Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, TE2b Groupes 4,5,6 (25/3/2011)
Noté sur 75

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Exercice 1 (52 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ associé à A. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

1. (5 pts) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
2. (5 pts) Pour chaque racine λ de $P_A(X)$ donner, **sans calculs** et en citant un résultat du cours, la dimension de l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.
3. (10 pts) Pour chaque racine λ de $P_A(X)$, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)$ puis, si nécessaire, de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)^2$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)^3$, etc.
4. (4 pts) Déterminer la forme normale de Jordan J_A de A.
5. (5 + 4 = 9 pts) Plus précisément, pour chaque racine λ de $P_A(X)$, donner une base $\mathcal{C}_\lambda$ de $V_{(\lambda)}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ réunion des $\mathcal{C}_\lambda$, égale J_A. **Indication :** on prendra $v_1 = (A + I_5)(e_1)$ et v_5 un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda \neq -1$. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis déterminer P^{-1} (exprimer les vecteurs e_j en fonction des vecteurs v_i).
6. (1 + 2 + 4 = 7 pts) Soit s l'endomorphisme égal à $\lambda\mathrm{id}$ sur chaque espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ de u et soit S sa matrice dans la base $\mathcal{C}$. Écrire la matrice $N = J_A - S$ et calculer N^2 puis $\exp(tN)$ et $\exp(tJ_A)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
7. (4 + 3 + 2 = 9 pts) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad X'(t) = A \cdot X(t).$$

   Soit $\mathcal{C}$ la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de la question 5. On définit les fonctions $(y_1(t), \dots, y_5(t))$ par l'égalité $X(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2 + \cdots + y_5(t)v_5$ et l'on pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}.$$

   Exprimer $Y(t)$ en fonction de $X(t)$ et P, puis la dérivée $Y'(t)$ en fonction de $X'(t)$ et P. Montrer que $Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$ pour une matrice B que l'on déterminera, puis calculer $\exp(tB)$ et exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$, puis en fonction de $X(0)$.
8. (3 pts) On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur $Y(100)$.

Exercice 2 (23 pts)**.** Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n.

1. (3 + 4 = 7 pts) Soient $f \in \mathrm{End}_k(V)$, λ une valeur propre de f, V_λ l'espace propre et $V_{(\lambda)}$ l'espace caractéristique associés. Si $g \in \mathrm{End}_k(V)$ commute à f (i.e. $f \circ g = g \circ f$), montrer que $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.
2. (8 pts) Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_N\}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux (i.e. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout i, j). Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{F}$ est diagonale. **Indication :** considérer d'abord le cas où tous les f_i sont des homothéties ; puis, si f_1 n'est pas une homothétie, considérer les espace propres de f_1 et procéder par récurrence sur $n = \dim V$.
3. (6 + 2 = 8 pts) On prend $k = \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}(V)$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable (on rappelle que pour tout élément g d'un groupe fini G de cardinal N, g^N égale l'élément neutre de G), puis qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de G est diagonale.