérivables : savoir que la bonne hypothèse est la convergence uniforme de la suite des dérivées.

(5) Notion de série de fonctions normalement convergente ; savoir que cela entraîne la convergence uniforme.

(6) Séries entières : définition du disque (et donc du rayon) de convergence ; savoir calculer le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ lorsque la limite en $+\infty$ de $|a_{n+1}/a_n|$ ou de $|a_n|^{1/n}$ existe. Cas s'y ramenant, par exemple de la forme $\sum_n a_n z^{2n} + \sum_n b_n z^{2n+1}$. Dérivation et primitivation terme à terme sur le disque de convergence. Fonction exponentielle complexe.

(7) Définition des coefficients de Fourier d'une fonction continue f comme produits scalaires de f avec certaines fonctions (exponentielles complexes ou fonctions trigonométriques). Savoir calculer des coefficients de Fourier et appliquer la formule de Parseval.

1. Séries numériques (5 h)

On appelle « série numérique » une série à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Séries à termes positifs. — Une telle série est soit majorée et convergente, soit divergente vers $+\infty$. (Rappel : toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.) Pour une série à termes positifs de la forme $f(n)$, comparaison entre la somme partielle S_n et l'intégrale $\int_1^n f(x)\,dx$. Exemples : séries de terme général $1/n^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, plus généralement $1/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1.2. Suites de Cauchy, séries absolument convergentes. — $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, i.e. toute suite de Cauchy (u_n) dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge. Démo : étant de Cauchy, (u_n) est bornée donc, d'après Bolzano-Weierstrass (vu en L1), elle possède une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite ℓ ; comme (u_n) est de Cauchy elle converge alors vers ℓ. Application du critère de Cauchy : toute série numérique absolument converge est convergente. Exemples.

1.3. Séries alternées. — Toute série alternée $\sum_n (-1)^n u_n$ avec $u_n > 0$ décroissant vers 0 est convergente. (Rappel sur les suites adjacentes.) En valeur absolue le n-ième reste est majoré par u_n. Exemples : pour $0 < \alpha \leq 1$, $\sum_n (-1)^n/n^\alpha$ est convergente mais pas absolument convergente.

1.4. Produit de séries. — Théorème : si les séries $\sum_p a_p$ et $\sum_q b_q$ sont absolument convergentes de sommes A et B alors la série de terme général $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ est (absolument) convergente, de somme AB.

Remarque : en fait il suffit qu'une des séries soit absolument convergente pour que $\sum_n c_n$ converge vers AB, mais la démo est alors un peu plus compliquée ; faire ceci en devoir ? Donner en TD un exemple de deux séries convergentes A, B telles que $\sum_n c_n$ diverge, par exemple $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

2. Suites et séries de fonctions (5 h)

On considère dans cette section des fonctions $I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1. Propriétés locales. — La continuité ou la dérivabilité de f en un point x_0 ne dépend que du comportement de f sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 dans son intérieur (par exemple $|x - x_0| \leq r$, pour un certain $r > 0$).

2.2. Suites de fonctions. — Notions de convergence simple, de convergence uniforme.

Théorème 2.2.1 **(Continuité)**. — *Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Point de vue historique : mentionner l'erreur de Cauchy (cf. par exemple [**Ri95**]) ?

Exemple de limite simple qui n'est pas continue : la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ sur $[0, 1]$; renvoyer au chapitre sur les séries de Fourier pour un autre exemple, par exemple $\sum_{n \text{ impair}} \sin(nx)/n$?

Théorème 2.2.2 **(Intégration)**. — *Pour des f_n continues, si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors pour tout $x \in [a, b]$ on a $\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt$.*

Théorème 2.2.3 **(Dérivation)**. — *Si les f_n sont dérivables, si la suite (f_n') converge uniformément et si la suite $(f_n(x_0))$ converge pour au moins un x_0, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f dérivable, de dérivée $f' = \lim f_n'$.*

Remarque 2.2.4 **(sur le th. précédent)**. — La démo utilise l'égalité des accroissements finis ; si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ il faut séparer partie réelle et partie imaginaire. La démo est plus simple si on suppose les f_n de classe C^1, on peut alors intégrer les f_n' et le th. 2.2.3 découle du th. 2.2.2.

Remarque 2.2.5 **(générale)**. — On ne parlera pas de convergence « localement uniforme » mais on insistera en cours et en TD que d'après 2.1 il suffit d'avoir pour tout x_0 la convergence uniforme sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 dans son intérieur.

2.3. Séries de fonctions. — On dit que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément vers f si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k\leq n} u_k$ converge uniformément vers f ; dans ce cas f est continue si les u_n le sont.

Critère de Cauchy uniforme et théorème : toute série de fonctions $\sum_n u_n$ normalement convergente vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc converge uniformément vers une limite f, qui est continue si les u_n le sont.

Exemples de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement : toute série numérique convergente, considérée comme une série de fonctions constantes, converge uniformément. On peut donc donner l'exemple de la série $\sum_n (-1)^n/n$. La série $\sum_n (-x)^n/n$ pour $x \in [0, 1]$ a aussi été suggérée, mais comment montre-t-on que la convergence est uniforme ?

3. Séries entières (6 h)

On munit $\mathbb{C}$ de la conjugaison complexe et de la valeur absolue usuelles : si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\overline{z} = a - ib$ et $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$. On rappelle qu'on a l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ d'où par récurrence, $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. On considère des séries entières $S(z) = \sum_n a_n z^n$ avec les a_n dans $\mathbb{C}$, ainsi que la variable z.

3.1. Disque de convergence. —

Théorème 3.1.1. — *Considérons la série entière $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Si $S(z_0)$ converge pour un certain z_0, alors la série S converge normalement sur tout disque fermé de rayon $r < |z_0|$. Par conséquent, posant $\mathscr{D}(S) = \{z \mid S(z) \text{ converge}\}$ et $R = \sup_{z\in\mathscr{D}(S)} |z|$, on a :*

a) *$S(z)$ diverge pour tout z tel que $|z| > R$.*

b) *Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R$, la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge.*

Calcul pratique du rayon de convergence. On donnera les règles suivantes :

(1) règle de d'Alembert : si $\lim |a_{n+1}|/|a_n|$ existe et vaut ℓ alors $R = 1/\ell$. Complétée par le cas des séries de la forme $\sum_n a_n z^{kn}$ pour un entier $k > 0$ donné, et plus généralement de la forme $\sum_n a_n z^{2n} + \sum_n b_n z^{2n+1}$.

(2) règle de Cauchy-Hadamard : si $\lim |a_n|^{1/n}$ existe et vaut ℓ alors $R = 1/\ell$.

Après discussions, il a été décidé que la définition de la $\limsup$ (et le thm. de Cauchy-Hadamard) est hors programme.

3.2. Continuité, dérivation et primitivation. — On introduit la notion de continuité et de dérivabilité en un point z_0 d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Soit $S = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Théorème 3.2.1. — *Sur le disque ouvert $D(R)$ on peut dériver terme à terme ; de plus, la série S' a même rayon de convergence .*

On peut également primitiver terme à terme : la série $T(z) = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n/n$ a pour rayon de convergence R et vérifie $T'(z) = S(z)$ pour tout $z \in D(R)$. De plus T est l'unique primitive de S sur $D(R)$ telle que $T(0) = 0$.

Remarques 3.2.2 **(sur la démo)**. — 1) On ne peut pas appliquer le th. 2.2.3, démontré uniquement pour des fonctions d'une variable réelle, mais on pourrait dire que « la démonstration s'étend à ce cas ».

2) On peut montrer la dérivabilité directement en utilisant que $z^n - z_0^n = (z-z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$ pour majorer le reste.

3) Pour l'unicité : si U vérifie la même chose alors pour tout z_0 fixé dans $D(R)$ la fonction $t \mapsto (T-U)(tz_0)$ est dérivable sur $[-1, 1]$ de dérivée nulle, donc constante.

3.3. Exponentielle complexe. — Définition et propriétés de l'exponentielle complexe, en particulier $\exp'(z) = \exp(z)$ et $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(it)$ est de module 1 et cos et sin sont (re)définis par l'égalité $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3.4. Reconnaître le développement en série entière de fonctions usuelles. — Plutôt que l'actuel paragraphe de l'UE 2M216 : « étant donné des séries entières convergentes P, Q, R, montrer que l'EDO linéaire $f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = R(x)$ possède une solution série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dont on calculera le rayon de convergence », qui paraît assez stéréotypé et hors-sol, la proposition est de passer plus de temps sur la manipulation des développements en série entière de fonctions usuelles, par exemple :

$$(\star)\qquad \sum_{n\geq 1} n^2 x^n = x^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \big(x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}\big)\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

etc.

On pourra aussi traiter en TD des exemples de série génératrice $S(x) = \sum_n a_n x^n$ associée à un problèmes de dénombrement et utiliser des manipulations (dérivation, primitivation, etc.) pour arriver à exprimer S par une formule explicite, qui permet alors de donner une formule pour les a_n.

Question 3.4.1. — La terminologie « **développement en série entière d'une fonction** » est actuellement absente du cours (car on ne veut pas entrer dans la problématique « développement en série entière d'une fonction analytique ») mais les étudiants posent parfois la question, car ils rencontrent cette terminologie dans des livres d'exercices. Faudrait-il introduire cette terminologie, sur un disque, comme synonyme de « trouver une série entière convergeant sur le disque, dont la somme est la fonction donnée » ? Ainsi, l'égalité $(\star)$ ci-dessus, lue de droite à gauche, serait : « donner le développement en série entière, sur un disque de rayon à préciser, de la fonction $(x^2 + x)/(1-x)^3$ ».

3.5. Théorème d'Abel $(*)$**.** — Si l'on a le temps, on pourra traiter le théorème de convergence radiale d'Abel, en reprenant sa démo (et sans en faire des couches sur la transformation d'Abel).

Théorème 3.5.1. — *Si $S = \sum_n a_n z^n$ est de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $S(z_0)$ converge pour un certain z_0 de module R, la fonction $t \mapsto S(tz_0)$ est continue sur $[0,1]$ donc $S(z_0) = \lim_{t \underset{<}{\to} 1} S(tz_0)$.*

4. Séries de Fourier (8h)

Toutes les fonctions considérées dans cette section sont supposées 2π-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il faudrait préciser ici les objectifs et la progression.

4.1. Coefficients de Fourier des fonctions continues. — Après discussions il a été décidé, pour simplifier les énoncés (et les preuves) de ne considérer que des fonctions *continues* et *de classe C^1 par morceaux.* au moins en 1ère instance, en évitant les fonctions continues par morceaux et le $(f(x-)+f(x+))/2$ dans le thm. de Dirichlet.

On insistera sur l'aspect « hilbertien » des coefficients de Fourier, i.e. on munit l'espace V des fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ du produit scalaire hilbertien

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

(il est semi-linéaire en la *première* variable). Pour tout $f \in V$, on pose $\|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$. Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur V (un autre avantage de ne considérer que des fonctions continues). (On peut alors expliquer que la constante $1/2\pi$ est mise pour que la norme de la fonction constante de valeur c soit $|c|$.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n le sous-espace (de dimension finie) de V engendré par les fonctions $e_k : t \mapsto e^{kit}$ pour $k = -n, \ldots, n$ ou, ce qui revient au même, par les fonctions $\cos_k : t \mapsto \cos(kt)$ pour $k = 0, \ldots, n$ et $\sin_k : t \mapsto \sin(kt)$ pour $k = 1, \ldots, n$. Chacune de ces familles est une base orthogonale de W_n (et même orthonormée dans le cas des e_k) et donc la projection orthogonale de f sur W_n est donnée par

$$\pi_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} (e_k \mid f)e_k = \cdots$$

On définit alors les coefficients de Fourier exponentiels d'une fonction continue f par :

$$c_k(f) = (e_k \mid f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt$$

et, compte tenu du fait que $\cos_k$ et $\sin_k$ sont de norme $1/2$ pour $k \geq 1$, les coefficients de Fourier exponentiels sont définis pour $k \geq 1$ par

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)f(t)\,dt, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)f(t)\,dt.$$

Pour $k \geq 1$ on a $c_k(f) + c_{-k}(f) = a_k(f)$ et pour cette raison on pose aussi $a_0(f) = 2c_0(f)$. La projection orthogonale de f sur W_n, notée $S_n(f)$, est alors donné par :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=^n 1} (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Théorème 4.1.1. — *Si f est C^1 par morceaux et continue, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ converge donc la série de Fourier de f converge normalement vers une limite g.*

La preuve utilise une intégration par parties sur chaque sous-intervalle où f est C^1, plus le fait que f est continue aux bornes de ces intervalles. On pourra se contenter de faire la preuve dans le cas où il n'y a que deux intervalles. (C'est la cas par exemple de la fonction $|x|$ sur $[-\pi,\pi]$.

Mais pour montrer que $g = f$ il faut utiliser le th. de convergence ponctuelle de Dirichlet ou celui de Fejer :

***Théorème 4.1.2* (Dirichlet).** — *Si f est continue et admet une dérivée à gauche et à droite en tout point, alors $(S_n(f)(x))_n$ converge pour tout x vers $f(x)$.*

***Théorème 4.1.3* (Fejér).** — *Si f est continue alors la suite des sommes de Fejér $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ converge uniformément vers f.*

L'avantage des noyaux de Fejér est qu'ils sont positifs et que la méthode de convolution par une suite de noyaux positifs de masse 1 est générale (et sera peut-être revue dans le cours sur l'intégrale de Lebesgue ?).

On déduit du th. 4.1.1 et du th. (4.1.2 ou 4.1.3) l'égalité de Parseval, au moins pour les fonctions C^1 par morceaux.

***Théorème 4.1.4* (Parseval).** — *Si f est C^1 par morceaux, alors* $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt.$

Remarque 4.1.5. — (∗) On pourra mentionner sans démonstration que le théorème de Dirichlet s'étend aux fonctions qui sont seulement dérivables par morceaux (pas nécessairement continues), en remplaçant $f(x)$ par $(f(x-) + f(x+))/2$. (**) Puis aller vers le phénomène de Gibbs ?

Remarques 4.1.6. — 1) En considérant la fonction C^1 par morceaux définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$, qu le thm. de Dirichlet donne $\sum_n 1/n^2 = \pi^2/6$ et l'égalité de Parseval donne $\sum_n 1/n^4 = \pi^4/90$.

2) Quelles autres applications des séries de Fourier pourrait-on donner ? Résoudre l'équation d'une corde vibrante

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) & \text{pour } 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) & \text{pour } t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_x(x,0) = g(x) & \text{pour } 0 < x < \pi \end{cases}$$

par séparation des variables et en décomposant f et g en séries de sinus ? (Voir par exemple [**Vret**], Example 6.4.)

Références

[Ri95] V. Frederick Rickey, My favorite ways of using History in teaching Calculus, pp. 123-134 *in :* Learn from the Masters (eds. Frank Swetz & al.), The Math. Assoc. of America, 1995.

[Vret] Anders Vretblad, Fourier Analysis and its Applications, Grad. Texts Maths 223, Springer-Verlag, 2005.

UE de S3 Algèbre linéaire et bilinéaire I (6 ects) : Monos, Maj, Min

Version du 24 avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — On suppose vu en L1 :

(1) Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice et d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

(2) Formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$, où $P = \mathrm{Mat}_B(B')$ est la « matrice de passage », qui exprime la nouvelle base dans l'ancienne.

(3) Notion de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

(4) Existence du déterminant d'une matrice et façons de le calculer.

(5) Formule $\mathrm{dét}(AB) = \mathrm{dét}(A)\,\mathrm{dét}(B)$ admise ?

0.2. Objectifs. — Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants :

(1) Les espaces propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

(2) Notion de polynôme caractéristique, savoir le calculer pour une matrice de taille ≤ 3.

(3) Savoir trouver les racines d'un polynôme réel de degré 3 dont une racine est connue.

(4) Notion d'espace dual. Savoir manipuler des formes linéaires et savoir que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

(5) Produit scalaire sur un espace vectoriel réel ou complexe, inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne ou hilbertienne associée au produit scalaire.

(6) Savoir utiliser la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie (sera utilisé pour les séries de Fourier).

(7) Savoir utiliser le procédé de Gram-Schmidt ou obtenir une décomposition QR.

(8) Savoir calculer la signature d'une forme quadratique, au moins dans le cas de 3 variables.

(9) Savoir utiliser que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et a ses espaces propres deux-à-deux orthogonaux.

1. Sommes directes de sous-espaces, polynôme caractéristique, espace dual

1.1. Sommes directes. — Sous-espace $E_1 + \cdots + E_p$ de V engendré par des sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$, notation $\sum_{i=1}^p E_i$. Condition pour que ces sous-espaces soient en somme directe, notation $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ ou $\bigoplus_{i=1}^p E_i$. Si tous ces espaces sont de dimension finie, une base de $\bigoplus_{i=1}^p E_i$ s'obtient en prenant la réunion disjointe de bases des E_i ; par conséquent on a $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p E_i$.

Condition pour que V soit somme directe des sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$; sous-espaces supplémentaires.

Donner un exemple de somme directe dans un espace de dimension infinie : par exemple $\mathbb{R}[X]$ (resp. $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) est la somme directe de la droite $\mathbb{R}1$ et des polynômes (resp. fonctions continues) qui s'annulent en 0.

1.2. Retour sur la diagonalisation. — Les étudiants auront vu en L1 que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice ayant n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable c.-à-d. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Bien entendu, la démo présentée passe par l'endomorphisme u associé à A et l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u, mais il est sera utile de revenir et d'insister sur ce raisonnement : si u est un endomorphisme de V, dire que u est diagonalisable signifie que V est la somme (nécessairement directe) des espaces propres de u.

1.3. Rappels sur le déterminant. — Rappels sur l'existence du déterminant et la façon de le calculer. Notion de polynôme caractéristique (nécessaire pour déterminer les valeurs propres des matrices symétriques réelles qu'on voudra diagonaliser).

1.4. Espace dual. — Définition de l'espace dual V^* d'un espace vectoriel V. On insistera sur la notion de forme linéaire, nécessaire d'une part en calcul différentiel : la différentielle $Df(a)$ de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ (matrice ligne), et d'autre part pour l'expression d'une forme quadratique en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. On se concentrera sur le cas où V est de dimension finie, et l'on introduira la notion de base duale.

(*) On pourra mentionner que si $\dim(V) = \infty$ la situation est plus compliquée. Par exemple, si $V = \mathbb{R}[X]$ alors les formes linéaires δ_n définies par $\delta_n(X^k) = 1$ si $n = k$ et $= 0$ sinon, sont linéairement indépendantes mais n'engendrent pas V^* : ce dernier s'identifie à l'espace des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le sous-espace engendré par les δ_n est celui des suites nulles à partir d'un certain rang.

2. Espaces euclidiens = préhilbertiens réels

2.1. Produits scalaires et orthogonalité. — Notion de produit scalaire $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V arbitraire. Exemples de $\mathbb{R}^n$ et de $C^0([a, b], \mathbb{R})$ avec

$$(f \mid g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)\, dt.$$

Noter que le $1/(b - a)$ est là pour que $(f \mid f)$ soit la valeur moyenne de $f(t)^2$ sur $[a, b]$ ou, plus simplement, que $(1 \mid 1) = 1$.

Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : la démo suivante a l'avantage d'être immédiatement transposable au cas préhilbertien complexe : si $x \neq 0$, et si l'on pose $\pi_x(y) = \dfrac{(x \mid y)}{(x \mid x)} x$ alors

$$0 \leq (y - \pi_x(y) \mid y - \pi_x(y)) = (y \mid y) - \frac{(x \mid y)^2}{(x \mid x)}$$

avec égalité ssi $y = \pi_x(y)$. (Noter que $\pi_x(y)$ est le projeté orthogonal de y sur la droite $\mathbb{R}x$.)

Orthogonal d'un sous-ensemble S de V : c'est un sous-espace vectoriel (sev). Si E est un sev de V, un vecteur v appartient à $E^\perp$ ssi il est orthogonal à une base de E. Orthogonal de la somme ou intersection de deux sous-espaces. Si V est de dimension finie, on a $\dim(E^\perp) = \dim(V) - \dim(E)$ et donc $V = E \oplus E^\perp$ puisque $E \cap E^\perp = \{0\}$.

Théorème 2.1.1. — *Si E est de dimension finie, il possède une base orthonormée (b.on).*

Démonstration par récurrence sur $\dim E$ (ou si l'on préfère par la méthode de Gram-Schmidt, voir plus bas).

***Théorème 2.1.2* (Projection orthogonale sur un sev de dim finie).** — *Soit E un sev de dimension finie de V, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors, pour tout $v \in V$, le vecteur*

$$\pi_E(v) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid v) e_i$$

est la projection orthogonale de v sur E. Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base orthogonale de E (pas nécessairement orthonormée), on a

$$\pi_E(v) = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i \mid v)}{(f_i \mid f_i)} f_i.$$

Ce théorème sera utilisé dans l'UE Séries numériques et séries de fonctions, pour définir les coefficients de Fourier d'une fonction continue.

2.2. Groupe orthogonal, Gram-Schmidt et applications. — Définition du groupe orthogonal $O(n)$: ce sont les matrices qui transforment une base orthonormée en une base orthonormée, c'est-à-dire dans les colonnes sont de norme 1 et deux-à-deux orthogonales. Elles sont aussi caractérisées par le fait qu'elles préservent le produit scalaire, ou juste la norme euclidienne. L'égalité ${}^tAA = I_n$ donne dét$(A) = \pm 1$.

$(*)$ Définition de SO(n) et de la notion de bases orthonormées directes ?

Orthogonalisation de Gram-Schmidt : étant donnée une base $(f_1, \dots, f_n)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, on note F_i le sev engendré par $f_1, \dots, f_i$, en soustrayant à chaque f_i sa projection orthogonale sur F_{i-1} on obtient par récurrence une base orthogonale de chaque f_i. À la fin, on divise chaque vecteur par sa norme pour avoir une base orthonormée de E. Traduction en termes de décomposition QR. Comparaison avec la méthode de Householder. Applications (par exemple à la régression linéaire).

3. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

On se place sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension n.

3.1. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques. — Liens entre formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques (f.b.s.), matrice S d'une forme bilinéaire symétrique, formule de changement de base $S' = {}^tPSP$.

3.2. Orthogonalité pour une forme quadratique et signature. — Soit Q une forme quadratique et ϕ la f.b.s. associée (forme polaire). On définit l'orthogonalité pour ϕ de la même façon que pour le produit scalaire. Il y a une difficulté ici pour les étudiants ,car ce n'est pas l'orthogonalité dont ils ont l'habitude. On pourra étudier par exemple le cas des droites orthogonales pour la forme $Q(x, y) = x^2 - y^2$; la droites $y = x$ (resp. $y = -x$) est égale à son orthogonal.

Théorème 3.2.1. — *V admet une base orthogonale pour ϕ. De plus, on peut s'arranger pour que les coefficients diagonaux soient $1, -1$ ou 0. Ceci équivaut à dire qu'avec des coordonnées adaptées on peut écrire :*

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

Démonstration. — Si Q est non nulle, il existe un vecteur e_1 tel que $Q(e_1) = \phi(e_1, e_1)$ soit non nul. Alors V est somme directe de $\mathbb{R}e_1$ et de son orthogonal et l'on obtient la première assertion par récurrence. La deuxième s'en déduit en remplaçant e_i par $e_i/\sqrt{Q(e_i)}$ resp. $e_i/\sqrt{-Q(e_i)}$ si $Q(e_i) > 0$ resp. $Q(e_i) < 0$. $\square$

Remarque 3.2.2. — On peut aussi utiliser l'algorithme de Gauss (voir plus bas) pour écrire $Q(x, y, z, t....)$ comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Mais de l'avis du rédacteur, les deux démonstrations sont utiles. De plus, la notion de « formes linéaires indépendantes » n'est pas si facile à comprendre : parfois dans les calculs les étudiants se retrouvent avec plus de carrés que de variables au départ....

On dit que Q (ou ϕ) est non-dégénérée si la matrice de ϕ dans une base, et donc dans toute base, est inversible. Ceci équivaut à dire que dans toute base comme dans le thm. tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

***Théorème 3.2.3* (d'inertie de Sylvester).** — *Le couple (p, q) du thm.* 3.2.1 *ne dépend que de Q et s'appelle la signature de Q.*

Remarque 3.2.4. — Noter que les termes diagonaux de la matrice diagonale obtenue dans le thm. 3.2.1 n'ont pas de signification intrinsèque, i.e. ne sont pas des invariants de Q. Le seul invariant est le nombre de coefficients qui sont > 0, < 0 ou nuls, c.-à-d. la signature de Q.

Remarque 3.2.5. — ϕ est un produit scalaire (c.-à-d. est défini positif) ssi sa signature est $(n, 0)$.

***Définition 3.2.1* (Algorithme de Gauss).** — C'est la méthode pour calculer la signature qui consiste à « compléter les carrés » et à utiliser l'identité $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$ s'il n'y a pas de termes carrés. Éventuellement on pourrait se limitant à des formes en au plus 3 variables, en vue des applications à la détermination des extrema dans l'UE TCD I ?

Exemple d'algorithme : on considère la forme quadratique $Q(x,y,z) = xy+yz+3xz$. En posant $X = \dfrac{x+y}{2}$ et $Y = \dfrac{x-y}{2}$ on a $x = X+Y$, $y = X-Y$ et
$xy+yz+3xz = X^2-Y^2+(4X+2Y)Z = (X+2Z)^2-4Z^2-(Y-Z)^2+Z^2 = (X+2Z)^2-(Y-Z)^2-3Z^2$
donc Q est de signature $(1,2)$.

Remarque 3.2.6. — Pour une forme quadratique en deux variables, la signature se lit déjà sur le signe du déterminant et de la trace de la matrice :
- si dét $= 0$, forme dégénérée,
- si dét < 0, signature $(1,1)$ et point selle,
- si dét > 0 et Tr > 0, signature $(2,0)$ et minimum local,
- si dét > 0 et Tr < 0, signature $(0,2)$ et maximum local.

3.3. Réduction simultanée. — Étant donné une f.b.s. ϕ sur $\mathbb{R}^n$, on munit de plus $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard. Alors la matrice S de ϕ dans la base canonique définit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\phi(x,y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).$$

***Théorème 3.3.1* (Réduction simultanée)**. — *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ *qui est aussi une base orthogonale pour* ϕ*, et la signature de* ϕ *est donnée par le signe des valeurs propres de* S.

Démonstration. — La 2ème assertion découle de la première en remarquant que comme la matrice de changement de base P est dans $O(n)$, on a $P^{-1} = {}^tP$ donc la matrice $P^{-1}SP$ de u dans la nouvelle base est aussi la matrice ${}^tPSP$ de ϕ dans cette base.

Pour prouver la 1ère assertion, la seule difficulté est de prouver que S a au moins une valeur propre réelle. Si cela est acquis, on peut alors procéder par récurrence sur $\dim V$, en utilisant que si un sev E est stable par u alors son orthogonal $E^\perp$ l'est aussi car $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.

Pour prouver l'existence d'une valeur propre réelle il y a deux possibilités :

(1) On plonge $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hilbertien standard $(x \mid y) = \sum_k \overline{x_k} y_k$; comme $S = {}^t\overline{S}$, si $Sv = \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \neq 0$ dans $\mathbb{C}^n$, on obtient
$$\lambda(v \mid v) = (v \mid Sv) = (Sv \mid v) = \overline{\lambda}(v \mid v)$$
d'où $\lambda = \overline{\lambda}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) On utilise une propriété d'extremum : la fonction $f(v) = \dfrac{(Sv \mid v)}{(v \mid v)}$ atteint un maximum en un point v_0 de la sphère unité. Comme f est homogène, c'est un maximum de f sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ donc $\nabla f(v_0) = 0$. Or pour tout $v \neq 0$ on a
$$\nabla f(v) = \frac{2}{(v \mid v)^2}\Big((v \mid v)Av - (Av \mid v)v\Big).$$
Il en résulte que $Av_0 = (Av_0 \mid v_0)v_0$. Cette démonstration ferait un lien supplémentaire avec l'UE TCD I.

□

4. Espaces préhilbertiens complexes

4.1. Produit scalaire hilbertien et Cauchy-Schwarz. — On introduit la notion de produit scalaire hilbertien (semi-linéaire en la 1ère variable, comme les physiciens) sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V. La démo de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est inchangée : si $x \neq 0$ et si l'on pose $\lambda = \dfrac{(x \mid y)}{(x \mid x)}$ et $\pi_x(y) = \lambda x$ alors
$$0 \le (y-\lambda x \mid y-\lambda)x = (y \mid y) - \overline{\lambda}(x \mid y) - \lambda(y \mid x) + \overline{\lambda}\lambda(x \mid x) = (y \mid y) - \frac{(x \mid y)(y \mid x)}{(x \mid x)} = (y \mid y) - \frac{|(x \mid y)|^2}{(x \mid x)}$$

d'où $|(x \mid y)|^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)$ avec égalité ssi $y = \pi_x(y)$. (Noter que $\pi_x(y)$ est le projeté orthogonal de y sur la droite $\mathbb{C}x$.) On obtient ainsi la norme hilbertienne $\|v\| = \sqrt{(v \mid v)}$ sur V, qui en fait un espace pré-hilbertien complexe.

Deux exemples fondamentaux : $\mathbb{C}^n$ avec $(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$ et $V = C^0([a,b],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire hilbertien

$$(f \mid g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt.$$

Ceci sera utilisé dans l'UE Séries et séries de fonctions pour les coefficients de Fourier.

4.2. Complément : espaces de Hilbert $(*)$**.** — Si le temps le permet, on pourrait mentionner en passant que V est appelé un « espace de Hilbert » s'il est complet pour la norme hilbertienne. C'est le cas de $\mathbb{C}^n$. Par contre $C^0([a,b],\mathbb{C})$ n'est pas complet ; il sera vu en L3 que l'espace complet qui lui correspond est $L^2([a,b],\mathbb{C})$.

UE de S3 Topologie et calcul différentiel I (6 ects) : Monos, Maj, DM

Version du 24 avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — On suppose vu en L1 :

(1) Limite d'une suite réelle ou complexe.

(2) Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, au moins sous la forme que : toute suite croissante majorée converge.

(3) Th. de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite convergente.

(4) Fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, théorème des valeurs intermédiaires.

(5) Fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$, théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

0.2. Objectifs. — Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants.

(1) Normes N_∞, N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^d$ et distances associées. Savoir retrouver les inégalités entre ces normes. donnant l'équivalence entre ces normes.

(2) Connaître l'inégalité de Cauchy-Schwarz et savoir l'utiliser (par exemple pour montrer que N_2 est une norme).

(3) Notion d'ouverts et de fermés, savoir que ce sont les mêmes pour les trois normes précédentes.

(4) Définition de la continuité via les boules ouvertes.

(5) Notion d'application lipschitzienne. Savoir que toute application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne, donc continue.

(6) Notions d'intérieur et d'adhérence : connaître des exemples simples.

(7) Définition des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ par la propriété de Bolzano-Weierstrass, savoir que cela équivaut à fermé et borné. Savoir que l'image d'un compact K par une application continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est compacte ; par conséquent toute fonction continue sur K à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

(8) Savoir que $\mathbb{R}^n$ est complet et savoir appliquer le théorème du point fixe pour une application contractante.

(9) Notion de segments et convexité ; savoir que toute boule est convexe.

(10) Savoir calculer les dérivées partielles et la différentielle en un point (matrice jacobienne) d'une application différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Connaître la formule $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$. Connaître ou savoir retrouver les formules pour les dérivées partielles de $g \circ f$.

(11) Connaître et savoir utiliser le résultat que si les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est différentiable.

(12) Savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis et le théorème du point fixe pour trouver une solution de l'équation $f(x) = y$ pour y proche de $y_0 = f(x_0)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ étant de classe C^1 avec $Df(x_0) = \mathrm{id}$.

(13) Pour une application différentiable $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert, savoir que tout extremum de f est un point critique de f.

(14) En liaison avec le cours d'algèbre linéaire et bilinéaire, connaître la définition d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et de sa signature, et savoir déterminer la signature pour une forme quadratique en deux ou trois variables. Application à l'étude des points critiques d'une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1. Topologie de $\mathbb{R}^n$ (10h)

1.1. Normes sur $\mathbb{R}^n$. — Notion de norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, distance associée. Normes N_∞ et N_1 sur $\mathbb{R}^n$ et norme euclidienne N_2 ; pour celle-ci l'inégalité de Minkowski repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x \neq 0$, et si l'on pose $\pi_x(y) = \dfrac{(x \mid y)}{(x \mid x)}x$ alors

$$0 \leq (y - \pi_x(y) \mid y - \pi_x(y)) = (y \mid y) - \frac{(x \mid y)^2}{(x \mid x)}$$

avec égalité ssi $y = \pi_x(y)$. (Noter que $\pi_x(y)$ est le projeté orthogonal de y sur la droite $\mathbb{R}x$.)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x)$ et $N_2(x) \leq \sqrt{n}N_\infty(x)$. Suites convergentes : ce sont les mêmes pour N_∞, N_1 et N_2, et une suite converge ssi la suite de ses i-èmes coordonnées converge, pour $i = 1, \dots n$.

1.2. Ouverts, fermés, applications continues. — Parties ouvertes et fermées : définitions via les boules ouvertes et via les suites ; les normes N_∞, N_1 et N_2 donnent les mêmes ouverts et fermés. Toute réunion et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Applications continues $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$: définition via les les boules ouvertes et via les suites. Applications lipschitziennes. Toute application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne. Sommes et produits d'applications continues ; les projections $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ sont 1-lipschitziennes et toutes les applications polynomiales $(x, y) \mapsto \sum_{p,q} a_{p,q}x^py^q$ sont continues.

Une composition d'applications continue est continue. Théorème : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est ouverte (resp. fermée). Exemples d'ouverts ou fermés ainsi définis : demi-espaces, fermés d'équation $f(x, y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $f(x, y, z) = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Intérieur, adhérence et frontière d'une partie de $\mathbb{R}^n$.

$(*)$ Notion de partie dense. Applications de la densité : si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales. Exemples de parties denses : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1.3. Compacité. — Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 1.3.1. — *K est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Théorème 1.3.2. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}^q$ continue. Alors $f(K)$ est compact.*

En particulier, toute application continue $f : K \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 1.3.3. — On n'aura pas le temps de démontrer le th. de Heine (continuité uniforme sur un compact), donc il faut laisser cela au cours TCD II de S5.

1.4. Complétude et th. du point fixe. — $\mathbb{R}^n$ est complet (et $\mathbb{C}^n$ aussi).

***Théorème 1.4.1* (du point fixe).** — *Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : F \to F$ une application contractante. Alors pour tout $x_0 \in F$ la suite $(f^k(x_0))_k)$ converge vers l'unique point fixe de f dans F.*

1.5. Convexité. — Segments dans $\mathbb{R}^n$ et parties convexes. Toute boule est convexe.

1.6. Connexité par arcs $(*)$. — Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* si pour tout $p, q \in U$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to U$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Exemples d'ouverts connexes par arcs ou pas.

Remarque 1.6.1. — Après discussions, la majorité a décidé qu'il ne fallait pas introduire la notion de connexité. Il n'est donc pas question de donner l'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$ comme exemple de partie non connexe par arcs mais néanmoins connexe.

2. Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ (14h)

2.1. Applications différentiables, dérivées partielles. — Définition des applications différentiables et des dérivées selon un vecteur (dans un ordre ou dans un autre). Matrices jacobiennes, vecteurs gradients $\nabla f(x)$. Différentielle et dérivées partielles d'une composée.

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 si elle est différentiable et si l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \nabla f(x)$ est continue.

Théorème 2.1.1. — *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 ssi les dérivées partielles existent et sont continues.*

$(*)$ Mentionner en cours et traiter en TD un exemple où les dérivées partielles existent mais f n'est pas différentiable, par exemple $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. (En anticipant sur les coordonnées polaires, on a $\mathrm{f}(r, \varphi) = r \sin(2\varphi)/2$.)

L'intérêt d'introduire la notion d'ouvert connexe par arcs est d'avoir le résultat suivant :

Théorème 2.1.2 (*). — *Soit U un ouvert connexe par arcs et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $\nabla f(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Alors f est constante.*

Démonstration. — On fixe un point $p \in U$. Soit $q \in U$. Par hypothèse, il existe un chemin continu joignant p à q. On admet, qu'il existe un tel chemin $\gamma : [0,1] \to U$ de classe C^1. Alors l'application $t \mapsto f(\gamma(t))$ est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée nulle, donc constante, d'où $f(q) = f(p)$. □

(**) Si l'on veut, on peut donner une démonstration complète comme suit. En utilisant que toute boule ouverte est convexe, on montre sans difficulté l'assertion (i) de la proposition suivante :

Proposition 2.1.3. — *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$. Soit U_1 le sous-ensemble formé des $q \in U$ qui sont reliés à p par une ligne brisée, c.-à-d. pour lesquels il existe un entier $n \geq 1$ et des points $q_0, q_1, \dots, q_n$ de U tels que $q_0 = p$, $q_n = q$ et que U contienne le segment $[q_{i-1}, q_i]$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors :*

(i) *U_1 et U_2 sont ouverts.*
(ii) *Si U est connexe par arcs, alors $U_1 = U$.*

Pour prouver (ii), soit $g : U \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1$ si $x \in U_1$ et $f(x) = 2$ si $x \in U_2$. Alors g est continue. Supposons que U_2 contienne un point q et soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin joignant p à q. Alors l'application $g \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et ne prend que les valeurs 1 et 2, ce qui contredit le th. des valeurs intermédiaires. Donc $U_2 = \varnothing$ et $U_1 = U$.

On peut alors terminer la preuve du th. 2.1.2 en disant que f est constante sur chaque segment $[q_{i-1}, q_i]$ d'où $f(q) = f(p)$.

2.2. C^1-difféomorphismes. — Notion de C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$. Exemple des coordonnées polaires : l'application $\mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ est de classe C^1 et bijective, mais l'application réciproque est discontinue en tout point de la demi-droite $\mathbb{R}_-^*$. Pour cette raison, on se restreint à l'intervalle ouvert $I =]-\pi, \pi[$ et dans ce cas l'image est $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\mathbb{R}_-$.

Question 2.2.1. — Montre-t-on ou admet-on que la bijection réciproque est de classe C^1 ? Si on l'admet, il est facile de calculer la jacobienne de la réciproque en un point (x, y).

Remarques 2.2.2. — 1) De l'avis du rédacteur, il vaut mieux éviter d'invoquer ici le thm d'inversion locale pour justifier que la réciproque est C^1, car sinon les étudiants le citent à tour de bras, pas forcément à bon escient.

2) On peut montrer directement que l'application réciproque est donnée par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = 2\arctan(\tan(\varphi/2)) = 2\arctan\left(\frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)}\right) = 2\arctan\left(\frac{y}{r + x}\right)$$

donc est bien de classe C^1.

Ce qui précède s'étend immédiatement au cas des coordonnées cylindriques

$$\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

et aux coordonnées sphériques (on nomme θ et φ comme les physiciens)

$$\mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Ici, posant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, la bijection réciproque est donnée par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta = \arccos(z/r), \qquad \varphi = 2\arctan\left(\frac{y}{\rho + x}\right)$$

donc est bien de classe C^1.

Question 2.2.3. — Que fait-on avec cela ? On pourrait peut-être trouver des applications dans le paragraphe suivant ?

2.3. Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$. — Courbes paramétrées de classes C^1 : calcul de la longueur. Exemples. On pourrait en particulier donner des exemples dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ou utilisant les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques (portions de cercles, d'hélices, de cycloïdes, etc.) ?

2.4. Inégalité des accroissement finis. — On ne peut pas se limiter à l'énoncer pour des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, puisqu'on voudra appliquer ce résultat pour montrer que des applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont contractantes. On considère donc une application différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, donnée par ses composantes $f_1, \ldots, f_p$. On note $Df(x)$ sa matrice jacobienne en un point x : sa i-ème ligne est la transposée du vecteur $\nabla f_i(x)$.

On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de la norme N_∞. Sans chercher à introduire la norme d'opérateur sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ on pourrait montrer l'inégalité suivante :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad \|Df(x)(h)\| \leq \Big(\max_{i=1,\ldots,p} \|\nabla f_i(x)\|\Big)\|h\|_\infty$$

poser $\|\!|Df(x)|\!\| = \max_{i=1,\ldots,p} \|\nabla f_i(x)\|$ puis démontrer le :

Théorème 2.4.1 **(Inégalité des accroissements finis).** — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1. Soit B une boule fermée contenue dans U. Alors l'application $x \mapsto \|\!|Df(x)|\!\|$ est bornée sur B par un réel $M > 0$ et pour tout $a, b \in B$ on a $\|f(b) - f(a)\| \leq M\,\|b - a\|$.*

Conséquences 2.4.2. — 1) Toute application de classe C^1 est lipschitzienne sur chaque toute boule fermée.

2) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et vérifie $Df(x_0) = \mathrm{id}$ en un point x_0 alors au voisinage de x_0 on peut appliquer le théorème ci-dessous (cf. [**JSR**], §VII.7) à $u = f - \mathrm{id}$ pour montrer que f est localement une bijection. (C'est évidemment le premier pas vers le théorème d'inversion locale.)

Théorème 2.4.3 **(Perturbations de l'identité).** — *Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application ε-lipschitzienne, avec $\varepsilon \in [0, 1[$; posons $f(x) = x + u(x)$ et fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour $r > 0$ et tout y tel que $\|y - f(x_0)\| < (1 - \varepsilon)r$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution x dans la boule de centre x_0 et de rayon r.*

2.5. Étude de points critiques. — Notion de point critique d'une application différentiable $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un *ouvert* de $\mathbb{R}^n$. Tout point de U en lequel f admet un extremum est un point critique ; la réciproque est fausse.

Si f est de classe C^2, i.e. si ses dérivées partielles sont de classe C^1, définition des dérivées partielles secondes de f et de la matrice hessienne de f en un point critique p. Notion de forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et de signature, en lien avec le cours d'algèbre linéaire et bilinéaire.

Théorème 2.5.1 **(de Schwarz).** — *Pour f de classe C^2, la matrice hessienne H_p est symétrique, donc définit une forme quadratique Q_p sur $\mathbb{R}^n$.*

On se contentera de démontrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ dans le cas d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables.

Théorème 2.5.2 **(Formule de Taylor).** — *En un point critique p, on a $f(p + h) = f(p) + \dfrac{1}{2}Q_p(h) + o(\|h\|^2)$, où Q_p est la forme quadratique définie par la matrice hessienne en p.*

Soit en diagonalisant la matrice hessienne H_p dans une base orthonormée et en utilisant la norme euclidienne, soit en utilisant la réduction de Gauss de Q_p (et le fait que toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ donnent des normes N_∞ équivalentes), on obtient des conditions suffisantes pour que f admette en p un extremum ou un point-selle :

Théorème 2.5.3. — *Si Q_p est définie positive (resp. négative) alors f admet en p un minimum (resp. maximum) local.*

Si la signature de Q_p est (r, s) avec $r, s \neq 0$, alors f admet en p un point selle.

Références

[JSR] Jean Saint-Raymond, Topologie, calcul différentiel et variable complexe, Calvage & Mounet.

UE de S3 Algèbre et arithmétique (6 ects) : juste Monos

Version du 24 avril 2019 [2]

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — On suppose vu en L1 :

(1) Conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$, c.-à-d. $a + ib \mapsto a - ib$.

À part cela, quasiment pas de prérequis de L1. Mais la notion de nombre premier est vue au collège,[3] ainsi que celle de pgcd et de ppcm.

0.2. Objectifs. — Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants :

(1) Notions de groupes abéliens, anneaux et corps, illustrées par les exemples de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$ pour un nombre premier p.

(2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et dans $k[X]$ (où k est un corps).

(3) Notion d'anneau principal. Éléments irréductibles, lemmes de Gauss et d'Euclide, unicité de la décomposition en facteurs irréductibles. Applications (par exemple irrationalité de $\sqrt[n]{a}$ si a n'est pas la puissance n-ième d'un entier).

(4) Algorithme d'Euclide pour le calcul de $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$, éventuellement l'algorithme d'Euclide « étendu », qui donne aussi les coefficients de Bézout a et b tels que $am + bn = d$?

(5) Construction de quotients : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $k[X]/(P)$. Condition pour qu'un tel quotient soit un corps.

(6) Construction de $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$. Théorème : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

(7) Théorème chinois.

(8) Groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et applications : petit théorème de Fermat, théorème d'Euler.

1. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ ou dans $k[X]$

1.1. Cas de $\mathbb{Z}$. — Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Conséquence : tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal.

PGCD, relation de Bézout, lemme de Gauss si c divise ab et si $\mathrm{pgcd}(c, a) = 1$, alors c divise b), lemme d'Euclide (si un nombre premier p divise ab, alors p divise a ou b).

Démonstration du Théorème Fondamental de l'Arithmétique : existence et unicité de la factorisation en produit de nombres premiers.

Applications et exemples et applications : irrationalité de $\sqrt[n]{a}$ si a n'est pas la puissance n-ième d'un entier, nombres premiers de Mersenne et Fermat, etc.

1.2. Cas de $k[X]$, pour k un corps. — Division euclidienne dans $k[X]$. Conséquence : tout idéal de $k[X]$ est principal.

Définition des polynômes irréductibles.

PGCD, relation de Bézout, lemme de Gauss si c divise ab et si $\mathrm{pgcd}(c, a) = 1$, alors c divise b), lemme d'Euclide (si un nombre premier p divise ab, alors p divise a ou b).

Théorème 1.2.1. — *Dans $k[X]$ tout polynôme s'écrit de façon unique comme produit de son terme dominant et de polynômes unitaires irréductibles.*

Dans un premier temps, on suppose connu $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et l'on suppose connu que tout nombre complexe ademt des racines n-ièmes, pour tout entier $n \geq 2$. On démontre alors le « Théorème Fondamental de l'Algèbre » :

Théorème 1.2.2. — *$\mathbb{C}$ est algébriquement clos : tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

par récurrence sur le degré, obtient le :

[2] Ce programme n'est pas un plan de cours, i.e. les items peuvent être présentés dans un ordre différent.

[3] L'existence de la factorisation est admise, et vue sur des exemples.

Théorème 1.2.3. — *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$ s'écrit de façon*

$$(\star) \qquad P = a(X - z_1)^{m_1} \cdot (X - z_r)^{m_r}$$

avec les z_i dans $\mathbb{C}$ deux-à-deux distincts et $m_1 + \cdots + m_r = d$.

Propriétés de la conjugaison complexe : $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Corollaire 1.2.4. — *Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{z}$ l'est aussi.*

Question 1.2.5. — Faut-il étendre la conjugaison complexe à $\mathbb{C}[X]$ et dire que si P est dans $\mathbb{R}[X]$ alors en appliquant la conjugaison à $(\star)$ et en utilisant l'égalité $P = \overline{P}$, on obtient que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{z}$ est une racine **de même multiplicité** que z ?

Théorème 1.2.6. — *Tout polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ est soit de degré 1, soit de degré 2 sans racines réelles.*

Démonstration. — On utilise la décomposition $(\star)$ dans $\mathbb{C}[X]$; si $z_1 \notin \mathbb{R}$ on utilise que $\overline{z_1}$ est une racine (différente de z_1), on fait la division euclidienne par le polynôme réel $P_1 = (X - z_1)(X - \overline{z_1})$ et l'on conclut par récurrence.

Évidemment, si on a répondu oui à la qestion précédente, on peut aussi regrouper directement les facteurs $(X - z_1)^{m_1}$ et $(X - \overline{z_1})^{m_1}$ en le facteur réel $P_1^{m_1}$. □

Question 1.2.7. — Faut-il donner la caractérisation que a est une racine de multiplicité exactement m si P et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m - 1$ s'annulent en a, mais la dérivée m-ième ne s'annule pas ?

2. Groupes et anneaux quotients

2.1. Groupes abéliens quotients. — Si A est un groupe abélien et B un sous-groupe, définition du groupe quotient A/B. Exemples : $\mathbb{Z}/Z Z$, cas où A est un espace vectoriel sur un corps k et B un sous-espace vectoriel.

$(*)$ Théorème de Lagrange dans le cas abélien : si A est fini, le cardinal de B divise celui de A. En particulier, l'ordre de tout élément de A divise $|A|$.

2.2. Anneaux quotients. — Si A est un anneau commutatif unitaire et I un idéal, définition de l'anneau quotient A/I. Exemples : $k[X]/I$ pour un idéal I (nécessairement principal). Application : construction de $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

2.3. Théorème chinois. — Théorème chinois. Applications à des résolutions de congruences. Groupe multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, petit théorème de Fermat, théorème d'Euler.

Éventuellement tests de primalité et nombres de Carmichael ?

Logarithme discret lorsque ce groupe est cyclique, applications cryptographiques.

2.4. Corps finis. — $(*)$ Si le temps le permet, contruction de corps finis de caractéritique p autres que le corps premier $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: un tel corps est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ de dimension finie d, donc de cardinal p^d. Par exemple, construction de $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8, \mathbb{F}_9$.

2.5. Théorème de Noether. — $(*)$ Soit $f : A \to C$ est un morphisme de groupes abéliens (resp. d'espaces vectoriels, resp. d'anneaux) il induit un isomorphisme entre $A/\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

UE de S3 Combinatoire et graphes (6 ects) : juste Monos

Version du 24 avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — Pas de prérequis de L1(?)

0.2. Objectifs. — Le cours est distribué en deux moitiés bien différenciées. La première moitié est dédiée au dénombrement, et on suit un parcours qui démarre aux principes basiques de dénombrement pour arriver à la résolution de récurrences linéaires homogènes avec des séries formelles.

La deuxième partie est dédiée à la théorie des graphes. La progression dans cette partie est très différente : on y introduit des objets nouveaux, les graphes, et on les observe de plusieurs points de vue. Ceci permet de voir un type de mathématiques très différent de ce à quoi les étudiants sont habitués. Le but est de se familiariser avec les graphes, plutôt que d'apprendre un résultat en particulier. Du coup, on a fait une sélection de résultats indépendants les uns des autres, chacun illustrant un aspect distinct de la théorie des graphes. Cette sélection pourrait facilement être modifiée, raccourcie ou augmentée.

Il faudrait écrire une liste d'objectifs « évaluables », comme dans les UE précédentes. Arnau, pourrais-tu t'en charger STP ?

1. Partie I : Dénombrement (12h)

La partie « Dénombrabilité » est supprimée et sera vue dans le cours de Probas de S4.

1.1. Principes de dénombrement. —

– Principe d'addition : Si E et F sont des ensembles finis disjoints ($E \cap F = \varnothing$), alors $|E \cup F| = |E| + |F|$.

– Principe des bergers : Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$. S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f^{-1}(y)| = p$ pour tout $y \in F$, alors $|E| = p \cdot |F|$.

– Principe de multiplication : Soient E et F des ensembles finis, alors $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

– Conséquences : le nombre d'applications de E dans F, le nombre d'injections de E dans F, le nombre de bijections entre E et F.

– $(*)$ Nombres de Stirling de seconde espèce : définition, récurrence et relation avec le nombre de surjections de E sur F.

1.2. Coefficients binomiaux et relatifs. —

– Coefficients binomiaux (définition combinatoire et formule)
– Formule du binôme
– Multi-ensembles (définition et cardinal)
– Nombres multinomiaux
– Multinôme de Newton

1.3. Formule du crible. —

– Énoncé et preuve avec les fonctions caractéristiques
– Application : le nombre de surjections de E dans F

1.4. Séries formelles. —

– Introduction de l'anneau des séries formelles : somme, produit de Cauchy, éléments inversibles
– $(*)$ Composition, dérivation, exponentielle, logarithme
– Coefficients binomiaux généralisés : $\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k}$ pour $m \in \mathbb{N}$.
– Théorème du binôme pour des exposants négatifs :

Théorème 1.4.1. — *Pour un nombre entier quelconque $r \in \mathbb{Z}$, la série formelle $(1+X)^r$ est la fonction génératrice de la suite $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots)$. C'est-à-dire,*

$$(1+X)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} X^k.$$

– Résolution des récurrences linéaires homogènes à coefficients constants

2. Partie II : Graphes

2.1. Introduction, définition et concept d'isomorphisme. —

– Définition
– Isomorphisme
– Exemples : Stables, Cliques, Chaînes, Cycles, Cube, Petersen, Bipartis complets

2.2. Degrés. —

– Lemme des poignées de main
– Théorème d'Havel et Hakimi

2.3. Sous-graphes. —

– Définition de : sous-graphe, sous-graphe induit, sous-graphe couvrant.
– Cliques
– Théorème de Turán
– Graphe complémentaire
– Stables
– Théorème de Ramsey

2.4. Connexité. —

– Connexité, composantes connexes
– Distance
– Puissances de la matrice d'adjacence et distance
– Graphes valués
– Algorithme de Dijkstra

2.5. Graphes eulériens. —

– Graphes eulériens et semi-eulériens
– Caractérisation : Un graphe d'ordre au moins 2 est eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. Un graphe est semi-eulérien si et seulement si il est connexe et le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

2.6. Arbres. —

Théorème 2.6.1. — *Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est un arbre (acyclique et connexe).*
(2) *Pour tout couple (u, v) de sommets, il existe une chaîne simple d'origine u et extrémité v et une seule.*
(3) *G est connexe et a $n - 1$ arêtes.*
(4) *G est une forêt (acyclique), et $m = n - 1$.*
(5) *G est connexe, et pour toute arête $e \in A$, le graphe $G \setminus e = (S, A \setminus e)$ n'est pas connexe (G est connexe minimal).*
(6) *G est une forêt, et pour toute arête $e \notin A$, le graphe $G \cup e = (S, A \cup \{e\})$ admet un cycle (G est une forêt maximale).*

2.7. Colorations et graphes bipartis. —

– Coloration, nombre chromatique
– Nombre chromatique des exemples traités en cours
– Algorithme glouton pour trouver une coloration
– Graphes bipartis
– Caractérisation

Théorème 2.7.1. — *Un graphe G est biparti si et seulement si il n'existe pas dans G de cycle de longueur impaire.*

2.8. Couplages. —

– Couplages, couplages maximals et maximums, couplages parfaits, sommets saturés, chaînes alternées, chaînes augmentantes

– Théorème de Berge pour les couplages :

Théorème 2.8.1. — *Un couplage M est maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne augmentante dans G.*

– Théorème de Hall :

Théorème 2.8.2. — *Un graphe biparti G de bipartition X, Y admet un couplage saturant X si, et seulement si*

$$|N(U)| \geq |U|$$

pour tout $U \subset X$.

2.9. ($*$) **Planarité. —**

– Définition

– K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires

– Énoncé du théorème de Kuratowski

– Formule d'Euler

– Tout graphe planaire admet un sommet de degré ≤ 5.

– Théorème des 6 couleurs

– Théorème des 5 couleurs

– Énoncé du théorème des 4 couleurs

2.10. ($*$) **Couplages stables et algorithme de Gale-Shapley (Admission Post-Bac). —**

– Définition

– Algorithme de Gale-Shapley (nombre d'itérations et stabilité)

– Solution optimale pour un côté, et pire pour l'autre

UE de S3 Fondements d'algèbre et d'analyse (6 ects) : juste Monos-Intensifs

Version du 24 avril 2019

Ce cours, proposé à un petit effectif (< 30) d'étudiants motivés, pourrait être proposé en pédagogie inversée. Il pourrait contenir tout ou partie des thèmes suivants.

(1) Construction de $\mathbb{R}$ comme quotient de l'anneau des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ par l'idéal maximal des suites convergeant vers 0 (voir par exemple [**Dix76**], Chap. XII).

(2) Construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind, et caractérisation comme l'unique groupe totalemement ordonné dense ayant la propriété des bornes supérieure et inférieure ([**Que76**], Chap.1 §C.4).

(3) Valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$: théorème d'Ostrowsky (voir par exemple [**Que76**], pp. 131-134 ou [**Bou85**], Chap VI, §6.3).

(4) Irrationalité ou plutôt transcendance si possible(4) de e et π.

(5) Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

(6) Crise des fondements des maths au 19ème siècle et construction par Weierstrass de fonctions « pathologiques » qui sont des contre-exemples à beaucoup de choses qu'on croyait vraies ; éventuellement courbe de Peano qui remplit un carré, voire courbe d'Osgood = une courbe de Jordan de mesure > 0 (voir [**Sag94**]).

Références

[Bou85] Nicolas Bourbaki, Algèbre commutative, Chap. 5 à 7, Masson, 1985.

[Dix76] Jacques Diximier, Cours de mathémtiques du 1er cycle, première année, Gauthier-Villars, 1976.

[Que76] Jean Querré, Cours d'algèbre, Masson, 1976.

[Sag94] Hans Sagan, Space-Filling Curves, Springer-Verlag, 1994.

(4) Comme irrationnel on connaît déjà $\sqrt{2}$.

UE de S4 : Algèbre linéaire et bilinéaire IIa (3 ects) : Monos, Maj, DM, Min

Version du 25 avril 2019

Ce cours, suivi par tous les étudiants, présente d'une part le déterminant et d'autre part la décomposition de Dunford et les exponentielles de matrices, en arrivant au plus vite à la décomposition de Dunford grâce au lemme de Fitting. Une version plus approfondie de la réduction des endomorphismes, avec les polynômes d'endomorphismes, sera faite dans l'UE Algèbre linéaire et bilinéaire IIb,[5] suivie juste par les Monos et Maj (mais pas les DM).

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — On suppose vu en L1 :

(1) Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice et d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

(2) Formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$, où $P = \mathrm{Mat}_B(B')$ est la « matrice de passage », qui exprime la nouvelle base dans l'ancienne.

(3) Notion de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

(4) Existence du déterminant d'une matrice et façons de le calculer.

0.2. Objectifs. — Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants :

(1) Connaître le groupe symétrique S_n, savoir calculer sur un exemple la signature d'une permutation.

(2) Savoir que le déterminant d'une matrice A est donné par une formule algébrique explicite : c'est un polynôme en les coefficients a_{ij} de A. En particulier, on peut appliquer cette formule au cas de la matrice $A - X\mathrm{id}$; ceci donne le polynôme caractéristique de A.

(3) Savoir que $\mathrm{dét}(AB) = \mathrm{dét}(A)\,\mathrm{dét}(B)$ et qu'on peut définir le déterminant et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

(4) Savoir calculer le déterminant et le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs.

(5) Savoir ce qu'est une matrice nilpotente, un endomorphisme nilpotent. Savoir calculer ou majorer l'indice de nilpotence dans des cas simples.

(6) Savoir calculer une exponentielle de matrice dans des cas simples. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ et X_0 dans $\mathbb{C}^n$, savoir dériver les fonctions $t \mapsto \exp(tA)$ et $t \mapsto \exp(tA)X_0$.

1. Groupe symétrique, signature d'une permutation, déterminant

(1) groupe symétrique S_n et signature $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$

(2) formule explicite pour le déterminant :

$$\mathrm{dét}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

(3) définition du polynôme caractéristique $P_A(X) = \mathrm{dét}(A - X\mathrm{id})$

(4) l'espace des formes n-linéaires alternées sur k^n est de dimension 1 ; par conséquent on a $\mathrm{dét}(AB) = \mathrm{dét}(A)\,\mathrm{dét}(B)$

(5) déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

2. Trigonalisation sur $\mathbb{C}$ et exponentielles de matrices

2.1. Trigonalisation et décomposition de Dunford. — L'idée est d'éviter les polynômes d'endomorphismes (et le théorème de Bézout) et d'atteindre au plus vite la décomposition de Dunford grâce au lemme de Fitting ci-dessous.

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie d ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si l'on veut) et u un endomorphisme de V. On pose $u^0 = \mathrm{id}_V$ de sorte que $\mathrm{Ker}(u^0) = \{0\}$.

---

[5] Titres abrégés : ALB IIa et IIb.

***Lemme 2.1.1* (Fitting).** — *La suite* $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \cdots$ *est strictement croissante jusqu'à un certain cran* k*, puis l'on a* $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+\ell})$ *pour tout* $\ell \geq 0$ *et*

$$(\star) \qquad V = \mathrm{Ker}(u^k) \oplus \mathrm{Im}(u^k).$$

Ainsi, $I = \mathrm{Im}(u^k)$ *est un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(u^k)$ *stable par* u *et la restriction de* u *à* I *est bijective.*

Démonstration. — Pour des raisons de dimension, la suite ne peut pas être indéfiniment strictement croissante. Soit donc k le plus petit entier ≥ 0 tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+2})$, alors $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^{k+2})$ et l'on obtient par récurrence que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+\ell})$ pour tout $\ell \geq 0$.

Posons $N = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I = \mathrm{Im}(u^k)$ et soit $y \in N \cap I$. Il existe alors $x \in V$ tel que $y = u^k(x)$ et comme $y \in N$ on a $0 = u^k(y) = u^{2k}(x)$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(u^{2k}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ et donc $0 = u^k(x) = y$. Ceci montre que $N \cap I = \{0\}$. Or, d'après le thm. du rang, $\dim(N) + \dim(I) = \dim(V)$. On a donc $(\star)$.

Enfin, il est clair que $u(I) \subset I$. Si $k \geq 1$ alors $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$ d'où $\mathrm{Ker}(u) \cap I = \{0\}$, et donc la restriction de u à I est injective donc bijective. Si $k = 0$ alors $I = V$ et u est injectif donc bijectif. □

Notons $u|_N$ la restriction de u à N. Comme pour tout p on a $u(\mathrm{Ker}(u^p)) \subset \mathrm{Ker}(u^{p-1})$, on obtient aussi le :

***Lemme 2.1.2* (Bases adaptées).** — *Soit* $\mathscr{C}$ *une base de* N *obtenue en complétant une base de* $\mathrm{Ker}(u)$ *en une base de* $\mathrm{Ker}(u^2)$*, etc. Alors la matrice dans la base* $\mathscr{C}$ *de* $u|_N$ *est triangulaire supérieure, avec des* 0 *sur la diagonale.*

2.2. Décomposition de Dunford. — On se place sur le corps $\mathbb{C}$, qui est algébriquement clos.[6] Alors tout endomorphisme u admet au moins une valeur propre.

Définition 2.2.1. — Si μ est une valeur propre de u, alors $V_{(\mu)} = \mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})^{\dim V}$ s'appelle *l'espace propre généralisé* de u pour la valeur propre μ.

Remarque 2.2.1. — On prend l'exposant $d = \dim V$ pour simplifier l'écriture. En fait, $V_{(\mu)} = \mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})^k$ où k est le plus petit entier tel que que $\mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})^k = \mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})^{k+1}$. On a $k \leq d$ et donc $V_{(\mu)} = \mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})^d$.

***Théorème 2.2.2* (Décomposition de Dunford).** — *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *les valeurs propres, deux à deux distinctes, de* u*. Pour* $i = 1, \ldots, p$ *on pose* $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id})^d$*. Alors* $V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ *et chaque* E_i *est stable par* u*. En prenant une base adaptée de chaque* E_i*, la matrice* A *de* u *est diagonale par blocs, le* i*-ème bloc étant une matrice triangulaire supérieure avec des* λ_i *sur la diagonale.*

Soit s *l'endomorphisme de* V *défini par* $s(x) = \lambda_i\, x$ *si* $x \in E_i$ *et soit* $n = u - s$*. Alors* s *est diagonalisable,* n *est nilpotent,* s *et* n *commutent, et* $u = s + n$*. De plus, le couple* (s, n) *est unique et s'appelle la décomposition de Dunford de* u*.*

Le polynôme caractéristique de u*, c.-à-d.* $P_u(X) = \mathrm{dét}(u - X\mathrm{id})$*, est alors égal à* $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\dim E_i}$*.*

$(*)$ Si le temps le permet, énoncer le thm. de Cayley-Hamilton ci-dessous ; sinon ce sera dans l'UE IIb.

***Théorème 2.2.3* (Cayley-Hamilton).** — *L'endomorphisme* $P_u(u) = (-1)^d \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (u - \lambda_i \mathrm{id})^{\dim E_i}$ *est nul.*

Démonstration. — Notons u_i la restriction de u à E_i. La matrice de $u_i - \lambda_i \mathrm{id}$ est une matrice carrée de taille $d_i = \dim E_i$, triangulaire avec des 0 sur la diagonale. Elle devient donc nulle quand on l'élève à la puissance d_i. Par conséquent, $P_u(u)$ est nul sur chaque E_i, donc sur V tout entier. □

[6] Les monos l'auront vu en S3 dans l'UE Algèbre et arithmétique. Pour les autres, il faudra l'admettre.

2.3. Exponentielles de matrices. — Elles sont utiles pour l'UE d'EDO de S4.

On définit les exponentielles de matrices, en utilisant une majoration $\|AB\| \leq c\,\|A\|\,\|B\|$ pour une constante c qui dépend de la norme choisie sur $M_n(\mathbb{C})$ (on a $c = 1$ si on prend une norme subordonnée mais ce n'est pas indispensable) et en utilisant que $M_n(\mathbb{C})$ est complet.

Si A et B commutent, on a la formule du binôme de Newton puis l'égalité $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Application : si N est nilpotente et si $A = \lambda\mathrm{id} + N$ alors

$$\exp(tA) = e^{\lambda t}\exp(tN) = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}N^k.$$

Théorème 2.3.1. — *L'application $f_A : t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable, de dérivée $f'_A(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.*

UE de S4 Algèbre linéaire et bilinéaire IIb (3 ects) : juste Monos et Maj, pas DM

Version du 25 avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — L'UE Algèbre linéaire et bilinéaire IIa. Ceci nécessiterait que IIa soit concentrée dans la 1ère moitié du semestre, et IIb dans la 2ème. Discussion en cours avec les licences d'info, physique et méca pour l'EDT des DM.

0.2. Objectifs. — Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants :

(1) Réinvestir des notions vues dans l'UE Algèbre et arithmétique : théorème de Bézout, théorème chinois.

(2) Connaître et savoir utiliser le thm. de Cayley-Hamilton.

(3) Savoir utiliser le critère de diagonalisabilité d'un endomorphisme : « être annulé par un polynôme scindé à racines simples » ; en particulier dans le cas d'un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ d'ordre fini.

1. Contenus

(1) polynômes d'endomorphismes et décomposition en sous-espaces caractéristiques (lemme des noyaux)

(2) thm. de Cayley-Hamilton (si pas vu en IIa)

(3) polynôme minimal.

(4) Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité : être annulé par un polynôme scindé à racines simples. Cas des automorphisms de $\mathbb{C}^n$ d'ordre fini ; matrices de permutations.

(5) $(*)$ Si le temps le permet, aller jusqu'à la décomposition de Jordan ? Avec applications aux bases standard de solutions d'EDO ou de suites récurrentes ?

UE de S4 Probabilités et modèles aléatoires (6 ects) : Monos, Maj, DM, Min

Version du 24 Avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — On suppose vu en L1 ou en S3 :

(1) en L1 : à compléter...
(2) en S3 : UE Séries numériques et séries de fonctions, pour les fonctions génératrices.

Liens avec d'autres UE : lien avec l'UE Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (variables aléatoires à densité).

0.2. Objectifs. — Une idée générale est de disséminer quelques modèles tout au long du cours, qu'ils pourront simuler en UE de Python, avec par exemple la marche aléatoire simple (MAS) sur $\mathbb{Z}$ comme fil conducteur, mais aussi mentionner quelques autres modèles (par exemple percolation, graphes aléatoires ou autre).

Les objectifs de base comprennent au moins les points suivants.

(1) savoir manipuler des ensembles (partitions, dénombrabilité) ; savoir utiliser le dénombrement pour faire des calculs de probabilité sur des ensembles finis ;
(2) notion d'événement ; connaître la définition d'une mesure de probabilité et ses propriétés (probabilité d'une union, d'une suite monotone d'événements) ; connaître la formule de Bayes et savoir l'appliquer ; connaître la définition d'une famille d'événements indépendants et savoir l'appliquer ;
(3) comprendre ce qu'est une variable aléatoire (savoir manipuler les notations) ; connaître les lois discrètes standard ; connaître la formule de l'espérance, de la variance, la formule de transfert, et savoir faire les calculs dans des cas simples ; connaître la définition d'indépendance d'une famille de variables aléatoires mais surtout savoir l'utiliser dans les exemples ; savoir appliquer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebichev ;
(4) connaître la définition de fonction génératrice, et savoir la calculer pour des lois simples ; savoir l'utiliser pour retrouver les moments d'une variable aléatoire ;
(5) connaître la définition d'une variable aléatoire à densité ; connaître les lois à densité standard ; savoir appliquer la formule de transfert ; savoir calculer une loi (via la fonction de partition ou la formule de transfert) ;
(6) savoir simuler les v.a. discrètes standard (Bernoulli, Binomiale, Poisson) ; connaître la méthode d'inversion, savoir l'appliquer dans des cas simples ;
(7) connaître la définition de la convergence en probabilité ; connaître l'énoncé de la loi faible des grands nombres ; savoir utiliser les inégalités probablistes pour démontrer une convergence en probabilité ;
(8) savoir construire un intervalle de confiance.

Ce qu'il n'y a PAS dans ce cours : fonctions caractéristiques (ils ne voient la transformée de Fourier qu'à la fin du semestre), convergence en loi (PAS de TCL), convergence presque sûre (PAS de loi forte des grands nombres).

1. Probabilités sur un ensemble fini/dénombrable (3h)

1.1. Manipulation d'ensembles et dénombrabilité. — Opérations sur les ensembles (unions, intersections, partitions) Rappels de dénombrement.

Définition de ce qu'est un ensemble dénombrable et manipulation, voir quelques exemples. L'ensemble de polynômes à coefficients entiers est dénombrable, $[0, 1]$ n'est pas dénombrable (démontré en TD ?)

1.2. Probabilités sur des univers finis/dénombrables. — Dans un premier temps, cas où l'*univers* Ω est fini. Probabilité uniforme sur Ω. Lien avec le dénombrement. Exemples que l'on peut présenter : chemins d'une promenade aléatoire (ou jeu de n pile ou face), permutation aléatoire. (Nombreux exemples en TD).

Cas où l'univers Ω est dénombrable. Définition d'une probabilité sur Ω. Un exemple (par exemple le nombre de lancer pour obtenir Pile pour la première fois).

2. Axiomes des probabilités et premières propriétés (3h)

2.1. Définition d'un espace probabilisé, propriétés des probabilités. — Définition de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On peut mentionner le mot tribu pour $\mathcal{F}$, mais on ne manipule pas les tribus (terminologie *ensemble des événements « descriptibles »* ?), on donne des exemples. Pour $\mathbb{P}$, on donne simplement les axiomes de base, et ensuite on démontre toutes les propriétés standard : probabilité du complémentaire, d'une union, sous-additivité, probabilité d'une suite d'événements croissants/décroissants.

Montrer des événements non triviaux de probabilité 0 ou 1.

2.2. Probabilités conditionelles et indépendance. — Définition de la probabilité conditionelle. Voir que pour un événement B fixé, $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ est une mesure de probabilité sur B. Formule de Bayes, savoir faire des calculs.

Définition de l'indépendance pour une famille d'événement. Donner un exemple d'événements deux à deux indépendants mais pas indépendants.

Applications de l'indépendance d'événements. Exemples possibles : probabilité que deux entiers soient premiers entre eux, ruine du joueur, le paradoxe du singe qui tape à la machine à écrire...

Lemme de Borel-Cantelli (sans prononcer les mots limsup/liminf d'événements), par exemple appliqué à un exemple simple.

3. Variables aléatoires discrètes (4h)

3.1. Définition d'un variable aléatoire discrète, premiers exemples. — Définition d'une variable aléatoire (discrète = à valeurs dans un espace dénombrable). Loi d'une variable aléatoire, exemples classiques (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson).

3.2. Espérance, variance et moments. — Définition de l'espérance pour une v.a. discrète. Formule de transfert. Moments d'une v.a., variance d'une v.a. Calcul pour les exemples simples. Covariance. Variance d'une somme de variables aléatoires.

3.3. Indépendance de variables aléatoires. — Vecteur aléatoire. Indépendance d'une famille de v.a. Variance d'une somme de v.a. indépendantes.

3.4. Inégalités probabilistes et premières applications. — Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalité de Hölder ? Inégalité de Jensen ?

Une ou deux applications faciles, par exemple sur la position de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ après n pas (propositions plus poussées : plus grande clique d'un graphe aléatoire, collectionneur de vignettes, théorème d'approximation de Weierstrass sur $[0, 1]$ via les polynômes de Bernstein)

4. Fonction génératrice : cas de v.a. entières (2h)

4.1. Définition et propriétés. — Définition. Calcul pour les lois usuelles.

La fonction génératrice caractérise la loi (unicité du DSE). Lien entre les dérivées de la fonction génératrice et les moments, applications aux lois usuelles.

Fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.

4.2. Quelques applications. — Suggestions : temps de retour de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, processus de Galton-Watson (*).

5. Variables aléatoires réelles à densité (4h)

5.1. Définition et exemples. — Définition, loi d'une v.a. à densité. Illustration par un exemple de v.a. discrète qui converge vers une v.a. à densité (sans parler de convergence en loi, en utilisant simplement l'approximation de Riemann) : loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ renormalisée par n ; variable géométrique de paramètre $1/n$ renormalisée par n.

Exemples usuels : loi uniforme, loi exponentielle, loi Normale. Loi de Cauchy en exemple ?

Exemples plus poussés : la loi de l'arcsinus pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$; loi normale à partir de la MAS sur $\mathbb{Z}$ (via la formule de Stirling).

5.2. Fonction de répartition. — Définition et propriétés (outil général, aussi pour les v.a. discrètes). Lien avec la densité. Calcul de lois grâce à la fonction de répartition.

5.3. Espérance, variance, moments. — Espérance et variance. Formule de transfert, et application pour le calcul de lois. Inégalités probabilistes.

5.4. Indépendance de variables aléatoires. — Vecteur aléatoire. Indépendance de v.a. à densité. Somme de deux variables aléatoires indépendantes (convolution des densités).

6. Simulation de variables aléatoires (2h)

6.1. Cas de variables discrètes. — Loi de Bernoulli. Cas général. Méthodes ad-hoc : loi géométrique, loi de Poisson.

Montrer une ou deux simulations d'un problème déjà évoqué en cours : marche aléatoire simple.

6.2. Cas de variables à densité. — Méthode d'inversion de la fonction de répartition. Exemples. Méthode de rejet. Exemples.

7. Suite de variables aléatoires, convergence en probabilité (3h)

Définition de la convergence en probabilité. Quelques exemples.

7.1. La loi faible des grands nombres. — On démontrera le théorème suivant.

Théorème 7.1.1. — *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, d'espérance finie. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers $\mu := \mathbb{E}[X_1]$.*

7.2. Suggestions. — La plus longue suite de Pile consécutifs dans une suite de n Pile ou Face.

La série alternée aléatoire, $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$, où $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$.

(*) On peut donner une distance sur l'espace L_0 des variables aléatoires, qui correspond à la convergence en probabilité (utilise la convergence dominée). Pour cette distance, L_0 est complet (utilise Borel-Cantelli).

8. Un peu de statistique (3h)

– Estimateurs. Exemple de la pièce biaisée. Tests ? (si oui, cas simples).
– Intervalles de confiance non-asymptotiques (sans le TCL).
– Inégalités de concentration, pour améliorer les intervalles de confiance.

9. Chaînes de Markov à espace d'états finis (*4h)

– Définition. Classification des états. Périodicité.
– Loi stationnaire. Si chaîne irréductible et apériodique, convergence de $\mathbb{P}(X_n = x)$ vers $\pi(x)$ l'unique mesure de probabilité stationnaire.

UE de S4 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (6 ects) : Monos, Maj, DM

Version du 24 Avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — à compléter...

0.2. Objectifs. — à compléter aussi....

Remarques :
- pas de détails de mesurabilité ni de tribus
- pas d'autres mesures.

1. Bases de théorie de la mesure et mesure de Lebesgue

Dans cette section, tous les théorèmes et constructions sont admis : les détails seront vus en L3 en théorie de la mesure.

1.1. Dénombrabilité.— Définition et exemples dénombrable et non-dénombrable.

1.2. Ligne réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}_+$. — : définition et « arithmétique »

1.3. Tribu et mesure.— Définition d'une tribu et d'une mesure.

1.4. Tribu borélienne et mesure de Lebesgue.— Tribu borélienne comme plus petite tribu qui contient les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.4.1. — *(admis) Il existe une tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ qui contient tous les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^n$ et une unique mesure λ_n sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout pavé $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$,*

$$\lambda([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

1.5. Symétries de la mesure de Lebesgue. —

1.6. Exemples. — Puisque tout ce qui précède est admis, beaucoup d'exemples :
- lien avec la notion de longueur, aire, volume
- mesure des pavés ouverts
- mesure d'un point d'un segment dans $\mathbb{R}^2$, notion d'ensemble négligeable.
- mesure de différentes formes géométriques (en TD ?)

(cela permet de jouer avec la définition d'une mesure et d'une tribu sans se poser de questions existentielles)

Remarque : pas d'extension possible de la définition à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$. Difficile et requiert l'axiome du choix (ouverture vers le cours de L3).

Question 1.6.1. — Jusqu'où faut-il raisonnablement parler de $\limsup$ et $\liminf$ de suites ou d'ensembles dans ce cours ?

2. Intégration de Lebesgue

2.1. Fonctions étagées et fonctions mesurables. — Définitions. Exemple. Stabilité sous les opérations arithmétiques usuelles ainsi que par passage aux limites (cf. question précédente).

***Lemme 2.1.1* (lemme d'approximation).** — *Toute fonction mesurable positive est limite croissante de fonctions étagées*

Démonstration. — La preuve est constructive avec les bonnes combinaisons d'indicatrices. □

Question 2.1.2. — Preuve simple du fait que les fonctions continues sont mesurables ?

2.2. Intégrale d'une fonction étagée positive. — Définition. Propriétés élémentaires (sous combinaison linéaire, positivité, etc.).

2.3. Extension aux fonctions mesurables positives. —

Définition 2.3.1. — Comme sup sur les fonctions étagées plus petites.

Notion d'égalité presque partout ?

2.4. Extension aux fonctions mesurables réelles intégrables. — Notion de parties positive et négative, lien avec la valeur absolue. Définition.

2.5. Exemples. —
– intégrale de l'indicatrice des rationnels.
– intégrale des fonctions usuelles.

3. Théorème de convergences

3.1. Énoncés et preuves. —

Théorème 3.1.1. — *Beppo-Levi (facile par la définition)*

Application à l'existence de mesures à densités

Définition 3.1.1. — Mesure à densités (utile pour l'UE de probas) définies comme :

$$\mu(A) = \int_A f(x) d\lambda_n(x)$$

Théorème 3.1.2. — *Fatou ? (dur à comprendre à cause des* $\liminf$ *mais nécessaire pour preuve de conv. dominée)*

Théorème 3.1.3. — *Théorème de convergence dominée.*

Démonstration. — Preuve OK tant qu'on accepte de faire des $\liminf$ et $\limsup$. Sinon on admet et on renvoit en L3 ? ? ? □

Importance des exemples et **contre-exemples**.

3.2. Applications. —

Théorème 3.2.1. — *Interversions Σ et $\int$ pour séries à termes positives puis séries à termes réels avec intégrabilité.*

Théorème 3.2.2. — *Continuité sous $\int$ sous domination*

Théorème 3.2.3. — *Dérivabilité sous $\int$ sous dominations (preuve admise ?)*

Importance là encore des exemples et **contre-exemples**.
Remarques : énormément d'exos de TD là-dessus.

Les chapitres qui suivent sont relativement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire, même si Fourier arrivera nécessairement en dernier.

4. Lien avec l'intégrale de Riemann

Définition de l'intégrale de Riemann pour les fonctions réglées.
Coïncidence des définitions pour ces fonctions.
Différence pour les autres fonctions et les théorèmes de convergence.

5. Inégalités

– Cauchy-Schwarz (lien avec les autres UE)
– Markov et Bienaymé-Chebychev pour les mesures de probas à densités
– Hölder et définition des espaces L^p.

6. Intégrales multiples : théorèmes généraux et calculs

6.1. Espaces produits et théorèmes de Fubini. —

6.1.1. Définitions. — Notion de tribu produit pour mesure σ-finies (définition requise seulement pour l'énoncé des théorèmes de cette section).

Notion de mesure produit. On admet que $\lambda_{n+m} = \lambda_n \otimes \lambda_m$.

6.1.2. Théorèmes. —

Théorème 6.1.1. — *Théorème de Fubini-Tonelli pour les fonctions positives*

Théorème 6.1.2. — *Théorème de Fubini pour les fonctions intégrables.*

6.1.3. Exemples. —
– Multitudes d'exemples élémentaires de calcul
– Produit de convolution (important)

6.2. Formule de changement de variables. — *Ce chapitre est proche dans l'esprit du précédent dans la perspective du calcul d'intégrales multiples.*

Notion de C^1-difféomorphisme d'un ouvert vers un autre.

Théorème 6.2.1. — *(admis) Formule de changement de variable*

La preuve est beaucoup trop technique...

6.3. Exemples. —
– calcul de la normalisation de la gaussienne par passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$

7. Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$.

Passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ par découpage en parties réelle et imaginaire.

Définition 7.0.1. — Définition pour les fonctions L^1 (et L^2).

Théorème 7.0.1. — *Théorème d'inversion de la transformée de Fourier.*

Théorème 7.0.2. — *Formule de Parsevel pour les fonctions L^2.*

Théorème 7.0.3. — *Transformée de Fourier d'une convolution.*

En pratique : calculs de transformée de Fourier, lien avec les fonctions caractéristiques en probabilités.

UE de S4 Équations différentielles (6 ects) : juste Monos

Version du 24 Avril 2019

0. Prérequis et objectifs

0.1. Prérequis. — à compléter...

0.2. Objectifs. — à compléter aussi....

(1) **Introduction et motivation**
- définition et premiers exemples classiques venant de la physique,
- modélisation de phénomènes de biologie, chimie...,
- difficultés et enjeux.

(2) **Théorie générale pour les équations différentielles**
- rappels sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1,
- notion de solution intégrale, théorème de Cauchy-Lipschitz local, solutions maximales, critères d'explosion/existence locale,
- périodicité, non-croisement des solutions, Gronwall, théorème de Cauchy-Lipschitz global,
- champs de vecteurs, équation différentielle associée et courbes intégrales, pièges à solutions,
- recollement de solutions, cas des variables séparées,
- schémas d'Euler.

(3) **Équations différentielles linéaires**
- rappels sur les équations différentielle linéaires à coefficients constants d'ordre 2,
- équations différentielles linéaires à coefficients constants,
- portraits de phase dans le cas linéaire (ceci utilise les exponentielles de matrices), notions de stabilité.

Références

[LM] François Liret & Dominique Martinais, Analyse 2ème année, Dunod, 2004.

UE de S4 Programmation Python pour les mathématiques (3 ects) : juste Monos

Version du 18 mars 2019
par Julien Guillod

0. Objectifs et prérequis

Le but de cette UE n'est pas d'apprendre la syntaxe du langage Python ni ses subtilités, mais de se focaliser sur son utilisation dans différents domaines des mathématiques et de faire autant que possible le lien avec les autres UE. L'objectif est que les étudiants ayant suivi cette UE aient une bonne vision des possibilités offertes par la programmation dans le domaine des mathématiques.

Les prérequis sont essentiellement donnés par des connaissances de base du langage Python, par exemple telles qu'enseignées dans l'UE d'informatique 1I001 de L1.

Le format proposé consiste à faire pendant dix semaines dix sujets ou branches des mathématiques, tels que décrit ci-dessous. Les six semaines permettent de garder de la flexibilité en cas de pénurie de salles de TP. Le but est que les étudiants codent eux-mêmes les exercices et algorithmes. Chaque semaine commence par 1h de TD pendant laquelle les bases mathématiques et algorithmiques nécessaires aux exercices sont expliquées. Par la suite, les étudiants codent eux-mêmes les exercices proposés pendant 2h de TP sur machine. L'évaluation se ferait uniquement en contrôle continu (présence et assiduité aux TP, devoirs à rendre, TP sur machine en temps limité, ...). La dernière semaine des cours est consacrée à un TP noté de 2h sur machine. Le volume horaire est donc de 10h TD plus 22h TP.

1. Structures de données

Rappels des structures de données de bases de Python (listes, tuples, ensembles, dictionnaires).

2. Structures homogènes

Opérations sur les vecteurs et matrices (module Numpy). Représentations graphiques (matplotlib).

3. Intégration numérique

Méthodes numériques de base pour l'intégration (rectangles, trapèze, Monte-Carlo,...).

4. Théorie des graphes

Représentation du graphe par un dictionnaire, algorithme permettant de déterminer su deux sommets sont connectés ou non. Matrice d'adjacence pour calculer le nombre de triangles dans un graphe.

5. Algèbre

Décomposition LU. Méthode de la puissance itérée pour calculer la plus grande valeur propre. Groupes de permutations (représentations, orbites et stabilisateurs).

6. Zéro de fonctions

Méthode de Newton en une et plusieurs dimensions. Attracteur de la méthode de Newton pour $z^3 = 1$.

7. Probabilités et Statistiques

Illustration de la Loi de Benford (avec des données réelles du l'INSEE). Simulation de la ruine du joueur. Simulations de percolation.

8. Équations différentielles

Méthodes classiques (Euler explicite/implicite, Runge-Kutta). Application pour calculer le mouvement d'une planète en 2d dans un potentiel $V(x) = \frac{1}{\alpha}|x|^{\alpha}$.

9. Calcul symbolique

Introduction au calcul symbolique avec Sympy (simplification, différentiation, intégration, limites, développements limités). Construction graphique d'une fonction pathologique qui à l'air lisse, mais qui ne l'est pas (genre Weierstrass).

10. Cryptographie

Codage de Vigenère et utilisation du PGDC pour le casser. Génération de nombre premiers et pseudo-premiers avec Fermat. Chiffrement RSA (algorithme d'Euclide, Bézout).

UE de S4 Compléments d'analyse (6 ects) : juste Monos-Intensifs

Version du 24 avril 2019

Contenu à préciser. Il faudrait inclure le contenu du cours actuel, fait par Dario Cordero.

UE d'été (faite en juin) : Algèbre et artihmétique (6 ects) : pour les DM

Version du 24 avril 2019

Même contenu que l'UE de S3, fait en accéléré. A priori 8 séances de 2h30 de cours et autant de séances de TD, le tout sur une période de 10 jours.