Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé du devoir 1 du 24 février 2012

Exercice 1 (13 pts)**.** Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t & 2t \\ t & t^2+t & t^2 & t^2+t \\ 0 & t-1 & 2 & t-1 \\ t & 2t & t^2+t & 3t^2-t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, le rang de A_t et une base de $\mathrm{Im}(A_t)$ et de $\mathrm{Ker}(A_t)$.

Solution : Écrivons la matrice identité I_4 au-dessus de A_t, et faisons les mêmes opérations sur les colonnes des deux matrices :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & t & 2t \\ t & t^2+t & t^2 & t^2+t \\ 0 & t-1 & 2 & t-1 \\ t & 2t & t^2+t & 3t^2-t \end{array}\right) \xrightarrow[C_4\to C_4-2tC_1]{\substack{C_2\to C_2-2C_1 \\ C_3\to C_3-tC_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -t & -2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & t^2-t & 0 & -t^2+t \\ 0 & t-1 & 2 & t-1 \\ t & 0 & t & t^2-t \end{array}\right) \xrightarrow{C_4\to C_4+C_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -t & -2t-2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & t(t-1) & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 2 & 2(t-1) \\ t & 0 & t & t(t-1) \end{array}\right) \xrightarrow{C_4\to C_4+(1-t)C_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -t & t^2-3t-2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & t^2-t & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 2 & 0 \\ t & 0 & t & 0 \end{array}\right)$$

Si $t(t-1) \neq 0$, c.-à.-d., si $t \neq 0, 1$, alors les colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ t(t-1) \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix} = (t-1)\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes, car échelonnées, donc forment une base de $\mathrm{Im}(A_t)$; dans ce cas, $\mathrm{rang}(A_t) = 3$ et $\mathrm{Ker}(A_t)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $v_t = \begin{pmatrix} t^2-3t-2 \\ 1 \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $t = 1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

donc $\mathrm{rang}(A_1) = 2$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Im}(A_1)$, et les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ une base de $\mathrm{Ker}(A_1)$. Enfin, si $t = 0$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3\to C_3+2C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc $\mathrm{rang}(A_0) = 2$, les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Im}(A_0)$, et les vecteurs $\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $v_0 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ une base de $\mathrm{Ker}(A_0)$.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3 & 4\\1 & -1 & 3 & 0\\-1 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Calculer A^{-1} en effectuant des opérations sur les colonnes ou bien les lignes.

Solution : Écrivons la matrice identité I_4 au-dessus de A, et faisons les mêmes opérations sur les colonnes des deux matrices :

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 1&-1&2&1\\2&-1&3&4\\1&-1&3&0\\-1&2&-1&-2\end{array}\right) \xrightarrow[C_4\to C_4-C_1]{\substack{C_2\to C_2+C_1\\C_3\to C_3-2C_1}} \left(\begin{array}{cccc}1&1&-2&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\2&1&-1&2\\1&0&1&-1\\-1&1&1&-1\end{array}\right) \xrightarrow[C_4\to C_4-2C_2]{C_3\to C_3+C_2} \left(\begin{array}{cccc}1&1&-1&-3\\0&1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&0&1&-1\\-1&1&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_4\to C_4+C_3} \left(\begin{array}{cccc}1&1&-1&-4\\0&1&1&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\\hline 1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&0&1&0\\-1&1&2&-1\end{array}\right) \xrightarrow[C_1\to C_1-C_4]{\substack{C_3\to C_3+2C_4\\C_2\to C_2+C_4}} \left(\begin{array}{cccc}5&-3&-9&-4\\1&0&-1&-1\\-1&1&3&1\\-1&1&2&1\\\hline 1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right) \xrightarrow[C_1\to C_1-C_3]{C_4\to -C_4} \left(\begin{array}{cccc}14&-3&-9&4\\2&0&-1&1\\-4&1&3&-1\\-3&1&2&-1\\\hline 1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_1\to C_1-2C_2} \left(\begin{array}{cccc}20&-3&-9&4\\2&0&-1&1\\-6&1&3&-1\\-5&1&2&-1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

. Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix}20&-3&-9&4\\2&0&-1&1\\-6&1&3&-1\\-5&1&2&-1\end{pmatrix}$. Vérifions ce résultat en calculant :

$$\begin{pmatrix}20&-3&-9&4\\2&0&-1&1\\-6&1&3&-1\\-5&1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&-1&3&4\\1&-1&3&0\\-1&2&-1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. (3 pts) Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^*$ s'annule-t-elle sur P ?

Solution : Comme tout élément v de P s'écrit $v = \lambda v_1 + \mu v_2$, on voit d'abord que f s'annule sur P si et seulement si $f(v_1) = 0$ et $f(v_2) = 0$. Puis, comme $f(v_1) = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4$ et $f(v_2) = a_2 + a_3 + a_4$, la condition pour que f s'annule sur P est :

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 = 0\\ a_2 + a_3 + a_4 = 0\end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} a_1 + a_2 = 0\\ a_2 + a_3 + a_4 = 0\end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_2 = -a_1\\ a_4 = -a_2 - a_3 = a_1 - a_3.\end{cases}$$

2. (4 pts) Déterminer une base $(f_1, \ldots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.

Solution : Le système linéaire précédent montre que $P^\perp$ est de dimension 2 (ce qui résulte aussi du cours, §1.3) et qu'une base de $P^\perp$ est donnée, par exemple, par les formes linéaires suivantes, obtenues pour $(a_1, a_3) = (1, 0)$ et $(a_1, a_3) = (0, 1)$: $f_1 = e_1^* - e_2^* + e_4^*$ et $f_2 = e_3^* - e_4^*$. Ceci équivaut à dire que P est défini par les équations $x_1 - x_2 + x_4 = 0$ et $x_3 - x_4 = 0$.

3. (3 pts) Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\psi = e_1^* + e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace $E = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 = \psi(v)\}$ de V.

Solution : Un vecteur $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ appartient à E si et seulement si l'on a : $0 = \phi(v) = x_1 + x_2 - x_3$ et $0 = \psi(v) = x_1 + x_4$, c.-à.-d., si et seulement si $x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = -x_1$. Donc $\dim(E) = 2$ (ce qui résulte aussi du §1.3 du cours), et une base de E est donnée par les deux vecteurs suivants, obtenus pour $(x_1, x_2) = (1, 0)$ et $(x_1, x_2) = (0, 1)$: $w_1 = e_1 + e_3 - e_4$, $w_2 = e_2 + e_3$.

Exercice 4 (11 pts)**.** Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

1. (4 pts) Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{C}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est linéaire, puis montrer que ϕ est injective et surjective. En déduire la dimension de E.

Solution : Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ a pour terme général $u_n + \lambda v_n$, d'où

$$\phi(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = (u_0 + \lambda v_0, u_1 + \lambda v_1) = (u_0, u_1) + \lambda(v_0, v_1) = \phi(\mathbf{u}) + \lambda\phi(\mathbf{v}).$$

Ceci montre que ϕ est linéaire. D'autre part, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ car si $\phi(\mathbf{u}) = (0, 0)$, c.-à.-d., si $u_0 = 0 = u_1$, alors la relation de récurrence donne $u_2 = 0$, puis $u_3 = 0$, etc. d'où $\mathbf{u} = 0$. Ceci montre que ϕ est injective. Enfin, ϕ est surjective, car les deux premiers termes de tout élément de E peuvent être choisis arbitrairement. Donc ϕ est une application linéaire bijective, i.e. un isomorphisme, donc $\dim(E) = \dim(\mathbb{C}^2) = 2$. (Et une base de E est donnée par les deux suites α et β dont les deux premiers termes sont respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$.)

2. (1 pt) Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que la suite géométrique $\mathbf{u} = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à E.

Solution : La suite géométrique $\mathbf{u} = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si on a $\lambda^{n+2} + 4\lambda^{n+1} + 4\lambda^n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mettant en facteur λ^n, qui est $\neq 0$ par hypothèse, ceci équivaut à $0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, c.-à.-d., $\lambda = -2$.

3. (2 pts) Soit $\mathbf{v}$ la suite définie par $v_n = n\lambda^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{v}$ appartient à E.

Solution : Il faut voir que $(n + 2)\lambda^{n+2} + 4(n + 1)\lambda^{n+1} + 4n\lambda^n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, on a :

$$(n + 2)\lambda^{n+2} + 4(n + 1)\lambda^{n+1} + 4n\lambda^n = n\lambda^n(\lambda^2 + 4\lambda + 4) + 2\lambda^{n+2} + 4\lambda^{n+1}$$

et l'on sait déjà que le 1er terme est nul. Le 2ème terme égale $2\lambda^{n+1}(\lambda + 2)$, donc est nul puisque $\lambda = -2$. Donc $\mathbf{v} \in E$.

4. (2 pts) Montrer que les suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont linéairement indépendantes. Que peut-on en déduire ?

Solution : Soient $x, y \in \mathbb{C}$ tels que $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = 0$. Alors, prenant les deux premiers termes, on obtient le système :

$$\begin{cases} x \times 1 + y \times 0 & = 0 \\ x \times (-2) + y \times (-2) & = 0 \end{cases}$$

d'où $x = 0 = y$. Ceci montre que les suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont linéairement indépendantes. Comme $\dim(E) = 2$, elles forment donc une base de E.

5. (2 pts) Soit $\mathbf{w}$ l'élément de E défini par $w_0 = 2$ et $w_1 = -2$. Exprimer $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, puis donner une formule explicite pour la valeur de w_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : D'après la question précédente, $\mathbf{w}$ s'écrit de façon unique $\mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$, avec $x, y \in \mathbb{C}$. Prenant les deux premiers termes, on obtient le système :

$$\begin{cases} x \times 1 + y \times 0 & = w_0 = 2 \\ x \times (-2) + y \times (-2) & = w_1 = -2 \end{cases}$$

d'où $x = 2$ et $y = -1$. Donc $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, d'où $w_n = (2 - n)(-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (6 pts)**.** Pour chacune des permutations suivantes, déterminer l'écriture comme produit de cycles de supports disjoints, puis la signature :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 9 & 8 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution : Écrivons d'abord ces permutations comme produit de cycles de supports disjoints. Notant $i \to j$ pour signifier que j est l'image de i, on a pour σ :

$$1 \to 6 \to 3 \to 8 \to 1 \qquad 2 \to 5 \to 7 \to 2 \qquad 4 \to 9 \to 4$$

donc σ est le produit du 4-cycle $c_4 = (1638)$, du 3-cycle $c_3 = (257)$, et de la transposition $t = (49)$. Comme la signature d'un r-cycle est $(-1)^{r-1}$, on obtient que $\varepsilon(\sigma) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1$.
Pour τ, on a

$$1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 8 \to 1 \qquad 2 \to 4 \to 9 \to 2 \qquad 7 \to 7$$

(7 est un point fixe de τ), donc τ est le produit du 5-cycle $c_5 = (16358)$ et du 3-cycle (249), et donc $\varepsilon(\tau) = 1 \cdot 1 = 1$.