Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Examen 2ème session du 29 juin 2012 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **6** exercices et est noté sur **75**

Exercice 1 (10 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 2z = 1$ et soient P la direction de $\mathcal{P}$ et σ la partie linéaire de s.

1. (4 pts) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P, puis choisir un point $I \in \mathcal{P}$ et pour tout point $M = (x, y, z)$ calculer le vecteur $\overrightarrow{Is(M)}$ puis déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$.

Soit t_w la translation de vecteur $w = 3e_2$ et soit $g = t_w \circ s$.

2. (2 pts) Déterminer les projections orthogonales v et u de w sur $D = P^\perp$ et P respectivement.
3. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de g.

Exercice 2 (14 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. (1 pt) Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/6$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.
2. (1 pt) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.
3. (2 pts) Écrire la matrice $B = RA$, montrer que $B \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(B)$.
4. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (L'angle à trouver θ n'est pas, a priori, de la forme $q\pi$, avec $q \in \mathbb{Q}$; pour le déterminer on se contentera de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)
5. (1 pt) Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B + I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente (on ne cherchera pas à calculer explicitement les f_i). Pour $i = 1, 2, 3$, exprimer Bf_i dans la base $\mathcal{C}$.
6. (3 pts) Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ comme dans la question précédente, et pour $i = 1, 2, 3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)
7. (2 pts) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR = R^{-1}BR$.

Exercice 3 (12 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. (3 pts) Soit $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.
2. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui envoie tout point $M = (x, y, z)$ sur le point $M' = (x', y', z')$, où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. (1 pt) Quelle est la partie linéaire de g ?
4. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de g. (Soient $w = 2e_1 + 2e_2$, π_D la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, et $u = \pi_D(w)$, on pourra chercher les points fixes de $t_{-u} \circ g$, où t_{-u} désigne la translation de vecteur $-u$).

Exercice 4 (15 pts). 1. (3 pts) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\alpha A + \beta I_p$ est diagonalisable et exprimer ses valeurs propres en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A.

2. (1,5 pt) Soient $n \in \mathbb{N}^\times$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :
$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = 2(x_1x_{n+1} + x_2x_{n+2} + \cdots + x_nx_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} 2\, x_i\, x_{n+i},$$
et soit ϕ la forme polaire de q. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
3. (2 pts) On suppose dans cette question que $n = 1$. Écrire dans ce cas la matrice A et déterminer ses valeurs propres et une base orthonormée (f, g) de vecteurs propres.
4. (3 pts) On revient au cas n arbitraire. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ associé à A et, pour $i = 1, \dots, n$, soit P_i le plan de $\mathbb{R}^{2n}$ engendré par e_i et e_{n+i}. Montrer que P_i est stable par u et, en utilisant la question précédente, construire une base orthonormée (f_i, g_i) de P_i formée de vecteurs propres de A. Puis écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer ainsi les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ de A (comptées avec multiplicité).
5. (1,5 pt) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha > 0$, soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :
$$Q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \beta\, x_i^2 + \alpha\, q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \beta\, x_i^2 + 2\,\alpha\,(x_1x_{n+1} + x_2x_{n+2} + \cdots + x_nx_{2n}),$$
et soit ψ sa forme polaire. Écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$.
6. (4 pts) En utilisant la question 1), déterminer en fonction des valeurs de β la signature de Q (on rappelle que $\alpha > 0$). On indiquera en particulier dans quels cas Q est dégénérée.

Exercice 5 (12 pts). Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fixée, soit $b \in \mathbb{R}^\times$ et soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 2\,b\,x_{n+1} + b^2\,x_n = c_n\}$.

1. (3 pts) Expliquer par une phrase que $\mathcal{E}_c$ est non vide, puis montrer que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$, et déterminer sa direction E.
2. (3 pts) Déterminer $\dim(E)$, puis montrer que la suite géométrique $u = (b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $v = (nb^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.
3. (2 pts) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $a_0 = 1$ et $a_1 = 2b$, et soit $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_n = a_0\,c_{n-2} + a_1\,c_{n-3} + \cdots + a_{n-2}c_0 = \sum_{i=0}^{n-2} a_i\,c_{n-2-i} = \sum_{i=0}^{n-2} a_{n-2-i}\,c_i$$
(en particulier, on a $C_0 = 0 = C_1$). Sans chercher à calculer la suite a, montrer que C appartient à $\mathcal{E}_c$.
4. (1 pt) Écrire l'élément $a \in E$ de la question précédente comme combinaison linéaire des suites u et v de la question 2), puis donner une formule exprimant a_n en fonction de b.
5. (1,5 pt) On prend $c_i = (i+1)\,b^{i+2}$ pour tout i. On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$. Donner alors une formule exprimant $C_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} a_i\,c_{n-2-i}$ en fonction de b.
6. (1,5 pt) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de $\mathcal{E}_c$ tel que $x_0 = b$ et $x_1 = b^2$. Écrire $w = x - C$ comme combinaison linéaire des suites u et v de la question 2), puis donner une formule exprimant x_n en fonction de b.

Exercice 6 (12 pts). On admet que, pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\exp({}^tB) = {}^t\exp(B)$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A qui sont antisymétriques (i.e. ${}^tA = -A$).

1. (3 pts) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer, en le justifiant soigneusement, que $\exp(A) \in O(n)$.
2. (3 pts) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On admet que la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \text{dét}(\exp(tA))$ est continue. En utilisant ceci, montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}(n)$.
3. (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par A. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer les valeurs propres de A et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A, puis écrire les matrices $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.
4. (3 pts) Calculer P^{-1} puis, en utilisant que $P^{-1}\exp(tA)P = \exp(tA')$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$ et montrer que c'est la matrice d'une rotation que l'on précisera.