# Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
## LM270, corrigé du TE2b Groupes 4,5,6 (25/3/2011)
## Noté sur 75

**Exercice 1** (52 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ et soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ associé à $A$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

1. (5 pts) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

Solution : On a $P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1-X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-X & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -5-X & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 4-X \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la 2ème colonne, puis par rapport à la 3ème, on obtient

$$P_A(X) = (1+X)^2 \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ -1 & -5-X & 3 \\ -1 & -6 & 4-X \end{vmatrix}$$

puis en remplaçant $C_2$ par $C_2 - 6C_1$ et $C_3$ par $C_2 + 3C_1$, on obtient

$$P_A(X) = (1+X)^2 \begin{vmatrix} -X & 2+6X & -1-3X \\ -1 & 1-X & 0 \\ -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

puis développant par rapport à la 3ème ligne, on obtient

$$\begin{aligned} P_A(X) &= (1+X)^2\big((X-1)(1+3X) + (1-X)(X^2 - X + 6X + 2)\big) \\ &= (1-X)(1+X)^2(X^2 + 5X + 2 - 3X - 1) = (1-X)(X+1)^4. \end{aligned}$$

2. (5 pts) Pour chaque racine $\lambda$ de $P_A(X)$ donner, **sans calculs** et en citant un résultat du cours, la dimension de l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.

Solution : D'après le cours, on sait que la dimension de $V_{(\lambda)}$ est la multiplicité algébrique de $\lambda$, c.-à.-d., la multiplicité de $\lambda$ comme racine de $P_A(X)$. On a donc $\dim V_{(-1)} = 4$ et $\dim V_{(1)} = 1$. En particulier, $V_{(1)}$ égale l'espace propre $V_1$.

3. (10 pts) Pour chaque racine $\lambda$ de $P_A(X)$, déterminer une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_5)$ puis, si nécessaire, de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_5)^2$, $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_5)^3$, etc.

Solution : Commençons par $\lambda = 1$, pour laquelle on sait que $V_1 = \operatorname{Ker}(A - I_5)$ est de dimension 1. On a

$$A - I_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

On voit que $C_4 + 2C_5 = 0$, donc $V_1$ est la droite engendrée par le vecteur $e_4 + 2e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Considérons maintenant $\lambda = -1$ et écrivons :

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C'_5=C_5+C'_1]{\substack{C'_1=C_1+C_3 \\ C'_4=C_4-2C'_1}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C'_5+C'_4]{C''_5=} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc les vecteurs $e_2$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Ker}(A + I_5)$, qui est donc de dimension 2.

Remarquons que $w - e_2 = (A + I_5)(e_1)$ est le vecteur $v_1$ indiqué dans la question 5) ; donc $(v_1, e_2)$ est aussi une base de $\mathrm{Ker}(A + I_5)$. Calculons $(A + I_5)^2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc une base de $\mathrm{Ker}(A + I_5)^2$ est donnée par les vecteurs $e_1, e_2, e_3$ et $e_4 + e_5$. Comme $\mathrm{Ker}(A + I_5)^2$ est de dimension 4, il égale l'espace caractéristique $V_{(-1)}$ et donc le calcul de la suite des noyaux s'arrête ici.

4. (4 pts) Déterminer la forme normale de Jordan $J_A$ de $A$.

Solution : Pour la valeur propre 1, de multiplicité 1, le bloc de Jordan est $J_1(1) = (1)$. Pour la valeur propre $-1$, les dimensions de la suite des noyaux sont (0,2,4), donc la partition associée est (2,2), qui est égale à sa transposée. Donc pour la valeur propre 1, la matrice de Jordan est

$$J_{2,2}(-1) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

et donc la forme normale de Jordan de $A$ est

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

5. (5 + 4 = 9 pts) Plus précisément, pour chaque racine $\lambda$ de $P_A(X)$, donner une base $\mathcal{C}_\lambda$ de $V_{(\lambda)}$ telle que la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ réunion des $\mathcal{C}_\lambda$, égale $J_A$. **Indication :** on prendra $v_1 = (A + I_5)(e_1)$ et $v_5$ un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda \neq -1$. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis déterminer $P^{-1}$ (exprimer les vecteurs $e_j$ en fonction des vecteurs $v_i$).

Solution : On a vu que $v_1 = (A + I_5)(e_1)$ et $e_2 = (A + I_5)(e_3)$ forment une base de $\mathrm{Ker}(A + I_5)$, donc si l'on prend $v_2 = e_1$, $v_3 = e_2$ et $v_4 = e_3$, puis $v_5 = e_4 + 2e_5$ (le vecteur propre trouvé plus haut pour $\lambda = 1$) alors la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c'est-à-dire $J_A$. La matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer son inverse, écrivons que $v_2 = e_1$, $v_3 = e_2$, $v_4 = e_3$ et

$$\begin{aligned} v_5 &= e_4 + 2e_5 \\ v_1 &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 = v_2 - v_3 + v_4 - e_4 - e_5. \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$e_5 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5$$

puis $e_4 = -2v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 2v_4 - v_5$, d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (1 + 2 + 4 = 7 pts) Soit $s$ l'endomorphisme égal à $\lambda\mathrm{id}$ sur chaque espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ de $u$ et soit $S$ sa matrice dans la base $\mathcal{C}$. Écrire la matrice $N = J_A - S$ et calculer $N^2$ puis $\exp(tN)$ et $\exp(tJ_A)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Solution : On a

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad N^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad \exp(tN) = I_5 + tN = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Puis, comme $S$ et $N$ commutent (puisque $N$ est diagonale par blocs et que $S$ est une homothétie sur chaque bloc), on a $\exp(tJ_A) = \exp(tS)\exp(tN)$ et donc

$$\exp(tJ_A) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{array}\right).$$

7. (4 + 3 + 2 = 9 pts) Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $C^\infty$

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad X'(t) = A \cdot X(t).$$

   Soit $\mathcal{C}$ la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de la question 5. On définit les fonctions $(y_1(t), \ldots, y_5(t))$ par l'égalité $X(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2 + \cdots + y_5(t)v_5$ et l'on pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}.$$

Exprimer $Y(t)$ en fonction de $X(t)$ et $P$, puis la dérivée $Y'(t)$ en fonction de $X'(t)$ et $P$. Montrer que $Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$ pour une matrice $B$ que l'on déterminera, puis calculer $\exp(tB)$ et exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$, puis en fonction de $X(0)$.

Solution : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les $y_i(t)$ sont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du vecteur $X(t)$ ; donc d'après la formule de changement de coordonnées, on a $X(t) = P \cdot Y(t)$, et comme $P$ est à coefficients constants (c.-à.-d., ne dépendant pas de $t$), on obtient aussi $X'(t) = P \cdot Y'(t)$. Comme $X'(t) = A \cdot X(t)$, on obtient donc que :

$$Y'(t) = (P^{-1}AP) \cdot Y(t) = J_A \cdot Y(t).$$

On a vu en cours que ceci entraîne que

$$Y(t) = \exp(tJ_A)Y(0) = y_1(0)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2(0)\begin{pmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + y_5(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

et d'autre part, on a $Y(0) = P^{-1}X(0)$.

8. (3 pts) On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur $Y(100)$.

Solution : On a $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad Y(100) = \begin{pmatrix} e^{-100} \\ 0 \\ 100\, e^{-100} \\ e^{-100} \\ e^{100} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** (23 pts)**.** Soit $V$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

1. $(3 + 4 = 7$ pts) Soient $f \in \mathrm{End}_k(V)$, $\lambda$ une valeur propre de $f$, $V_\lambda$ l'espace propre et $V_{(\lambda)}$ l'espace caractéristique associés. Si $g \in \mathrm{End}_k(V)$ commute à $f$ (i.e. $f \circ g = g \circ f$), montrer que $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.

   Solution : Soit $v \in V_\lambda$. Comme $f$ et $g$ commutent, alors

   $$f(g(v)) = (f \circ g)(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v),$$

   et ceci montre que $g(v) \in V_\lambda$. On a donc $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$.
   De même, notons $m$ la multiplicité algébrique de $\lambda$ ; comme $g$ commute à $f$, il commute à $f - \lambda \mathrm{id}_V$ et donc aussi à $F = (f - \lambda \mathrm{id}_V)^m$. Donc, si $v$ appartient à $V_{(\lambda)} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^m$, on a

   $$F(g(v)) = (F \circ g)(v) = (g \circ F)(v) = g(F(v)) = g(0) = 0,$$

   donc $g(v)$ appartient à $\mathrm{Ker}(F) = V_{(\lambda)}$. On a donc $g(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.

2. (8 pts) Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_N\}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de $V$ qui commutent deux à deux (i.e. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout $i, j$). Montrer qu'il existe une base de $V$ dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{F}$ est diagonale. **Indication :** considérer d'abord le cas où tous les $f_i$ sont des homothéties ; puis, si $f_1$ n'est pas une homothétie, considérer les espace propres de $f_1$ et procéder par récurrence sur $n = \dim V$.

Solution : Si tous les $f_i$ sont des homothéties, c.-à.-d., des multiples de $\mathrm{id}_V$, alors le résultat est vrai pour n'importe quelle base de $V$. C'est en particulier le cas si $\dim V = 1$. On peut donc supposer $n > 1$ et le résultat établi pour $n-1$. C'est OK si tous les $f_i$ sont des homothéties ; sinon, quitte à renuméroter les $f_i$, on peut supposer que $f_1$ n'est pas une homothétie. Comme $f_1$ est diagonalisable, on a

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r} \,,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de $f_1$, et comme $f_1$ n'est pas une homothétie, on a $r \geq 2$ donc chaque $V_i = V_{\lambda_i}$ est de dimension $< n$. D'après la question 1., chaque $f_j$ induit un endomorphisme $f_j|_{V_i}$ de $V_i$, et comme les $f_j$ commutent, il en est de même des $f_j|_{V_i}$. De plus, d'après le cours (2.2.13, ou bien dire que $f_j|_{V_i}$ est annulé, tout comme $f_j$, par le polynôme scindé sans racines multiples $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{r}(X - \lambda_\ell)$), chaque $f_j|_{V_i}$ est diagonalisable. Donc d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque $V_i$ et à la famille $\{f_1|_{V_i}, \ldots, f_N|_{V_i}\}$, il existe une base $\mathcal{C}_i$ de $V_i$ dans laquelle la matrice de chaque $f_j|_{V_i}$ est diagonale. Alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r$ est une base de $V$ (puisque $V$ est la somme directe des $V_i$), et dans cette base la matrice de chaque $f_j$ est diagonale.

3. (6 + 2 = 8 pts) On prend $k = \mathbb{C}$. Soit $G$ un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}(V)$. Montrer que tout élément de $G$ est diagonalisable (on rappelle que pour tout élément $g$ d'un groupe fini $G$ de cardinal $N$, $g^N$ égale l'élément neutre de $G$), puis qu'il existe une base de $V$ dans laquelle la matrice de tout élément de $G$ est diagonale.

Solution : D'après le rappel ci-dessus, chaque $g \in G$ est annulé par le polynôme $X^N - 1$, qui a $N$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$ (à savoir $\exp\big(\dfrac{2mi\pi}{N}\big)$ (où $i^2 = -1$), pour $m = 0, 1, \ldots, N-1$). Donc, d'après le cours (2.3.12 ou, explicitement, 2.3.13), chaque $g \in G$ est diagonalisable. Comme $G$ est supposé commutatif, les éléments de $G$ commutent deux à deux, donc on est sous les hypothèses de la question précédente. Donc il existe une base de $V$ dans laquelle la matrice de tout élément de $G$ est diagonale.