Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Devoir 4 du 11 mai 2012

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **5** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) (2 pts) Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.
2) (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines.
3) (4 pts) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
4) (2 pts) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, et soit ϕ la forme polaire de Q. Écrire la matrice B de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis, en utilisant ce qui précède et un résultat du cours, déterminer la signature de Q.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soit $n \geq 2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : pour tout $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$,

$$Q(v) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j}x_ix_j.$$

1) (1 pt) Soit $\mathcal{C}$ la base $(f_1, \dots, f_n)$, où $f_i = (-1)^i e_i$. On note $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$. Exprimer $(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $(y_1, \dots, y_n)$, puis pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, exprimer $Q(v)$ en fonction des coordonnées $y_1, \dots, y_n$.
2) (2 pts) Soit ϕ la forme polaire de Q. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.
3) (1 pt) Écrire la matrice $B = A + 3I_n$ et déterminer son rang.
4) (2 pts) Calculer $\mathrm{Tr}(A)$. En déduire toutes les valeurs propres de A, comptées avec multiplicité.
5) (2 pts) En citant un résultat du cours, déterminer la signature de Q lorsque $n \geq 4$.
6) (2 pts) Même question lorsque $n = 3$ et $n = 2$.

Exercice 3 (8 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) (1,5 pt) Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.
2) (2 pts) Déterminer un vecteur unitaire f engendrant $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$.
3) (4,5 pts) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de u.

Exercice 4 (12 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien standard, et l'on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1) (2 pts) Montrer qu'une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v, f)$ est directe si et seulement si la base $\mathcal{C} = (f, u, v)$ est directe.

Soit $f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit R la rotation d'axe engendré et orienté par f et d'angle $\pi/6$.

2) (3 pts) Déterminer deux vecteurs unitaires u et v tels que $\mathcal{B} = (u, v, f)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
3) (3 pts) Déterminer la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(R)$.
4) (4 pts) Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(R)$

Exercice 5 (10 pts)**.** Soient $(\ \mid\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, π la projection orthogonale sur E, $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base arbitraire de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, et $G \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice $(g_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$, où pour tout i, j, on a $g_{i,j} = (v_i \mid v_j)$.

1. (2 pts) Montrer que $\mathrm{dét}(G) \neq 0$.
2. (2 pts) Pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, exprimer le vecteur $X = \begin{pmatrix} (v_1 \mid Y) \\ \vdots \\ (v_p \mid Y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ en fonction de M et Y.

3. (2 pts) D'autre part, on pose $\pi(Y) = t_1 v_1 + \cdots + t_p v_p$ et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $X = GT$.

4. (2 pts) Déduire des questions précédentes une formule exprimant T en fonction de Y, M et G.

5. (2 pts) On prend $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice G et calculer G^{-1} ; puis, prenant $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, déterminer les réels t_1, t_2 tels que $\pi(Y) = t_1 v_1 + t_2 v_2$.