Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Devoir 5 du 12 avril 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Ce devoir comporte **6** exercices et est noté sur **50**. L'exercice 4 est utilisé dans la question 4 de l'exercice 5. D'autre part, les questions 4 et 5 de l'exercice 6 utilisent l'exercice 5.

Exercice 1. (9 pts) On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien : $(X \mid Y) = {}^t\overline{X}Y = \overline{x_1}y_1+\overline{x_2}y_2+\overline{x_3}y_3$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Soient $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul, D la droite $\mathbb{C}N$ et $H = D^\perp = \{X \in \mathbb{C}^3 \mid (N \mid X) = 0\}$.

1. **(1,5 pt)** Écrire explicitement une équation de H et déterminer, en le justifiant, la dimension de H.
2. **(2 pts)** Montrer que $D \cap H = \{0\}$, puis que $\mathbb{C}^3 = D \oplus H$.

On note π_D et π_H les projections orthogonales sur D et H définies par la décomposition $\mathbb{C}^3 = D \oplus H$.

3. **(2 pts)** Pour tout $X \in \mathbb{C}^3$, écrivons $\pi_D(X) = \lambda_X N$. En justifiant votre raisonnement, exprimer λ_X en fonction de $(N \mid X)$ et $(N \mid N)$.
4. **(1 pt)** Pour tout $X \in \mathbb{C}^3$, exprimer $\pi_H(X)$ en fonction de X, N, $(N \mid X)$ et $(N \mid N)$.
5. **(2,5 pts)** Exprimer $(N \mid N)$ en fonction de a, b, c et $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ puis écrire la matrice de π_H dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 2. (3 pts) 1. **(1 pt)** Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.
2. **(2 pts)** Déterminer, en le justifiant, si A est diagonalisable ou non.

Exercice 3. (8 pts) On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien standard, défini par $(X \mid Y) = {}^t\overline{X}Y = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. **(1,5 + 0,5 = 2 pts)** En citant un résultat du cours, dire sans calcul pourquoi la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$. Que peut-on dire de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$?
2. **(2 pts)** Calculer $P_A(iX) = \text{dét}(A - iXI_3)$ et en déduire les valeurs propres de A, qu'on exprimera sous la forme $\lambda_1 = i\alpha$, $\lambda_2 = i\alpha^2$ et $\lambda_3 = i$, pour une racine de l'unité α qu'on déterminera.
3. **(2 pts)** Soit $\beta \in \{1, \alpha, \alpha^2\}$. En faisant des opérations sur les colonnes de $A - i\beta I_3$, déterminer un vecteur propre v_β de A pour la valeur propre $i\beta$.
4. **(2 pts)** Donner une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A, et écrire $\text{Mat}_\mathcal{C}(u)$, où u est l'endomorphisme associé à A.

Exercice 4. (3 pts) Soient V un k-espace vectoriel, $\phi \in \text{End}_k(V)$, $m \in \mathbb{N}^\times$ et $x \in V$ tels que $\phi^m(x) = 0$ mais $\phi^{m-1}(x) \neq 0$ (par définition, $\phi^0 = \text{id}_V$). Montrer que les vecteurs $x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{m-1}(x)$ sont linéairement indépendants. (**Indication :** Considérer une relation de dépendance linéaire $a_0x+a_1\phi(x)+\cdots+a_{m-1}\phi^{m-1}(x) = 0$; qu'obtient-on en lui appliquant ϕ^{m-1} ? Conclure en appliquant successivement ϕ^{m-1}, puis ϕ^{m-2}, etc.)

Exercice 5. (16 pts) Soient d un entier ≥ 2 et $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$. Soient P le polynôme $X^d - \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ est la « matrice compagnon » de P, i.e. $A = \text{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} \end{pmatrix}$, c.-à.-d., pour tout $j = 1, \dots, d$, on a $\boxed{u(e_j) = e_{j-1} + a_{j-1}e_d}$, avec la convention $e_0 = 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $v(t) = e_1 + te_2 + t^2e_3 + \cdots + t^{d-1}e_d = \sum_{i=1}^{d} t^{i-1}e_i$.

1. **(1 pt)** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{u(v(t)) = tv(t) - P(t)\, e_d}$.

On rappelle que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ sont des fonctions dérivables, alors la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(t)V(t)$ est dérivable et sa dérivée W' est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad W'(t) = f(t)V'(t) + f'(t)V(t). \tag{1}$$

En particulier, si V est une fonction constante, la fonction $t \mapsto f(t)V$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto f'(t)V$. Ceci entraîne que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto v(t)$ introduite précédemment est n fois dérivable, de dérivée n-ième nulle si $n \geq d$, et égale, si $n \leq d-1$, à :

$$v^{(n)}(t) = n!\left(e_{n+1} + (n+1)te_{n+2} + \cdots + \binom{d-1}{n} t^{d-1-n} e_d\right). \tag{$*$}$$

De plus, la fonction $U : t \mapsto U(t) = u(v(t))$ est n fois dérivable, pour tout entier $n \geq 1$, de dérivée

$$U^{(n)}(t) = u\big(v^{(n)}(t)\big). \tag{2}$$

On ne demande **pas** de démontrer ces formules. Enfin, on note $v'(t)$ au lieu de $v^{(1)}(t)$, et $v^{(0)}(t)$ désigne $v(t)$.

2. **(2 pts)** En utilisant la question 1 et les formules (2) et (1), montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u(v'(t)) = tv'(t) + v(t) - P'(t)\, e_d$.
3. **(2 pts)** En procédant par récurrence sur i, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^\times$ on a $u(v^{(i)}(t)) = tv^{(i)}(t) + iv^{(i-1)}(t) - P^{(i)}(t)\, e_d$.

On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine d'ordre m de P, pour un certain entier m tel que $1 \leq m \leq d$. On pose $v_0(\lambda) = v(\lambda)$ et, pour $i = 1, \ldots, m-1$, on pose $v_i(\lambda) = \dfrac{1}{i!} v^{(i)}(\lambda)$.

4. **(1,5 + 1,5 = 3 pts)** Pour $i = 0, \ldots, m-1$, exprimer $u(v_i(\lambda))$ en fonction de $v_i(\lambda)$ et $v_{i-1}(\lambda)$ (avec la convention que $v_{-1}(\lambda) = 0$). Puis, en utilisant l'exercice 4, montrer que la famille $\mathcal{C}(\lambda) = (v_0(\lambda), \ldots, v_{m-1}(\lambda))$ est libre.

On suppose que $P(X) = \displaystyle\prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j}$, avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ et $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $j \neq k$.

5. **(2 pts)** Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. En utilisant la question 4, montrer que les vecteurs $v_i(\lambda_j)$, pour $i = 0, \ldots, m_j - 1$, appartiennent à l'espace caractéristique $V_{(\lambda_j)}$, puis que celui-ci est de dimension $\geq m_j$.
6. **(3 pts)** On admet que $P_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Alors, en citant un théorème du cours, montrer que $\dim V_{(\lambda_j)} = m_j$ pour tout $j = 1, \ldots, r$ et que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\lambda_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}(\lambda_r)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.
7. **(1,5 pt)** En utilisant la question 4, écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$. (La présenter sous la forme d'une matrice diagonale par blocs, dont on détaillera, par exemple, le bloc $J(\lambda_1)$ correspondant à λ_1.)
8. **(1,5 pt)** Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est $(-1)^d P(X)$. (Ceci peut se déduire de la question précédente, ou bien se montrer par un calcul matriciel direct.)

Exercice 6. (11 pts) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et soit n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ tel que $n(e_1) = 0$ et $n(e_j) = e_{j-1}$ pour $j = 2, \ldots, d$.

1. **(2 pts)** Pour tout $j = 1, \ldots, d$, calculer $n^2(e_j)$ puis, en procédant par récurrence sur r, calculer $n^r(e_j)$ pour tout $r = 1, 2, \ldots, d$.
2. **(2 pts)** Écrire les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de $n, n^2, \ldots, n^{d-1}$ puis écrire la matrice $E(t)$ de $\exp(t\, n)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme $\lambda \mathrm{id} + n$ de $\mathbb{R}^d$. On note $D = \lambda I_d$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(n)$, et l'on pose $J = D + N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

3. **(2 pts)** En justifiant soigneusement les étapes, calculez $\exp(tJ)$.

Comme dans l'exercice 5, soient A la matrice compagnon du polynôme $P = (X - \lambda)^d$, $\mathcal{C} = (v_0(\lambda), \ldots, v_{d-1}(\lambda))$ la base de $\mathbb{R}^d$ introduite dans la question 4 de l'exercice 5 et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, de sorte que $J = Q^{-1}AQ$. On rappelle que la fonction $M : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ définie par $\boxed{M(t) = Q\exp(tJ)}$ est dérivable, de dérivée $M'(t) = QJ\exp(tJ)$.

4. **(1 pt)** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M'(t) = AM(t)$.
5. **(2 pts)** En utilisant la définition des $v_i(\lambda)$ et la formule $(*)$ de l'exercice 5, écrire la première ligne de Q puis la première ligne $L_1(t)$ de la matrice $M(t)$.
6. **(2 pts)** En reprenant une démonstration du cours, montrer que, pour $i = 2, \ldots, d$, la i-ième ligne de $M(t)$ égale $L_1^{(i-1)}(t)$, i.e. que $M(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_1'(t) \\ L_1''(t) \\ \vdots \\ L_1^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}$.