Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé du partiel du 23 mars 2012

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{C}^6$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^6$ défini par $u(e_i) = -e_{i+2}$ pour $i = 1, \ldots, 4$ et $u(e_5) = -e_1$ et $u(e_6) = -e_2$, c.-à.-d., qui envoie $e_{i \bmod 6}$ sur $-e_{i+2 \bmod 6}$.

1) (2 pts) Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique $P_u(X)$ (ce qui n'est pas facile ...), montrer que $Q(u) = 0$, pour un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé sans racines multiples, que l'on déterminera.

Solution : Pour tout i, on a $u^2(e_{i \bmod 6}) = u(-e_{i+2 \bmod 6}) = e_{i+4 \bmod 6}$ puis $u^3(e_{i \bmod 6}) = u(e_{i+4 \bmod 6}) = -e_{i+6 \bmod 6}$ d'où $u^3 = -\mathrm{id}$. Il en résulte que u est annulé par le polynôme $Q(X) = X^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$, qui possède trois racines distinctes : -1 et

$$\xi = \exp(2i\pi/6) = \exp(i\pi/3) = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\xi^5 = \xi^{-1} = \exp(-2i\pi/6) = \exp(-i\pi/3) = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) (1 pt) u est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en citant un résultat du cours.

Solution : u est annulé par un polynôme scindé sans racines multiples, donc u est diagonalisable.

3) (1 pt) Si λ est une valeur propre de u, montrer que $Q(\lambda) = 0$.

Solution : Soit λ une valeur propre de u et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Comme $u(x) = \lambda x$, on a $u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda^2 x$, etc. et donc $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. En particulier, pour $P = Q$ on a $0 = Q(u)(x) = Q(\lambda)x$, d'où $Q(\lambda) = 0$.

4) (2,5 pts) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\alpha^3 = -1$. Soit $v_\alpha = \alpha^2 e_1 - \alpha e_3 + e_5$, calculer $u(v_\alpha)$; que constate-t-on ? Donner un vecteur w_α appartenant à l'espace propre $V_\alpha = \mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{id})$, linéairement indépendant de v_α.

Solution : On a
$$u(v_\alpha) = -\alpha^2 e_3 + \alpha e_5 - e_1 = \alpha^3 e_1 - \alpha^2 e_3 + \alpha e_5 = \alpha v_\alpha$$
donc v_α est un vecteur propre pour la valeur propre α. Posons $w_\alpha = \alpha^2 e_2 - \alpha e_4 + e_6$; on obtient de même que
$$u(w_\alpha) = -\alpha^2 e_4 + \alpha e_6 - e_2 = \alpha^3 e_2 - \alpha^2 e_4 + \alpha e_6 = \alpha w_\alpha,$$
donc $w_\alpha \in V_\alpha$. Enfin, il est clair que v_α et w_α sont linéairement indépendants.

5) (3,5 pts) Déterminer une base de chaque espace propre de u.

Solution : D'après ce qui précède, on a $\dim(V_\alpha) \geq 2$ pour chacune des trois racines α de X^3+1 (i.e. $\alpha = -1, \xi, \xi^{-1}$). Comme les espaces propres sont en somme directe, on a donc
$$2 + 2 + 2 \leq \dim V_{-1} + \dim V_\xi + \dim V_{\xi^{-1}} = \dim(V_{-1} \oplus \dim V_\xi \oplus \dim V_{\xi^{-1}}) \leq \dim(\mathbb{C}^6) = 6.$$
Il en résulte que les deux inégalités ci-dessus sont des égalités, donc d'une part
$$V = V_{-1} \oplus V_\xi \oplus V_{\xi^{-1}}$$
i.e. $-1, \xi, \xi^{-1}$ sont les seules valeurs propres de u, et d'autre part $\dim V_\alpha = 2$ pour tout α, et donc (v_α, w_α) est une base de V_α.

Exercice 2 (14 pts)**.** Dans $M_3(\mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1) (1 pt) Calculer AB et BA. Que constate-t-on ?

Solution : On a
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

On constate donc que $AB = BA$, i.e. A, B commutent.

2) (2 pts) Montrer que $P_A(X) = -(X-\lambda)(X-\mu)^2$ et $P_B(X) = -(X-\alpha)(X-\beta)^2$, pour des réels $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ que l'on déterminera.

Solution : On a, en retranchant la 2ème ligne de la 1ère, puis en ajoutant la 1ère colonne à la 2ème :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -2 & 2 \\ -2 & -X & 2 \\ -3 & -3 & 5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X+2 & -2+X & 0 \\ -2 & -X & 2 \\ -3 & -3 & 5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X+2 & 0 & 0 \\ -2 & -2-X & 2 \\ -3 & -6 & 5-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)\begin{vmatrix} -2-X & 2 \\ -6 & 5-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-3X+2) = -(X-1)(X-2)^2$$

ou en ajoutant la 2ème colonne à la 3ème, puis en retranchant la 3ème ligne de la 2ème :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -2 & 2 \\ -2 & -X & 2 \\ -3 & -3 & 5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & -2 & 0 \\ -2 & -X & 2-X \\ -3 & -3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & -2 & 0 \\ 1 & 3-X & 0 \\ -3 & -3 & 2-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)\begin{vmatrix} -X & -2 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-3X+2) = -(X-1)(X-2)^2.$$

De la même manière :

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 3 & 3 & -4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 1+X & 0 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 3 & 3 & -4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 2 & 3-X & -2 \\ 3 & 6 & -4-X \end{vmatrix}$$
$$= (-1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 6 & -4-X \end{vmatrix} = (-1-X)(X^2+X) = -X(X+1)^2$$

ou :

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 3 & 3 & -4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ 2 & 1-X & -1-X \\ 3 & 3 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ -1 & -2-X & 0 \\ 3 & 3 & -1-X \end{vmatrix}$$
$$= (-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & -2-X \end{vmatrix} = (-1-X)(X^2+X) = -X(X+1)^2.$$

3) (2 pts) Calculer $(A-\lambda I_3)(A-\mu I_3)$ et $(B-\alpha I_3)(B-\beta I_3)$. En citant un résultat du cours, montrer que A et B sont diagonalisables.

Solution : $(A-I_3)(A-2I_3)$ égale :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même $B(B+I_3)$ égale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi A (resp. B) est annulé par le polynôme scindé sans racines multiples $(X-1)(X-2)$ (resp. $X(X+1)$), et est donc diagonalisable.

4) (1,5 pts) En utilisant les calculs de la question précédente, donner un vecteur non nul $v \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I_3)$, et déterminer le vecteur Bv.

Solution : Des calculs de la question précédente, on déduit que le vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre $\operatorname{Ker}(A-I_3)$ (qui est de dimension 1) et que $Bv = 0$. Or $\operatorname{Ker}(B)$ est aussi de dimension 1, d'où $\operatorname{Ker}(A-I_3) = \operatorname{Ker}(B)$.

5) (2,5 pts) Montrer sans calculs supplémentaires que $(A-\mu I_3)(A-\lambda I_3) = 0$. En déduire deux vecteurs formant une base de l'espace propre $V_\mu(A) = \operatorname{Ker}(A-\mu I_3)$. Déterminer de même une base de l'espace propre $V_\beta(B) = \operatorname{Ker}(B-\beta I_3)$. A-t-on $V_\mu(A) = V_\beta(B)$?

Solution : Comme les matrices $(A - I_3)$ et $(A - 2I_3)$ commutent (les polynômes en A commutent entre eux), on déduit de la question 2) que

$$0 = (A - 2I_3)(A - I_3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ (qu'on vérifie aisément être linéairement indépendants) forment une base de l'espace propre $V_2(A) = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ (qu'on sait être de dimension 2, car A est diagonalisable). De même

$$0 = (B + I_3)B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ forment donc également une base l'espace propre $V_{-1}(B) = \operatorname{Ker}(B + I_3)$. D'où l'égalité $V_2(A) = V_{-1}(B)$

Plus généralement, soient $u, v \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ deux endomorphismes **diagonalisables** qui commutent.

6) (2,5 pts) Soient μ une valeur propre de u et $E = \operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})$. Montrer que $v(E) \subset E$; soit $v_E : E \to E$ la restriction de v à E, montrer que v_E est diagonalisable. (Indications : Que peut-on dire du polynôme minimal Q de v ? Considérer alors l'endomorphisme $Q(v_E)$.).

Solution : Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})$; comme v commute avec u et id, on a

$$(u - \mu\,\mathrm{id})(v(x)) = \big((u - \mu\,\mathrm{id}) \circ v\big) = \big(v \circ (u - \mu\,\mathrm{id})\big)(x) = v\big(\underbrace{(u - \mu\,\mathrm{id})(x)}_{=0}\big) = 0$$

ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})$. Remarque. On montre de même que tout espace caractéristique de u est stable par v, cf. le cours.

D'autre part, on a vu en cours que la restriction v_E de v à $E = \operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})$ est diagonalisable. L'énoncé proposait une autre démonstration : comme v est diagonalisable, alors son polynôme minimal Q est scindé et sans racines multiples. Comme $Q(v) = 0$, on a *a fortiori* $Q(v)(x) = 0$ pour tout $x \in E$, d'où $Q(v_E) = 0$. Donc v_E est annulé par un polynôme scindé sans racines multiples, donc est diagonalisable.

7) (2,5 pts) On suppose de plus que $P_v(X) = (\alpha - X)(\beta - X)^{n-1}$ et $P_u(X) = (\lambda - X)^d(\mu - X)^{n-d}$ pour un certain $d \in \{1, \dots, n-1\}$, avec $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et que $\operatorname{Ker}(v - \alpha\,\mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$. Que peut-on alors dire des valeurs propres de la restriction v_E de v à l'espace propre $E = \operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})$? En déduire que $\operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker}(v - \beta\,\mathrm{id})$. Enfin, si $d = 1$, montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(v - \beta\,\mathrm{id})$.

Solution : Comme u est diagonalisable, on a

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\operatorname{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id})}_{=E} \bigoplus \underbrace{\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})}_{=F}$$

et d'après la question précédente, la restriction v_E de v à E est diagonalisable. Bien sûr, les valeurs propres de v_E sont parmi celles de v, à savoir α et β. Or α n'est pas une valeur propre de v_E, puisque l'espace propre $\operatorname{Ker}(v - \alpha\,\mathrm{id})$ est contenu dans F, et $F \cap E = (0)$. Donc β est la seule valeur propre de v_E, et puisque v_E est diagonalisable, on a donc $v_E = \beta\,\mathrm{id}_E$, d'où $E \subset \operatorname{Ker}(v - \beta\,\mathrm{id})$.

Enfin, on sait que $\dim(\operatorname{Ker}(v - \beta\,\mathrm{id})) = n - 1$ et $\dim(E) = n - d$, donc si $d = 1$ on a l'égalité $E = \operatorname{Ker}(v - \beta\,\mathrm{id})$.

Exercice 3 (12 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

1) (2 pts) Calculer $P_A(X)$ et montrer que $P_A(X) = -(X - \lambda)^2\,(X - \mu)^3$ pour deux réels λ, μ que l'on déterminera.

Solution : Comme A est triangulaire par blocs, on a :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & -1-X & 0 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -4-X & 3 \\ -6 & 5-X \end{vmatrix}.$$

D'une part, $\begin{vmatrix} -4-X & 3 \\ -6 & 5-X \end{vmatrix} = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ et d'autre part :

$$\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & -1-X & 0 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = -(X+1)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} = -(X+1)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2$$

d'où $P_A(X) = -(X+1)^2(X-2)^3$.

2) (3,5 pts) Soit $C = A - \mu I_5$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(C)$ en faisant des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{I_5}{C}\right)$ pour arriver à un couple de matrices $\left(\frac{Q}{C' = CQ}\right)$, puis déterminer une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(C)$ dans $\mathrm{Ker}(C^2)$ en calculant CC' et en faisant, si nécessaire, des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{Q}{CC'}\right)$. Puis déterminer $\mathrm{Ker}(C^3)$ sans calculs supplémentaires.

Solution : Notons $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On a $C = A - 2I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\left(\frac{I_5}{C}\right) \xrightarrow[C_4 \to C_4 + 2C_5 + C_2]{C_1 \to C_1 + C_3} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\frac{Q}{C' = CQ}\right).$$

Les colonnes de C' sont linéairement indépendantes donc $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4 + 2e_5)$ est de dimension 2. Puis

$$CC' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

donc la 3ème colonne de P, à savoir le vecteur e_3, forme une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(C)$ dans $\mathrm{Ker}(C^2)$, et celui-ci, étant de dimension 3 (= la multiplicité algébrique de la valeur propre $\mu = 2$) égale l'espace caractéristique $V_{(2)}$, et donc $\mathrm{Ker}(C^3) = \mathrm{Ker}(C^2) = V_{(2)}$. En fait, on pouvait se dispenser de calculer CC' en remarquant que la 3ème colonne du couple $\left(\frac{Q}{C'}\right)$ montre que $Ce_3 = e_1 + e_3$ appartient à $\mathrm{Ker}(C)$, donc e_3 appartient à $\mathrm{Ker}(C^2)$ (mais pas à $\mathrm{Ker}(C)$), et comme $\dim \mathrm{Ker}(C^2) \leq 3$ (la multiplicité algébrique de la valeur propre $\mu = 2$), il en résulte que e_3 engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(C)$ dans $\mathrm{Ker}(C^2)$.

3) (2,5 pts) Soit $B = A - \lambda I_5$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(B)$ en faisant des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{I_5}{B}\right)$ pour arriver à un couple de matrices $\left(\frac{P}{B' = BP}\right)$, puis déterminer une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$ en calculant BB' et en faisant, si nécessaire, des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{P}{BB'}\right)$.

Solution : On a $B = A + I_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\begin{pmatrix} I_5 \\ \hline B \end{pmatrix} \xrightarrow[C_5 \to C_5 + 2C_4]{C_3 \to C_3 + 4C_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{C_4 \to -C_4 + C_5} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} P \\ \hline B' = BP \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de B' sont linéairement indépendantes donc $\mathrm{Ker}(B) = \mathbb{R}e_2$.
Puis

$$BB' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -6 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

donc la 4ème colonne de P, i.e. le vecteur $e_4 + e_5$ engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$. En fait, ceci pouvait se voir sans calculer BB' : comme $B(e_4 + e_5) = e_2$ appartient à $\mathrm{Ker}(B)$, alors $e_4 + e_5$ appartient à $\mathrm{Ker}(B^2)$ (mais pas à $\mathrm{Ker}(B)$), et comme $\dim \mathrm{Ker}(B^2) \leq 2$ (la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda = -1$), alors $e_4 + e_5$ engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$.

4) (2 pts) Donner, pour chaque valeur propre de A, la partition associée à la suite des noyaux, et la partition transposée. Puis donner la forme normale de Jordan J_A de A.

Solution : Pour la valeur propre $\mu = 2$, les dimensions de la suite des noyaux sont $0, 2, 3$, d'où la partition $(2, 1)$, dont la transposée est encore $(2, 1)$. Pour la valeur propre $\lambda = -1$, les dimensions de la suite des noyaux sont $0, 1, 2$, d'où la partition $(1, 1)$, dont la transposée est (2). Donc la forme normale de Jordan de A est :

$$J_A = \left(\begin{array}{c|c|c} J_2(2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_1(2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2(-1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

5) (2 pts) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$. Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$.

Solution : Pour obtenir la matrice J_A ci-dessus on sait, d'après le cours, qu'il faut prendre pour v_2 (resp. v_5) un générateur d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A - 2I_5)$ dans $\mathrm{Ker}\left((A - 2I_5)^2\right)$ (resp. de $\mathrm{Ker}(A + I_5)$ dans $\mathrm{Ker}\left((A + I_5)^2\right)$), puis $v_1 = (A - 2I_5)v_2$ et $v_4 = (A + I_5)v_5$, et enfin prendre pour v_3 un générateur d'un supplémentaire de $(A - 2I_5)v_2$ dans $\mathrm{Ker}(A - 2I_5)$.
D'après les calculs effectués dans les questions 2) et 3), on peut donc prendre, d'une part, $v_2 = e_3$ d'où $v_1 = (A - 2I_5)e_3 = e_1 + e_3$, puis $v_3 = e_2 + e_4 + 2e_5$, et d'autre part, $v_5 = e_4 + e_5$ et $v_4 = (A + I_5)(e_4 + e_5) = e_2$.
Alors, dans la base $\mathcal{C} = (e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_4 + 2e_5, e_2, e_4 + e_5)$, la matrice de u est

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Exercice 4 (10 pts)**.** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle

$$(*) \qquad y'' = \beta\, y' + \alpha\, y.$$

1) (1,5 pts) Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction de classe C^∞ définie par $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie une équation différentielle $Y' = AY$, pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ que l'on déterminera. Citer une formule du cours exprimant $Y(t)$ en fonction de A et de $Y(0)$.

Solution : On a

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \alpha\, y(t) + \beta\, y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

d'où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. D'après le cours, on sait que $Y(t) = \exp(tA)Y(0)$.

2) (1 pt) Soit T une indéterminée, calculer le polynôme caractéristique $P = P_A(T)$ de A. Considérons A comme élément de $M_2(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ est vecteur propre de A.

Solution : $P_A(T) = T^2 - \mathrm{Tr}(A)T + \mathrm{dét}(A) = T^2 - \beta T - \alpha$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $P_A(T)$, on a :

$$(A - \lambda I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda \\ \alpha + \beta\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$ (cf. Feuille 2, exo 7 et Feuille 3, exo 2).

3) (3 pts) On suppose que P a dans $\mathbb{C}$ deux racines distinctes λ et μ. Déterminer sans calculs supplémentaires une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, puis calculer $\mathrm{dét}(Q)$ et Q^{-1}. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(tA) = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} a\, e^{\lambda t} + b\, e^{\mu t} & c\, e^{\lambda t} + d\, e^{\mu t} \\ a' e^{\lambda t} + b' e^{\mu t} & c' e^{\lambda t} + d' e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ que l'on exprimera en fonction de λ et μ.

Solution : Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. D'après la question 2), les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$ forment une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres, d'où la matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{dét}(Q) = \mu - \lambda$ et $Q^{-1} = \dfrac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$. Comme $A = Q \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} Q^{-1}$ on a, d'après le cours,

$$\exp(tA) = Q \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu\, e^{t\lambda} & -e^{t\lambda} \\ -\lambda\, e^{t\mu} & e^{t\mu} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \mu\, e^{t\lambda} - \lambda\, e^{t\mu} & -e^{t\lambda} + e^{t\mu} \\ \lambda\mu(e^{t\lambda} - e^{t\mu}) & -\lambda\, e^{t\lambda} + \mu\, e^{t\mu} \end{pmatrix}.$$

4) (1,5 pts) On suppose que $\lambda = p + iq$ et $\mu = p - iq$, avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$. Montrer alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(tA) = \frac{e^{pt}}{q} \begin{pmatrix} f \cos(qt) + g \sin(qt) & h \sin(qt) \\ h' \sin(qt) & f' \cos(qt) + g' \sin(qt) \end{pmatrix}$$

pour des réels f, g, h, f', g', h' que l'on exprimera en fonction de p et q.

Solution : Comme $a\, e^{pt+iqt} + b\, e^{pt-iqt} = e^{pt}(a\, e^{iqt} + b\, e^{-iqt})$, on peut mettre e^{pt} en facteur dans tous les coefficients de $\exp(tA)$ obtenus plus haut. En utilisant de plus que $e^{iqt} = \cos(qt) + i \sin(qt)$, d'où

$$e^{iqt} + e^{-iqt} = 2\cos(qt), \qquad e^{iqt} - e^{-iqt} = 2i \sin(qt),$$

on obtient que $\exp(tA)$ égale :

$$\frac{e^{pt}}{-2iq}\begin{pmatrix}(p-iq)\,e^{itq}-(p+iq)\,e^{-itq} & -e^{itq}+e^{-itq}\\ (p^2+q^2)(e^{itq}-e^{-itq}) & -(p+iq)\,e^{itq}+(p-iq)\,e^{-itq}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{e^{pt}}{-2iq}\begin{pmatrix}p2i\sin(qt)-iq2\cos(qt) & -2i\sin(qt)\\ (p^2+q^2)2i\sin(qt) & -p2i\sin(qt)-iq2\cos(qt)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{e^{pt}}{q}\begin{pmatrix}q\cos(qt)-p\sin(qt) & \sin(qt)\\ -(p^2+q^2)\sin(qt) & q\cos(qt)+p\sin(qt)\end{pmatrix}.$$

5) (1,5 pts) Déterminer la condition sur α,β dans l'équation différentielle $(*)$ pour que A ait deux valeurs propres réelles $\lambda\neq\mu$. Montrer que cette condition est vérifiée si $\alpha=-3$, $\beta=4$ et donner une formule explicite pour la solution $y(t)$ de l'équation $y''-4y'+3y=0$ telle que $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$.

Solution : Pour que A ait deux valeurs propres réelles $\lambda\neq\mu$, il faut et il suffit que le discriminant de $P_A(T)=T^2-\beta T-\alpha$ soit >0, c.-à.-d., que $\Delta=\beta^2+4\alpha>0$. Si $\alpha=-3$ et $\beta=4$, on a $\Delta=16-12=4$ et les racines sont

$$\lambda=\frac{4-2}{2}=1,\qquad \mu=\frac{4+2}{2}=3.$$

D'après les questions 1) et 3), on a donc

$$\begin{pmatrix}y(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=Y(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\,e^t-e^{3t} & -e^t+e^{3t}\\ 3(e^t-e^{3t}) & -e^t+3\,e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,e^t-e^{3t}\\ 2\,e^t-3\,e^{3t}\end{pmatrix}$$

d'où $y(t)=2\,e^t-e^{3t}$.

6) (1,5 pts) De même, déterminer la condition sur α,β pour que A ait deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda\neq\bar\lambda$. Montrer que cette condition est vérifiée si $\alpha=-2=\beta$. En déduire une formule explicite pour la solution $y(t)$ de l'équation $y''+2y'+2y=0$ telle que $y(0)=1=y'(0)$.

Solution : Pour que A ait deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda\neq\bar\lambda$, il faut et il suffit que le discriminant de $P_A(T)=T^2-\beta T-\alpha$ soit <0, c.-à.-d., que $\Delta=\beta^2+4\alpha<0$. Si $\alpha=-2=\beta$, on a $\Delta=4-8=-4=(2i)^2$ et les racines sont

$$\lambda=\frac{-2+2i}{2}=-1+i,\qquad \mu=\frac{-2-2i}{2}=-1-i,$$

d'où $p=-1$ et $q=1$. D'après les questions 1) et 4), on a donc

$$\begin{pmatrix}y(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=Y(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos(t)+\sin(t) & \sin(t)\\ -2\sin(t) & \cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}(\cos(t)+2\,\sin(t))\\ e^{-t}(\cos(t)-3\,\sin(t))\end{pmatrix}$$

d'où $y(t)=e^{-t}(\cos(t)+2\,\sin(t))$.

Exercice 5 (4 pts)**.** Soient V un k-espace vectoriel de dimension n, E un sous-espace vectoriel de V de dimension d. En utilisant la propriété universelle de l'espace quotient V/E, montrer que l'espace dual $(V/E)^*$ s'identifie à un sous-espace de V^* que l'on déterminera.

Solution : En fait, l'hypothèse que V (et E) soit de dimension finie n'est pas nécessaire. Notons π la projection $V\to V/E$. On a une application naturelle

$$\theta:(V/E)^*\to V^*,\qquad f\mapsto f\circ\pi$$

qui est linéaire, car $(f+\lambda g)\circ\pi=f\circ\pi+\lambda g\circ\pi$. De plus, comme π est surjective, pour tout $y\in V/E$ on a $y=\pi(x)$ pour un certain $x\in V$, d'où $f(y)=(f\circ\pi)(x)$. Donc f est déterminée par $f\circ\pi$ (en particulier, $f=0$ si $f\circ\pi=0$), donc θ est injective.
D'autre part, soit $\phi\in V^*$ dans l'image de θ, i.e. $\phi=f\circ\pi$ pour un certain $f\in(V/E)^*$. Alors, pour tout $x\in E$, on a

$$\phi(x)=f\big(\underbrace{\pi(x)}_{=0}\big)=0.$$

Ceci montre que $\mathrm{Im}(\theta)\subset E^\perp=\{\phi\in V^*\mid\phi(x)=0,\quad\forall x\in E\}$. Donc θ induit une application linéaire injective $T:(V/E)^*\hookrightarrow E^\perp$.

Si l'on suppose V de dimension finie n (et E de dimension d), on peut déjà en conclure que T est un isomorphisme, car l'on sait que

$$\dim(V/E)^* = \dim(V/E) = n - d = \dim(E^\perp).$$

Mais, même sans supposer V de dimension finie, T est toujours surjectif, donc un isomorphisme. En effet, soit $\phi \in E^\perp$, i.e. ϕ est une application linéaire $V \to k$ telle que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in E$; d'après la propriété universelle du quotient V/E, il existe une application linéaire $f : V/E \to k$ (nécessairement unique, comme on l'a vu plus haut) telle que $\phi = f \circ \pi$, i.e. f est un élément de $(V/E)^*$ tel que $T(f) = \phi$. Ceci montre que T est surjectif, et est donc un isomorphisme.