Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Examen 2ème session du 5 juin 2013 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **7** exercices et est noté sur **50**. Les exercices 1 à 6 sont indépendants ; l'exercice 7 utilise l'exercice 6.

Exercice 1. (4,5 pts) En utilisant l'algorithme de Gauss, écrire les formes quadratiques ci-dessous comme « somme de carrés » de formes linéaires indépendantes et déterminer leur signature.

1. (2,5 pts) q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x, y, z) = 2xy + 3xz + 5yz$.
2. (2 pts) Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $Q(t, x, y, z) = t^2 + x^2 + y^2 + 2tx + 2ty + 4xy + 3xz + 5yz$.

Exercice 2. (9,5 pts) Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension 3. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire sur E. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans ce repère. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}y - \sqrt{2}z \\ -\sqrt{2}x + y - z \\ -\sqrt{2}x - y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.
2. (1 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \leq i \leq j \leq 3$, montrer que $A \in O(3)$.
3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.
4. (2 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.
5. (2 pts) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis l'écrire $T = v + u$, avec $u \in P = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $v \in P^{\perp}$.
6. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 3. (7 pts) Déterminez s'il existe un endomorphisme nilpotent u de $\mathbb{R}^{12}$ vérifiant les conditions 1. ou 2. ci-dessous : donnez une justification en cas de réponse négative (2 pts), et en cas de réponse positive, déterminez la matrice de la forme normale de Jordan de u (4 pts) puis montrez que u vérifie bien les conditions données (1 pt).

1. $\mathrm{rang}(u) = 9$, $\mathrm{rang}(u^2) = 5$, $\mathrm{rang}(u^3) = 2$, $u^4 = 0$.
2. $\mathrm{rang}(u) = 8$, $\mathrm{rang}(u^2) = 5$, $\mathrm{rang}(u^3) = 2$, $\mathrm{rang}(u^4) = 1$, $u^5 = 0$.

Exercice 4. (7 pts) Soit $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2)$ un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui est orthonormée. On note (x_1, x_2) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{C}_\lambda = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{P} \mid x_2^2 + (1 - \lambda)x_1^2 - 2x_1 = 0\}$.

1. (0,5 pt) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_2^2 + (1 - \lambda)x_1^2$, et soit ϕ sa forme polaire. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
2. (1,5 pt) Déterminer en fonction de λ la nature de $\mathcal{C}_\lambda$ (ellipse, parabole ou hyperbole).
3. (1,5 pt) Quand $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole (resp. ellipse), écrire son équation sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (resp. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$), où $Y = x_2$ et $X = x_1 - t$ avec $t \in \mathbb{R}$ à préciser, et donner dans chaque cas les valeurs de a, b.
4. (1 pt) Quand $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole, donner, en fonction de X et Y, les équations des deux asymptotes de $\mathcal{C}_\lambda$.
5. (2,5 pts) Quand $\mathcal{C}_\lambda$ est une ellipse, déterminer la valeur λ_0 pour laquelle $\mathcal{C}_{\lambda_0}$ est un cercle, dont on donnera l'équation en fonction de X et Y. Puis, pour $\lambda \neq \lambda_0$, donner les coordonnées (X, Y) de chacun des 4 sommets de l'ellipse et déterminer quel est le grand axe (axe focal) de $\mathcal{C}_\lambda$ (on distinguera les cas $\lambda > \lambda_0$ et $\lambda < \lambda_0$).

Exercice 5. (7,5 pts) Soient $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ la base canonique, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, π la projection orthogonale sur E, $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base arbitraire de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soient $\phi = (\ |\ )_E$ la restriction de $(\ |\ )$ à E et $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$, d'où $G = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, avec $g_{i,j} = (v_i \mid v_j)$.

1. (1,5 pt) Soient $\mathcal{C}_0$ une base <u>orthonormée</u> de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{C})$. Exprimer G en fonction de P, et en déduire que $\mathrm{dét}(G) > 0$.
2. (1,5 pt) À tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ on associe le vecteur $X = \begin{pmatrix} (v_1 \mid Y) \\ \vdots \\ (v_p \mid Y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. En le justifiant, exprimer X en fonction de M et Y.

3. (2 pts) On pose $\pi(Y) = t_1v_1 + \cdots + t_pv_p$. En calculant $(v_i \mid \sum_{j=1}^{p} t_jv_j)$, pour $i = 1, \ldots, p$, montrer que $X = GT$, où $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$.
4. (1 pt) Déduire des questions précédentes une formule exprimant T en fonction de Y, M et G.
5. (1,5 pt) On prend $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice G et calculer G^{-1} ; puis, prenant $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, déterminer les réels t_1, t_2 tels que $\pi(Y) = t_1v_1 + t_2v_2$.

Exercice 6. (7 pts) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E(\lambda)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire $\boxed{u_n - \lambda u_{n+1} + u_{n+2} = 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (1,5 pt) Sous quelle condition sur λ existe-t-il $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbb{C}$ tels que les deux suites géométriques $\underline{\alpha} = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\underline{\beta} = (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $E(\lambda)$? Déterminer dans ce cas $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$.

On suppose la condition précédente vérifiée et l'on fixe un entier $N \geq 2$. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on rappelle que $z^0 = 1$, et si $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), on note $\mathcal{I}m(z) = b$ sa partie imaginaire.*

2. (1,5 pt) Montrer que $E_0(\lambda) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\lambda) \mid u_0 = 0\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, et en donner un générateur qu'on exprimera en fonction de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.
3. (2,5 pts) Sous quelle condition sur α et β a-t-on $v_{N+1} = 0$ pour toute suite $v \in E_0(\lambda)$? Déterminer dans ce cas les couples possibles (α, β), en prenant $\mathcal{I}m(\alpha) > 0 > \mathcal{I}m(\beta)$, et les valeurs possibles pour λ. (On trouvera N couples (α_k, β_k), pour $k = 1, \ldots, N$, donnant N valeurs distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$).
4. (1,5 pt) On fixe $k \in \{1, \ldots, N\}$ et l'on rappelle que $\mathcal{I}m(\alpha_k) > 0 > \mathcal{I}m(\beta_k)$. Soit $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de $E_0(\lambda_k)$ tel que $x_{k,1} = \dfrac{\alpha_k - \beta_k}{2i}$ (où $i^2 = -1$) ; écrire explicitement le vecteur $X_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

Exercice 7. (7,5 pts) Soient N un entier ≥ 2 et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R})$, i.e. les coefficients juste au-dessus et en-dessous de la diagonale valent 1, et tous les autres sont nuls. Par ailleurs, on note $(\ \mid\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^N$, défini par $(X \mid Y) = {}^tXY$.

1. (1 pt) Citer un théorème du cours qui assure que A est diagonalisable dans $M_N(\mathbb{R})$.
2. (3 pts) Pour $k = 1, \ldots, N$, soient λ_k et $X_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ comme dans les questions 6.3 et 6.4. En écrivant le système $(A - \lambda_k I_N) \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N} \end{pmatrix} = 0$ et en utilisant l'exercice 6, montrer que X_k est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_k. En déduire que A a N valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ que l'on précisera.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^N$ définie par $q(x_1, \ldots, x_N) = 2 \sum_{i=1}^{N-1} x_ix_{i+1}$, et soit ϕ sa forme polaire.

3. (0,5 pt) Écrire la matrice B de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
4. (1,5 + 1,5 = 3pts) En utilisant les questions précédentes déterminer, en le justifiant, la signature de q lorsque $N = 2p$ est pair, et lorsque $N = 2p + 1$ est impair.