Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Devoir 4a du 18 mai 2010 (groupes 4,5,7,8,9)

Ce devoir comporte 5 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1 (20 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Pour chaque matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez une base orthonormée de vecteurs propres, ou bien montrez qu'il n'en existe pas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (20 pts)**.** Soient $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère du plan affine $\mathcal{P}$ et (x, y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_0$. Soient $a \in \mathbb{R}$, A le point de coordonnées $(0, a)$, et $\mathcal{D}_a$ la droite affine de direction $\mathbb{R}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ passant par A. On note (X, Y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a = (A, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$.

1. Exprimer (x, y) en fonction de (X, Y), et (X, Y) en fonction de (x, y).
2. Soit f la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_a$ parallèlement à la droite $A + \mathbb{R}(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ et (X, Y) dans $\mathcal{R}_a$, déterminer les coordonnées (X', Y') puis (x', y') de $f(M)$.
3. Soit $t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, et soit $g = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} \circ f$. Déterminer a pour que $g(O)$ soit le point I de coordonnées $(5, 7)$ dans $\mathcal{R}_0$.
4. Vérifier votre résultat en calculant $g(I)$.

Exercice 3 (16 pts)**.**

1. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + 2y + 5z)^2 \leq 30$; dans quel cas a-t-on $(x + 2y + 5z)^2 = 30$?
2. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq 17/10$; dans quel cas a-t-on $(x + y + z)^2 = 17/10$?

Exercice 4 (20pts)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z + 2 \\ x \\ y - 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa nature.
3. Déterminer l'ensemble des points $I \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$, et calculer dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{If(I)}$. Quelle est la nature de f ?

Exercice 5 (24 pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Si $M \in \mathcal{P}$, on écrira $M(x, y)$ pour indiquer que (x, y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est **convexe** si elle vérifie : pour tous points $A, B \in \mathcal{C}$, le **segment**

$$[A, B] = \{tA + (1 - t)B \mid t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans $\mathcal{C}$. Si $A \neq B$, on notera $]A, B[$ le **segment ouvert**

$$]A, B[\, = \{tA + (1 - t)B \mid t \in \,]0, 1[\,\} = [A, B] - \{A, B\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est convexe, on dit qu'un point $P \in \mathcal{C}$ est un **point extrémal** s'il vérifie : pour tous $A \neq B$ dans $\mathcal{C}$, $P \notin \,]A, B[$.

1. Soit $C = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1\}$. Montrer que C est convexe.
2. Faire un dessin représentant C. Déterminer les points extrémaux de C.
3. Soit $\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y^2 \leq 2x\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe. Faire un dessin représentant $\mathcal{C}$.
4. Soient $A(a, b)$ et $B(p, q)$ deux points distincts de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout $P(x, y) \in \,]A, B[$, on a $y^2 < 2x$.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{E}$?