Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, TE3b Groupes 4,5,6 (29/4/2011)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte 6 exercices et est noté sur 60

Exercice 1 (10pts)**.** Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (2 pts) Soit q la forme quadratique associée. Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Exercice 2 (12pts)**.** Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (2 pts) Soit q la forme quadratique associée. Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. (8 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Exercice 3 (4 + 4 pts)**.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + \sqrt{3}x_2 + \sqrt{5}x_3 + \sqrt{7}x_4 + \sqrt{9}x_5|}{5} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 4 (10 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ et soit w le vecteur $\begin{pmatrix} p^2 - q^2 \\ 2pq \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. (3 pts) Calculer $\|w\|$ et déterminer un vecteur u de norme 1 orthogonal à $v = \dfrac{1}{\|w\|} w$.
2. (1 + 6 pts) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $F = \mathbb{R}u$. Écrire la matrice de s dans la base $\mathcal{C} = (u, v)$, puis dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Exercice 5 (10 pts)**.** On admet que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.

1. (2 pts) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\exp(A) \in O(n)$.
2. (5 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ considérée comme élément de $M_3(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer $P_A(X)$ et une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, calculer son inverse P^{-1}, et déterminer sans calcul la matrice $D = P^{-1}AP$. *Indication* : pour le calcul de P^{-1}, on pourra utiliser le fait que l'inverse d'une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ inversible est la matrice $\begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}$.

3. (3 pts) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tD)$ puis écrire $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$ comme une matrice à coefficients réels (on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$).

Exercice 6 (10 pts)**.** Pour tout $n \geq 2$, on considère la matrice $n \times n$ suivante, à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c.-à.-d., les coefficients diagonaux valent 3, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 1, ceux juste en-dessous de la diagonale valent 2, et les autres sont nuls. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$.

1. Calculer D_2 et D_3.
2. En développant D_n par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = aD_{n-1} - bD_{n-2}$, pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ que l'on déterminera. En utilisant cette formule, calculer D_4, D_5 et D_6.
3. Les calculs précédents vous suggèrent-ils une formule pour la valeur de D_n ? Si oui, démontrer cette formule par récurrence sur n.