Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Devoir 3 du 6 avril 2012

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **6** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (10 pts)**.** 1) (4 pts) Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 2t^2 + 4xy + 2xz + 2xt + 6yz + 2yt + 4zt.$$

Écrire q comme « somme de carrés » de formes linéaires indépendantes, et déterminer la signature et le rang de q.
2) (6 pts) Idem pour la forme quadratique $Q(x,y,z,t) = x^2 + 4z^2 + 4t^2 - 4xz - 4xt + 4yz - 6yt + 6zt$.

Exercice 2 (4 pts)**.** 1) (1 pt) Soient k un corps et $C \in M_2(k)$. Exprimer le polynôme caractéristique $P_C(X)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(C)$ et $\mathrm{dét}(C)$.

2) (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines.

Exercice 3 (8 pts)**.** 1) (5 pts) Soient $N \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Soient $X, Y, Z \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2 \leq N$; montrer que

$$(aX + bY + cZ)^2 \leq N\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

2) (3 pts) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 \leq 9$. Montrer que $(2x + y + 2z)^2 \leq 11$. Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 4 (8 pts)**.** Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

1) (3,5 pts) Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et soit $A = \begin{pmatrix} (v_1 \mid v_1) & (v_1 \mid v_2) \\ (v_2 \mid v_1) & (v_2 \mid v_2) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{dét}(A) > 0$.

Plus généralement, soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = (v_i \mid v_j)$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\mathcal{F}$, on désigne par $(\ |\ )_E$ la restriction du produit scalaire à E, et on considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et soit D la matrice de $(\ |\ )_E$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) (0,5 pt) Déterminer la matrice D.

3) (4 pts) Exprimer A en fonction de P et D. En déduire que $\mathrm{dét}(A) > 0$.

Exercice 5 (14 pts)**.** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + x_3^2 + 4x_3x_4$, et soit ϕ la forme polaire de q. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) (2 pts) Écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et déterminer le rang de ϕ.

2) (0,5 pt) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$, écrire explicitement $\phi(X, Y)$ en fonction des x_i et y_j.

Soit $t \in \mathbb{R}$, soit P_t le plan engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + e_4$ et $v_2 = 2e_2 - e_3 + te_4$ (qui sont linéairement indépendants), et soit

$$P_t^{\perp} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid \forall Y \in P_t, \quad \phi(X,Y) = 0\}.$$

3) (1,5 pts) Que vaut $\dim(P_t^{\perp})$? Justifier votre réponse en citant un résultat du cours.

4) (4 pts) Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) \\ \phi(v_2, v_1) & \phi(v_2, v_2) \end{pmatrix}$. En déduire que $v_1 \in P_t \cap P_t^{\perp}$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t on a $P_t = P_t^{\perp}$.

5) (3 pts) Déterminer explicitement un système d'équations définissant $P_t^{\perp}$, puis déterminer un vecteur w_t tel que (v_1, w_t) forme une base de $P_t^{\perp}$.

6) (3 pts) Soit $B_t \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, w_t. En faisant des opérations sur les colonnes de B_t, déterminer la dimension de $P_t + P_t^\perp$ et de $P_t \cap P_t^\perp$. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4).

Exercice 6 (6 pts)**.** Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $\|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$ la norme euclidienne associée. Soit $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbb{N}^\times$, soit $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi p t)$. On admet que :

$$(*) \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad (e_p \mid e_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q, n \in \mathbb{N}$, on pose $c_q(f) = (e_q \mid f)$ puis $S_n(f) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} c_q(f)e_q$ et $R_n(f) = f - S_n(f)$.

1) (2,5 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(e_p \mid R_n(f)) = 0$ pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$.
2) (3,5 pts) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

3) (bonus 2 pts) En utilisant l'égalité $\cos(\theta)\cos(\varphi) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta - \varphi)\big)$, démontrer la formule $(*)$.