Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Examen du 8 juin 2012 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **6** exercices et est noté sur **75**

Exercice 1 (11 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = 1$ et soient P la direction de $\mathcal{P}$ et σ la partie linéaire de s.

1. (5 pts) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P, puis choisir un point $I \in \mathcal{P}$ et pour tout point $M = (x, y, z)$ calculer le vecteur $\overrightarrow{Is(M)}$ puis déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$.

Soit t_w la translation de vecteur $w = 3e_2$ et soit $g = t_w \circ s$.

2. (2 pts) Déterminer les projections orthogonales v et u de w sur $D = P^\perp$ et P respectivement.
3. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de g.

Exercice 2 (14 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. (1 pt) Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/4$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.
2. (1 pt) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathrm{SO}(3)$.
3. (2 pts) Écrire la matrice $B = RA$ et montrer que $B \in \mathrm{SO}(3)$.
4. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (On déterminera l'angle θ par la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)
5. (4 pts) Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1} = B'$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B - I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente. Pour $i = 1, 2, 3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)
6. (2 pts) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR$. (On pourra remarquer que $C = R^{-1}BR$.)

Exercice 3 (16 pts)**.** Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $e_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et soit D_θ la droite vectorielle $\mathbb{R}e_\theta$. (Noter que $e_{\theta+\pi} = -e_\theta$, de sorte que $D_{\theta+\pi} = D_\theta$.) On note σ_θ la symétrie orthogonale par rapport à D_θ et l'on rappelle que, pour tous θ, φ, la composée $\sigma_{\theta+\varphi} \circ \sigma_\varphi$ est la rotation d'angle 2θ.

1. (2 pts) Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de σ_0, puis de σ_θ pour θ arbitraire.

On note $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 2. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, on note $t_v : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur v. On note $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$ (sa partie linéaire est la symétrie orthogonale σ_D, où D est la direction de $\mathcal{D}$).

2. (3 pts) Soient D une droite vectorielle, A un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ la droite affine $A + D$. Soient $v \in D^\perp$. Montrer que $s_{\mathcal{D}} \circ t_{-v}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $\mathcal{D}' = t_{v'}(\mathcal{D}) = A + v' + D$, pour un $v' \in D^\perp$ que l'on déterminera en fonction de v.

On fixe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, on note D la droite vectorielle D_φ, et l'on fixe deux points $A, I \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AI} \in D^\perp$. Soit $r = r(I, \theta)$ la rotation de centre I et d'angle θ, soit $s = s_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D} = A + D$, soit t_u la translation de vecteur u, et soit $f = r \circ s \circ t_u$.

3. (1 pt) Sans faire de calculs, dire quelle est la nature géométrique de f.
4. (3 pts) En utilisant les questions précédentes, montrer, en faisant un minimum de calculs, que $f = s_{I+D_\psi} \circ t_w$, pour un angle ψ que l'on exprimera en fonction de φ et θ et un vecteur w que l'on exprimera en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et u.

On prend $\boxed{\varphi = \pi/6 = \theta, \quad I = (1,1), \quad A = (2, 1-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad u = -2\sqrt{3}e_2.}$

5. (2 pts) Vérifier que $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à la droite $D = D_{\pi/6}$. Puis, pour tout point $M = (x, y)$, déduire de la question précédente les coordonnées (x', y') du point $M' = f(M)$.
6. (5 pts) (Peut se faire indépendamment des questions précédentes.) On prend φ, θ, I, A, u comme ci-dessus. Pour tout $M = (x, y)$, déterminer par des calculs directs le point $t_u(M)$, puis les vecteurs $\overrightarrow{Ast_u(M)}$, $\overrightarrow{Ist_u(M)}$ et $\overrightarrow{If(M)}$, et enfin les coordonnées (x', y') de $f(M)$.

Exercice 4 (13 pts). Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. On note V_1 (resp. V_2) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{C}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ (resp. $\mathcal{C}_2 = (e_{n+1}, \dots, e_{2n})$), de sorte que $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2$.

1. (3 pts) Soient $S_1, S_2 \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles et S la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c} S_1 & 0 \\ \hline 0 & S_2 \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Pour $i = 1, 2$, soit ϕ_i la forme bilinéaire symétrique sur V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(\phi_i) = S_i$, et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = S$. On note (p_i, q_i) la signature de ϕ_i pour $i = 1, 2$; exprimer la signature de ϕ en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2. (Indication : pour $i = 1, 2$, considérer une base $\mathcal{D}_i$ de V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}_i}(\phi_i)$ soit diagonale.)
2. (3 pts) Soit $J = J_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de J et montrer que J est diagonalisable.
3. (2 pts) On fixe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < 0 < \mu$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :
$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda)\, x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2\, x_i x_j + \sum_{i=n+1}^{2n} (1+\mu)\, x_i^2 + \sum_{n+1 \le i < j \le 2n} 2\, x_i x_j$$
et soit ϕ sa forme polaire. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
4. (5 pts) En utilisant les questions précédentes, déterminer en fonction des valeurs de λ et μ la signature de q. (On indiquera en particulier dans quel cas q est dégénérée.)

Exercice 5 (11 pts). Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite fixée, et soit
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = c_n\}.$$

1. (3 pts) Montrer que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$, et déterminer sa direction E.
2. (3 pts) Déterminer $\dim(E)$ et une base $\mathcal{B}$ de E formée de suites géométriques.
3. (1 pt) Soit $a \in \mathbb{R}^\times$ tel que $a^2 - a - 2 \neq 0$. On prend pour c la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ tel que la suite μc appartienne à $\mathcal{E}_c$ (i.e. tel qu'on ait $\mu a^{n+2} - \mu a^{n+1} - 2\mu a^n = a^n$ pour tout n).
4. (4 pts) On prend $a = 1$, i.e. c est la suite telle que $c_n = 1$ pour tout n. Soit alors μ comme dans la question précédente, et soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'unique élément de $\mathcal{E}_c$ tel que $x_0 = 3/2$ et $x_1 = 1/2$. Exprimer $w = x - \mu c$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, puis donner une formule pour la valeur de x_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6 (10 pts). Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, J_A sa forme normale de Jordan, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$, où u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par A.

1. (4 pts) On suppose que $J = J_A$ est formée d'un unique bloc de Jordan. Montrer alors que J est semblable à sa transposée ${}^tJ$. (Indication : considérer la base $\mathcal{D} = (f_n, \dots, f_1)$.)
2. (6 pts) Pour A arbitraire, montrer que A est semblable à sa transposée ${}^tA$. (Utiliser J_A et adapter le raisonnement de la question précédente au cas où J_A est formée de plusieurs blocs de Jordan $B_1, \dots, B_r$.)