Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Devoir 4b du 19 mai 2010 (groupes 2,3,10)

Ce devoir comporte 5 exercices et est noté sur 100.

Exercice 1 (20 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Pour chaque matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez une base orthonormée de vecteurs propres, ou bien montrez qu'il n'en existe pas :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (20 pts)**.** Soient $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et (x, y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_0$. Soient A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathcal{R}_1$ le repère $(A, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$, et (X, Y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_1$.

1. Exprimer (x, y) en fonction de (X, Y), et (X, Y) en fonction de (x, y).
2. Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $\mathcal{D}_1$ d'équation $x - y = 1$. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ et (X, Y) dans $\mathcal{R}_1$, déterminer les coordonnées (X', Y') puis (x', y') de $M' = \sigma(M)$.
3. Soit $t_{\overrightarrow{w}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et soit $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ \sigma$. Déterminer l'ensemble des points $I \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
4. Montrer que f est une symétrie orthogonale glissée, dont on déterminera l'axe $\mathcal{D}$ et le vecteur de translation $\overrightarrow{u}$.

Exercice 3 (16 pts)**.** Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz$.

1. Montrer que Q est définie positive.
2. Calculer $Q(1, 1, 1)$.
3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $Q(x, y, z) \le 1$. Montrer que $(-x + y + 2z)^2 \le 2$; dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 4 (20pts)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x, y, z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa nature.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de ϕ et de f.

Exercice 5 (24 pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Si $M \in \mathcal{P}$, on écrira $M(x, y)$ pour indiquer que (x, y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est **convexe** si elle vérifie : pour tous points $A, B \in \mathcal{C}$, le **segment**

$$[A, B] = \{tA + (1 - t)B \mid t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans $\mathcal{C}$. Si $A \neq B$, on notera $]A, B[$ le **segment ouvert**

$$]A, B[= \{tA + (1 - t)B \mid t \in]0, 1[\} = [A, B] - \{A, B\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est convexe, on dit qu'un point $P \in \mathcal{C}$ est un **point extrémal** s'il vérifie : pour tous $A \neq B$ dans $\mathcal{C}$, $P \notin]A, B[$.

1. Soit $T = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le 1\}$. Montrer que T est convexe.
2. Faire un dessin représentant T. Déterminer les points extrémaux de T.
3. Soit $\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe. Faire un dessin représentant $\mathcal{C}$.
4. Soient $A(a, b)$ et $B(p, q)$ deux points distincts de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout point $P(x, y) \in]A, B[$, on a $(x^2/4) + y^2 < 1$.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{E}$?