Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Devoir du 23 mars 2010 (groupes 4,5,7,8,9)

Pour les exercices demandant un calcul, détaillez les étapes du calcul ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. Par ailleurs, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte 5 exercices et est noté sur 75.

On rappelle qu'on note $E_{ij} \in M_n(k)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1.

Exercice 1 (6+6=12pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(A)$ et de $\operatorname{Im}(A)$.

Exercice 2 (30pts)**.**

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (2pts)
2. Soit $B = E_{21} + E_{32} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer B^2 et B^3, puis en utilisant la formule du binôme, calculer $(I_3 + B)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5+0,5+2pts)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$. (5pts)
4. Soit $N = A - I_3$. Montrer que $N^3 = 0$ et déterminer $\operatorname{Ker}(N^2)$. (5pts)
5. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, montrer que si $v \notin \operatorname{Ker}(N^2)$ alors $\mathcal{C} = (v, Nv, N^2v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (5pts)
6. Choisissez explicitement un v comme ci-dessus, écrivez la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{C}$ et calculez P^{-1}. (1+4pts)
7. Calculer A^{21}. (5pts)

Exercice 3 (3+3+6=12pts)**.**

1. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$ et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 7} \in M_7(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = 3$ si $j \neq \tau(i)$ et $a_{i\tau(i)} = 1$ pour tout i. En utilisant la formule donnant $\text{dét}(A)$, montrez que $\text{dét}(A)$ est congru modulo 3 à $\varepsilon(\tau)$.

Exercice 4 (6pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(e_1, e_1) = a$, $\phi(e_2, e_2) = c$, $\phi(e_1, e_2) = \phi(e_2, e_1) = b$. Pour tout $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$, exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de a, b, c et x_1, x_2, y_1, y_2. (2pts)
2. (2+2pts) Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$, le rang et le noyau des formes bilinéaires symétriques ϕ_1 et ϕ_2 sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\phi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2(x_1y_2 + x_2y_1), \qquad \phi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Exercice 5 (15pts)**.** Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. (0,5+1pts)
2. Soit $A = (a_{pq})_{1 \leq p,q \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer pour tout i, j que $\operatorname{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$. En déduire que ϕ est non-dégénérée. (4+1pts)
3. Soit F (resp. G) le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires supérieures strictes). Montrer que F et G sont orthogonaux pour ϕ. (5pts)
4. Quelles sont les dimensions de G et $F^\perp$? Qu'en concluez-vous ? (0,5+2,5+0,5pts)