Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Examen du 15 mai 2013 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **5** exercices et est noté sur **50**.

Dans les exercices 1 et 2, $(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire sur E. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. On oriente E par le choix de $\mathcal{B}$. *Pour déterminer un angle θ, on se contentera en général de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$; toutefois, si $\pm 2\cos(\theta) \in \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$, on donnera θ sous la forme $\pm p\pi/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^\times$.*

Exercice 1. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{6}y + \sqrt{3}z \\ \sqrt{6}x - y - \sqrt{2}z \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \le i \le j \le 3$, montrer que $A \in O(3)$.
3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.
4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.
5. (1 pt) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis sa projection orthogonale u sur $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.
6. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 2. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2x - 2y + z \\ x - 2y - 2z \\ -2x + y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \le i \le j \le 3$, montrer que $A \in O(3)$.
3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.
4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.
5. (1 pt) Que peut-on dire de l'ensemble des points fixes de f ?
6. (2,5 pts) Déterminer un point fixe I de f, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 3. (5 pts) Soit $u \in M_{11}(\mathbb{R})$ un endomorphisme nilpotent tel que $\mathrm{rang}(u) = 7$, $\mathrm{rang}(u^2) = 4$, $\mathrm{rang}(u^3) = 2$ et $u^4 = 0$.

1. (2 pts) Déterminer la partition $\mathbf{q}$ associée à la suite des noyaux de u et dessiner son diagramme.
2. (1 pt) Déterminer la partition transposée $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$.
3. (2 pts) Écrire la matrice de la forme normale de Jordan de u.

Dans les exercices 4 et 5, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs, on notera X, Y les vecteurs colonnes représentant x et y dans la base $\mathcal{B}$. Toute matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ définit un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S$ et *l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ par cet endomorphisme sera simplement notée Sx* (le vecteur colonne correspondant est SX). Enfin, on rappelle que le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est défini par $(x \mid y) = {}^tXY$.

Exercice 4. (17 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard et l'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle.

1. (1,5 pt) En citant un théorème du cours, montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice $S = {}^tAA$.

Notant λ_i la valeur propre associée à f_i, on suppose que $\boxed{\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n}$.

2. (1 pt) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $(Ax \mid y) = (x \mid {}^tAy)$.

3. (1,5 pt) Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que $(Af_i \mid Af_j) = \lambda_j (f_i \mid f_j)$. En déduire que $(Af_i \mid Af_j) = 0$ si $i \neq j$ et que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i.

Soit r le plus grand entier tel que $\lambda_r > 0$ (et donc $\lambda_j = 0$ pour $j > r$). Pour $i = 1, \ldots, r$, posons $v_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Af_i$.

4. (2 pts) Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et que la famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_r)$ est orthonormée. En déduire que $r = \mathrm{rang}(A)$.
5. (1,5 pt) Montrer que $\mathcal{F}$ se complète en une base orthonormée $\mathcal{D} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. **Indication :** considérer l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. *On pourra admettre le résultat de cette question pour continuer l'exercice.*
6. (2 pts) Pour tout $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, écrire Av dans la base $\mathcal{D}$ et exprimer $\|Av\|^2$ en fonction des x_i et des λ_i, pour $i = 1, \ldots, r$.
7. (1 pt) Soit $d \in \{1, \ldots, r\}$. Déduire de la question précédente que si $v \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_d)$, on a $\|Av\|^2 \geq \lambda_d \|v\|^2$.

On fixe un entier positif $s < r$. Soit u_s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $u_s(f_i) = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$ si $i \leq s$, et $u_s(f_i) = 0$ si $i > s$. Soit $A_s = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_s)$.

8. (1 pt) Déterminer, en le justifiant, le rang de A_s.
9. (1,5 pt) Pour tout $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, montrer que $\|(A - A_s)v\|^2 \leq \lambda_{s+1} \displaystyle\sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 \leq \lambda_{s+1} \|v\|^2$.
10. (2 pts) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{rang}(B) \leq s$. D'une part, montrer que le sous-espace $E = \mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{s+1})$ est non nul. D'autre part, montrer que pour tout $v \in E$ on a : $\|(A - B)v\|^2 \geq \lambda_{s+1} \|v\|^2$.
11. (2 pts) Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ on pose $|||M||| = \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$, ceci définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (on ne demande **pas** de démontrer cela). Montrer que pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ de rang $\leq s$, on a $|||A - B||| \geq \sqrt{\lambda_{s+1}}$, puis montrer que $\sqrt{\lambda_{s+1}} = |||A - A_s|||$.

Exercice 5. (8 pts) Soient ϕ et ϕ' deux formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$. On note $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $S' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi')$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. *On suppose que ϕ est non dégénérée.*

1. (2 pts) Dans cette question uniquement, on suppose qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ et $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi')$ soient toutes deux diagonales. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Exprimer S, S', puis $S^{-1}S'$, en fonction de P et de D et D', et en déduire que $S^{-1}S'$ est diagonalisable.

On note $(\ \mid\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

2. (1 pt) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $(x \mid Sy) = \phi(x, y) = (Sx \mid y)$ et $(x \mid S'y) = \phi'(x, y) = (S'x \mid y)$.

Désormais, on suppose que $A = S^{-1}S'$ est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et pour $i = 1, \ldots, r$ soit $V_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$, alors $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.

3. (1 pt) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer en utilisant la question précédente que $\phi(Ax, y) = \phi'(x, y) = \phi(x, Ay)$.
4. (2 pts) Soient $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ et soient $x \in V_i$ et $y \in V_j$. En utilisant la question précédente, montrer que si $i \neq j$, alors $\phi(x, y) = 0 = \phi'(x, y)$ et si $i = j$ alors $\phi'(x, y) = \lambda_i \phi(x, y)$.

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note ϕ_i (resp. ϕ'_i) la restriction de ϕ (resp. ϕ') à V_i.

5. (2 pts) En utilisant la question 4, montrer que $\phi'_i = \lambda_i \phi_i$ pour tout i, puis montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi')$ soient toutes deux diagonales. **Indication :** considérer dans chaque V_i une base orthogonale pour ϕ_i.