Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Corrigé du devoir 3a du 23 mars 2010 (groupes 4,5,7,8,9)

Exercice 1 (6+6=12pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

Solution : Partons du couple de matrices $(A \mid I_5)$; en remplaçant la colonne C_i par $C_i - (i-1)C_1$, pour $i = 2, 3, 4, 5$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_4 et C_5 par $C_4 - C_3$ et $C_5 - C_3$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_3 par $C_3 - C_2$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc une base de $\mathrm{Im}(A)$ est formée par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et une base de $\mathrm{Ker}(A)$ par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que $C_1 + C_3 - C_4 = 0$ et $2C_1 + C_3 - C_5 = 0$, donc u_1, u_2 appartiennent bien à $\mathrm{Ker}(A)$ (et en forment une base).

Exercice 2 (30pts)**.** 1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (2pts)

Solution : La propriété est vraie pour $n = 1$; supposons donc $n \geq 2$ et la propriété établie pour $n - 1$, alors

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)^{n-1} \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^{n-1}P \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^nP,$$

ce qui prouve l'égalité voulue.

2. Soit $B = E_{21} + E_{32} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer B^2 et B^3, puis en utilisant la formule du binôme, calculer $(I_3 + B)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5+0,5+2pts)

Solution : Comme $E_{ij}E_{k\ell} = E_{i\ell}$ si $j = k$ et $= 0$ sinon, on a

$$B^2 = (E_{21} + E_{32})(E_{21} + E_{32}) = E_{31},$$

puis $B^3 = (E_{21} + E_{32})E_{31} = 0$. Comme I_3 et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$(I_3 + B)^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \binom{n}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$. (5pts)

Solution :

$$\begin{vmatrix} 2-X & 1 & -1 \\ 2 & 2-X & -1 \\ 3 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ 2 & 1-X & -1 \\ 3 & 1-X & -1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$

(en ajoutant C_3 à C_2 et mettant $1 - X$ en facteur), puis soustrayant L_2 de L_3 et développant par rapport à la 2ème colonne, on obtient :

$$P_A(X) = (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - 2X + 1) = -(X-1)^3.$$

Donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(A - I_3)^3 = 0$.

4. Soit $N = A - I_3$. Montrer que $N^3 = 0$ et déterminer $\operatorname{Ker}(N^2)$ et $\operatorname{Ker}(N^3)$. (5pts)

Solution : D'après Cayley-Hamilton, on sait déjà que $N^3 = 0$. On a

$$(*) \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc N^2 est de rang 1, et $\operatorname{Ker}(N^2)$ est le plan dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - z = 0$.
On peut aussi tenir le raisonnement plus général suivant sans calculer explicitement N^2 : si $N^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} N \subset \operatorname{Ker} N$ donc $2 \dim \operatorname{Ker} N \geq \dim \operatorname{Ker} N + \dim \operatorname{Im} N = 3$, d'où $\dim \operatorname{Ker} N = 2$ et N est de rang 1. On en déduit donc que $N^2 \neq 0$. Par contre N^2 est de rang 1 (car $(N^2)^2 = 0$) d'où $\dim \operatorname{Ker} N^2 = 2 = \dim \operatorname{Im} N$. Enfin $\operatorname{Im} N \subset \operatorname{Ker} N^2$ (car $N^3 = 0$) d'où $\operatorname{Ker} N^2 = \operatorname{Im} N$.

5. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, montrer que si $v \notin \operatorname{Ker}(N^2)$ alors $\mathcal{C} = (v, Nv, N^2v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (5pts)

Solution : Supposons $v \notin \operatorname{Ker}(N^2)$ et $av + bNv + cN^2v = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Appliquons N^2 à cette égalité, comme $N^3 = 0$ et $N^2v \neq 0$ on obtient $a = 0$; appliquant alors N à l'égalité $bNv + cN^2v = 0$, on trouve $bN^2v = 0$, d'où $b = 0$, et alors $cN^2v = 0$ donne $c = 0$. Ceci montre que la famille $\mathcal{C} = (v, Nv, N^2v)$ est libre, donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Choisissez explicitement un v comme ci-dessus, écrivez la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{C}$ et calculez P^{-1}. (1+4pts)

Solution : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; choisissons $v = e_1$, alors $Ne_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ et $N^2e_1 = e_2 + e_3$ donc la matrice de passage $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} : partant du couple $(P \mid I_3)$ et remplaçant C_2 par $C_2 - C_1 - 3C_3$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_3 par C_3+C_2 puis C_2 par $-C_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Calculer A^{21}. (5pts)

Solution : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A, alors $N = A - I_3$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de $u-\mathrm{id}$. D'après la question précédente, les vecteurs $f_1 = e_1$, $f_2 = (u-\mathrm{id})(f_1)$ et $f_3 = (u-\mathrm{id})(f_2)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ et $(u-\mathrm{id})(f_3) = 0$. Donc, $u(f_1) = f_2 + f_1$, $u(f_2) = f_3 + f_2$ et $u(f_3) = f_3$ et la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ est

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + (E_{21} + E_{32}).$$

D'après les questions 1. et 2. on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour $n = 21$ on trouve que A^{21} égale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 0 \\ 210 & 21 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 1 & 0 \\ 252 & 23 & 1 \\ 273 & 24 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -21 \\ 252 & 232 & -231 \\ 273 & 252 & -251 \end{pmatrix}.$$

En fait, comme on avait déjà calculé N^2 (ce qui n'était pas strictement nécessaire pour trouver un v tel que $N^2v \neq 0$), on peut aussi appliquer directement la formule du binôme pour calculer $(I_3+N)^n$:

$$A^n = (I_3+N)^n = I_3 + nN + \binom{n}{2} N^2\,,$$

pour $n = 21$ ceci donne que A^{21} égale

$$I_3 + \begin{pmatrix} 21 & 21 & -21 \\ 42 & 21 & -21 \\ 63 & 42 & -42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 210 & 210 & -210 \\ 210 & 210 & -210 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -21 \\ 252 & 232 & -231 \\ 273 & 252 & -251 \end{pmatrix}$$

et l'on vérifie ainsi le calcul précédent.

Exercice 3 (3+3+6=12pts)**.** 1. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution : σ_1 est le produit du 5-cycle $(1\ 7\ 5\ 4\ 2)$ et de la transposition $(2\ 6)$, or on sait que la signature d'un r-cycle est $(-1)^{r-1}$, donc $\varepsilon(\sigma_1) = -1$.
De même, σ_2 est le produit du 4-cycle $(1\ 6\ 4\ 2)$ et des transpositions $(3\ 7)$ et $(5\ 8)$, d'où $\varepsilon(\sigma_2) = -1$.

2. Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$ et soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 7} \in M_7(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = 3$ si $j \neq \tau(i)$ et $a_{i\tau(i)} = 1$ pour tout i. En utilisant la formule donnant $\mathrm{dét}(A)$, montrez que $\mathrm{dét}(A)$ est congru modulo 3 à $\varepsilon(\tau)$.

Solution : On sait que

$$\text{dét}(A) = \sum_{\sigma\in S_7} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{7} a_{i\sigma(i)}\,;$$

si $\sigma \neq \tau$, il existe au moins un indice i tel que $\sigma(i) \neq \tau(i)$, d'où $a_{i\sigma(i)} = 3$ et donc le produit correspondant à σ est divisible par 3. Donc dét(A) est congru modulo 3 au terme

$$\varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{7} a_{i\tau(i)}\,,$$

qui égale $\varepsilon(\tau)$ puisque $a_{i\tau(i)} = 1$ pour tout i.

Exercice 4 (6pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(e_1, e_1) = a$, $\phi(e_2, e_2) = c$, $\phi(e_1, e_2) = \phi(e_2, e_1) = b$. Pour tout $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$, exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de a, b, c et x_1, x_2, y_1, y_2. (2pts)

Solution : On a $\phi(u, v) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$.

2. (2+2pts) Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$, le rang et le noyau des formes bilinéaires symétriques ϕ_1 et ϕ_2 sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\phi_1(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2(x_1y_2 + x_2y_1), \qquad \phi_2(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Solution : On a $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, son déterminant est $-3 \neq 0$ donc ϕ_1 est non-dégénérée : son noyau est nul.

On a $A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_2) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, qui est de rang 1 donc ϕ_2 est de rang 1, son noyau est formé des vecteurs $y_1e_1 + y_2e_2$ tels que $A_2\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = 0$, d'où $N(\phi_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 5 (15pts)**.** Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. (0,5+1pts)

Solution : Le produit $E \times E \to E$, $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire (puisque $E = M_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre), et $\text{Tr} : E \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ est une forme linéaire, donc ϕ est une forme bilinéaire sur E. Elle est symétrique car on sait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour tout $A, B \in M_n(k)$.

2. Soit $A = (a_{pq})_{1\leq p,q\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer pour tout i, j que $\text{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$. En déduire que ϕ est non-dégénérée. (4+1pts)

Solution : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors E_{ij} est la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(e_j) = e_i$ et $u(e_\ell) = 0$ pour $\ell \neq j$. Donc AE_{ij} est la matrice de l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v(e_\ell) = 0$ pour $\ell \neq j$ et $v(e_j) = Ae_i$, c.-à.-d., AE_{ij} est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la colonne d'indice j qui vaut

$$\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{ni}\end{pmatrix}$$

le terme sur la diagonale étant a_{ji}. Les autres colonnes étant nulles, c'est le seul terme non nul sur la diagonale, donc $\text{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$.

Il en résulte que ϕ est non-dégénérée. En effet, si $A \in N(\phi)$ alors pour tout i, j on a $0 = \phi(A, E_{ij}) = \text{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$, d'où $A = 0$.

3. Soit F (resp. G) le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires supérieures strictes). Montrer que F et G sont orthogonaux pour ϕ. (5pts)

Solution : Soient A, B des matrices triangulaires supérieures ; on sait que AB est aussi triangulaire supérieure, et de plus ses coefficients diagonaux sont le produit des coefficients diagonaux de A et de B. Donc si A ou B est triangulaire supérieure stricte, il en est de même de AB ; en particulier $\mathrm{Tr}(AB) = 0$. Ceci montre que F et G sont orthogonaux pour ϕ.

4. Quelles sont les dimensions de G et $F^\perp$? Qu'en concluez-vous ? (0,5+2,5+0,5pts)

Solution : On a $\dim G = n(n-1)/2$ et $\dim F = n(n+1)/2$. Comme ϕ est non-dégénérée, on a

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim G.$$

Comme $G \subseteq F^\perp$ d'après la question précédente, on en conclut que $G = F^\perp$.