Université Pierre et Marie Curie 2009–2010

LM270, Travaux encadrés No. 2

Exercice 1 ($4{\times}2 = 8$pts)**.** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$? Dans chaque cas, justifiez votre réponse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ($4{+}2 = 6$pts)**.** Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$? Dans chaque cas, justifiez votre réponse.

Exercice 3 (22pts)**.** (5 pts pour le polynôme caractéristique, 5pts pour chaque vecteur propre, 2 pts pour la matrice de passage) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation choisie.

Exercice 4 (10pts)**.** Calculez le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 16 & 1 & 4 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 5 ($5 + 5 = 10$pts)**.** Soit k un corps. Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, on définit sa trace $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (somme des coefficients diagonaux).

1. Soient $A, B \in M_n(k)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Soient $A, A' \in M_(k)$ des matrices semblables. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

Exercice 6 ($5 + 2 + 8 = 15$pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est de rang 1, puis déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$. (5 pts)
2. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$; en déduire que A est diagonalisable. ($2 + 8 = 10$pts)

Exercice 7 (15 pts)**.** Soit $(e_1, \ldots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{C}^5$. L'endomorphisme u de $\mathbb{C}^5$ défini par $u(e_i) = e_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, 4$, $u(e_5) = e_1$, est-il diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Exercice 8 ($6 + 8 = 14$pts)**.** Soient V un k-espace vectoriel de dimension n, E, F deux sous-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_r)$ une base de F. Soit $E + F$ le sous-espace vectoriel de V engendré par E et F, et soit π la projection de $E + F$ sur l'espace quotient $(E + F)/E$.
1) Montrer que $\pi(f_1), \ldots, \pi(f_r)$ engendrent $(E + F)/E$.
2) On note i l'inclusion $F \hookrightarrow E + F$. Montrer que $\pi \circ i$ est surjective et déterminer son noyau.