Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Examen du 7 juin 2011 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **7** exercices indépendants et est noté sur **75**.

Exercice 1 (8pts)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, i.e. les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent -1, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$.

1. (2 pts) En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.
2. (5 pts) Quelle est la forme générale des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant cette relation de récurrence linéaire $u_n = bu_{n-1} + cu_{n-2}$? En utilisant les valeurs $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$ en déduire, en résolvant un système linéaire, une formule exacte donnant la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (1 pt) Calculer D_8 et D_9.

Exercice 2 (9 pts)**.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 1 \\ 1-t & 2t-1 & -1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 & t-1 \\ -1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. (3 + 2 = 5 pts) Calculer en fonction de t le rang et le déterminant de A_t.
2. (4 pts) Lorsque $\text{rang}(A_t) < 4$, donner une base de $\text{Im}(A_t)$ et de $\text{Ker}(A_t)$.

Exercice 3 (13 pts)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, et P le polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. (3 pts) Écrire la matrice $A - XI_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, puis en développant par rapport à la 1ère colonne, montrer que le polynôme caractéristique de A est :
$$P_A(X) = (-1)^n\big(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\big).$$
2. (5 pts) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P (on ne demande pas de calculer λ). En utilisant le calcul précédent (remplaçant X par λ), montrer que l'espace propre $V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension 1 et en donner une base.
3. (5 pts) Écrivons $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Déduire de la question précédente la forme normale de Jordan de A. *Indication* : que peut-on dire de la dimension de l'espace propre V_λ, si les blocs de Jordan pour λ sont $J_{h_1}(\lambda), \dots, J_{h_p}(\lambda)$?

Exercice 4 (8pts)**.** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^5$ définie par $q(x, y, z, t, u) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 2xy + 4xz - 4xt + 4yz - 4yt - 5zt + 2zu + tu$. Écrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature et le rang de q.

Exercice 5 (13 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ définie par : pour tout point $M = (x, y, z)$, les coordonnés (x', y', z') du point $M' = f(M)$ sont

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z \\ -2\sqrt{2}x + y - 4z \\ -2\sqrt{2}x - 4y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 pt) Soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f})$.
2. (1,5 pts) Citer un théorème du cours assurant que les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux et de somme égale à $\mathbb{R}^3$.
3. (4,5 pts) Montrer d'autre part que $A \in O(3)$. Que peut-on dire alors de ses valeurs propres ? Déterminer une base de chaque espace propre.
4. (1 pt) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $\overrightarrow{f}$.
5. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points I tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et, pour tout $I \in \mathscr{P}$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{If(I)}$.
6. (2,5 pts) Déterminer, en le justifiant, la nature et les caractéristiques géométriques de f.

Exercice 6 (12 pts)**.** Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, E sa direction, et O un point fixé de $\mathscr{E}$. On note H l'ensemble des applications affines $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ dont la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une homothétie de E de rapport $\neq 0$.

1. (1,5 pts) Montrer, en citant un résultat du cours, que tout $f \in H$ est inversible.
2. (1,5 pts) Si $f \in H$ et $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ montrer, en utilisant la relation de Chasles, que $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$ pour tout $M \in \mathscr{E}$. Quelle est alors la nature de f ?
3. (2 pts) Si $f \in H$ et $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 1$, montrer que f possède un point fixe I unique. (On cherchera I tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{Of(I)}$.) Dans ce cas, on dit que f est l'homothétie de centre I et de rapport λ.
4. (2 pts) Si $f, g \in H$, montrer que $g \circ f \in H$ et $f^{-1} \in H$. (Donc H est un groupe, appelé le groupe des homothéties et translations de $\mathscr{E}$).
5. (1,5 pts) On prend $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$, où O est le point $(0,0)$ et (e_1, e_2) la base canonique. Soient f_1 (resp. f_2, resp. f_3) l'homothétie de centre $A = (1,0)$ et de rapport 2 (resp. centre $B = (0,1)$ et rapport $1/2$, resp. centre $C = (1,1)$ et rapport -1). Pour tout point $M = (x,y)$, déterminer les coordonnées (x_1, y_1) (resp. (x_2, y_2), resp. (x_3, y_3)) du point $M_1 = f_1(M)$ (resp. de $M_2 = f_2(M)$, resp. $M_3 = f_3(M)$).
6. ($1 + 2 = 3$ pts) On pose $f' = f_2 \circ f_1$ et $f'' = f_3 \circ f_1$. Déterminer les coordonnées (x', y') du point $M' = f'(M)$, et celles (x'', y'') du point $M'' = f''(M)$, puis les caractéristiques géométriques de f' et de f'', c.-à.-d., selon le cas, le centre et le rapport, ou bien le vecteur de translation.
7. (1 pt) A-t-on $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$?

Exercice 7 (12 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère le cône $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Soit A le point $(0,1,1)$ de Γ. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note P_λ le plan vectoriel engendré par e_1 et $e_3 + \lambda e_2$, et $\mathscr{P}_\lambda$ le plan affine $A + P_\lambda$.

1. (0,5 pt) Donner un vecteur u_λ tel que (e_1, u_λ) soit une BON de P_λ.
2. (1 pt) Pour tout point M de $\mathscr{P}_\lambda$, de coordonnées (x,t) dans le repère (A, e_1, u_λ) de $\mathscr{P}_\lambda$, déterminer les coordonnées de M dans le repère canonique $\mathscr{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.
3. (1,5 pts) Soit $\mathscr{C}_\lambda = \mathscr{P}_\lambda \cap \Gamma$. Écrire l'équation de $\mathscr{C}_\lambda$ sous la forme $q(x,t) + \alpha x + \beta t = k$, où q est une forme quadratique et α, β, k des réels que l'on déterminera. Désormais, on suppose $\lambda \neq 1$.
4. (3 pts) Pour quelles valeurs de λ, $\mathscr{C}_\lambda$ est-elle une parabole, resp. une hyperbole, resp. une ellipse ? Lorsque $\mathscr{C}_\lambda$ est une parabole, écrire son équation sous la forme $x^2 = 2pt$, pour un réel p qu'on déterminera.
5. (5 pts) Lorsque $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole ou une ellipse, écrire son équation sous la forme $\dfrac{T^2}{a^2} \pm \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, où $T = t + \mu$, pour des réels μ, a, b que l'on déterminera (avec $a, b > 0$). Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ avec les droites d'équation $T = 0$ ou $x = 0$.
6. (1 pt) Soit P le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2. Déterminer l'intersection de Γ avec le plan affine $A + P$.