Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Corrigé du devoir 3b du 24 mars 2010 (groupes 2,3,10)

Exercice 1 (12pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Déterminer A^{-1}.

Solution : Partons du couple de matrices $(A \mid I_4)$. On peut opérer au choix sur les colonnes ou sur les lignes.

En remplaçant la colonne C_2 par $C_2 - C_1$ et C_4 par $C_4 - 3C_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_3 par $C_3 - C_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_4 par $C_4 - C_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_3 par $C_3 - C_4$ et C_1 par $C_1 - 2C_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_2 par $C_2 - C_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

enfin, remplaçant C_1 par $C_1 - C_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

En remplaçant la ligne L_2 par $L_2 - L_1$ et L_4 par $L_4 - 2L_1$; on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant L_3 par $L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant L_4 par $L_4 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant L_1 par $L_1 - 3L_4$ et L_3 par $L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 10 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant L_2 par $L_2 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 10 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

enfin remplaçant L_1 par $L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vérifions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -6 & 5 & -4 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (30pts)**.** 1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (2pts)

Solution : La propriété est vraie pour $n = 1$; supposons donc $n \geq 2$ et la propriété établie pour $n - 1$, alors

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)^{n-1} \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^{n-1}P \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^nP,$$

ce qui prouve l'égalité voulue.

2. Soit $B = E_{21} + E_{32} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer B^2 et B^3, puis en utilisant la formule du binôme, calculer $(I_3 + B)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5+0,5+2pts)

Solution : Comme $E_{ij}E_{k\ell} = E_{i\ell}$ si $j = k$ et $= 0$ sinon, on a

$$B^2 = (E_{21} + E_{32})(E_{21} + E_{32}) = E_{31},$$

puis $B^3 = (E_{21} + E_{32})E_{31} = 0$. Comme I_3 et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$(I_3 + B)^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \binom{n}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique $P_N(X)$. (5pts)

Solution : On remarque d'abord que les colonnes de N vérifient $C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$. Alors, remplaçant dans $N - XI_3$ la colonne C_1 par $C_1 + C_2 + 2C_3$ on obtient :

$$P_N(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ -X & 1-X & -2 \\ -2X & 1 & -3-X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-X & 2 \\ 2 & 1 & 3+X \end{vmatrix}$$

puis soustrayant C_1 de C_3 et développant par rapport à la 1ère ligne, on obtient :

$$P_N(X) = X \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1+X \end{vmatrix} = X(1 - X^2 - 1) = -X^3.$$

Donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^3 = 0$.

4. Montrer que $N^3 = 0$ et déterminer $\mathrm{Ker}(N^2)$. (5pts)

Solution : D'après Cayley-Hamilton, on sait déjà que $N^3 = 0$. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

donc N^2 est de rang 1, et $\mathrm{Ker}(N^2)$ est le plan dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - z = 0$.

On peut aussi tenir le raisonnement plus général suivant sans calculer explicitement N^2 : si $N^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}\, N \subset \mathrm{Ker}\, N$ donc $2 \dim \mathrm{Ker}\, N \geq \dim \mathrm{Ker}\, N + \dim \mathrm{Im}\, N = 3$, d'où $\dim \mathrm{Ker}\, N = 2$ et N est de rang 1. On en déduit donc que $N^2 \neq 0$. Par contre N^2 est de rang 1 (car $(N^2)^2 = 0$) d'où $\dim \mathrm{Ker}\, N^2 = 2 = \dim \mathrm{Im}\, N$. Enfin $\mathrm{Im}\, N \subset \mathrm{Ker}\, N^2$ (car $N^3 = 0$) d'où $\mathrm{Ker}\, N^2 = \mathrm{Im}\, N$.

5. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, montrer que si $v \notin \mathrm{Ker}(N^2)$ alors $\mathcal{C} = (v, Nv, N^2v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (5pts)

Solution : Supposons $v \notin \mathrm{Ker}(N^2)$ et $av + bNv + cN^2v = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Appliquons N^2 à cette égalité, comme $N^3 = 0$ et $N^2v \neq 0$ on obtient $a = 0$; appliquant alors N à l'égalité $bNv + cN^2v = 0$, on trouve $bN^2v = 0$, d'où $b = 0$, et alors $cN^2v = 0$ donne $c = 0$. Ceci montre que la famille $\mathcal{C} = (v, Nv, N^2v)$ est libre, donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Choisissez explicitement un v comme ci-dessus, écrivez la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{C}$ et calculez P^{-1}. (1+4pts)

Solution : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; choisissons $v = e_1$, alors $Ne_1 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$ et $N^2e_1 = -(e_1 + e_2 + 2e_3)$ donc la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} : partant du couple $(P \mid I_3)$ et remplaçant C_2 par $C_2 - 2C_1$, et C_3 par $C_3 + C_1$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_3 par $3C_3 + C_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

puis remplaçant C_2 par $C_2 + 5C_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 15 & 3 \end{array}\right)$$

enfin, divisant C_2 par 3 et C_3 par -1, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer $(I_3 + N)^{20}$. (5pts)

Solution : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est N. D'après la question précédente, les vecteurs $f_1 = e_1$, $f_2 = u(f_1)$ et $f_3 = u(f_2)$ forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ et $u(f_3) = 0$. Donc, la matrice de $\mathrm{id} + u$ dans la base $\mathcal{C}$ est

$$P^{-1}(I_3 + N)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + (E_{21} + E_{32}).$$

D'après les questions 1. et 2. on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(I_3 + N)^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour $n = 20$ on trouve que $(I_3 + N)^{20}$ égale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 190 & 20 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 20 & 22 & -21 \\ 190 & 235 & -213 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -149 & -190 & 170 \\ -130 & -169 & 150 \\ -280 & -360 & 321 \end{pmatrix}.$$

En fait, comme on avait déjà calculé N^2 (ce qui n'était pas strictement nécessaire pour trouver un v tel que $N^2 v \neq 0$), on peut aussi appliquer directement la formule du binôme pour calculer $(I_3 + N)^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \binom{n}{2} N^2$, pour $n = 20$ ceci donne que $(I_3 + N)^{20}$ égale

$$I_3 + \begin{pmatrix} 40 & 0 & -20 \\ 60 & 20 & -40 \\ 100 & 20 & -60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -190 & -190 & 190 \\ -190 & -190 & 190 \\ -380 & -380 & 380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -149 & -190 & 170 \\ -130 & -169 & 150 \\ -280 & -360 & 321 \end{pmatrix}$$

et l'on vérifie ainsi le calcul précédent.

Exercice 3 (3+3+6=12pts)**.** 1. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution : σ_1 est le produit des 3-cycles $(1\ 7\ 5)$ et $(2\ 8\ 4)$ et de la transposition $(3\ 6)$, or on sait que la signature d'un r-cycle est $(-1)^{r-1}$, donc $\varepsilon(\sigma_1) = -1$.

De même, σ_2 est le produit du 4-cycle $(1\ 8\ 6\ 4)$, de la transposition $(2\ 9)$ et du 3-cycle $(3\ 7\ 5)$, donc $\varepsilon(\sigma_2) = 1$.

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 8} \in M_8(\mathbb{R})$. Dans la formule donnant $\mathrm{dét}(A)$, dîtes, en justifiant votre réponse, quel est le signe correspondant au terme $a_{18}a_{27}a_{31}a_{46}a_{53}a_{64}a_{72}a_{85}$.

Solution : On sait que

$$\mathrm{dét}(A) = \sum_{\sigma \in S_8} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{8} a_{i\sigma(i)},$$

et le terme donné correspond à la permutation

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

qui est le produit du 4-cycle $(1\ 8\ 5\ 3)$ et des transpositions $(2\ 7)$ et $(4\ 6)$. Donc le signe correspondant est $\varepsilon(\tau) = (-1)^{3+1+1} = -1$.

Exercice 4 (6pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(e_1, e_1) = a$, $\phi(e_2, e_2) = c$, $\phi(e_1, e_2) = \phi(e_2, e_1) = b$. Pour tout $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$, exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de a, b, c et x_1, x_2, y_1, y_2. (2pts)

Solution : On a $\phi(u, v) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$.

2. (2+2pts) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les formes bilinéaires suivantes. Pour chacune, dîtes si elle est symétrique ou alternée, et déterminer sa matrice dans $\mathcal{B}$, son rang et son noyau :

$$\phi_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 - x_2y_1, \qquad \phi_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \sqrt{6}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Solution : Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $\phi_1(x, x) = 0$, donc ϕ_1 est alternée. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant 1 donc ϕ_1 est non-dégénérée, c'est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, ϕ_2 est symétrique, sa matrice est $A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1 donc ϕ_2 est de rang 1, son noyau est formé des vecteurs $y_1e_1 + y_2e_2$ tels que $A_2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$, d'où $N(\phi_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (15pts)**.** Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. (0,5+1pts)

Solution : Le produit $E \times E \to E$, $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire (puisque $E = M_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre), et $\mathrm{Tr} : E \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \sum_{i=1}^{n}$ est une forme linéaire, donc ϕ est une forme bilinéaire sur E. Elle est symétrique car on sait que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour tout $A, B \in M_n(k)$.

2. On note $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$) le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. (1,5pts)

Solution : Si $B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, alors $B = {}^tB = -B$ donc $B = 0$. Ceci prouve que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. D'autre part, pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$B = \frac{B + {}^tB}{2} + \frac{B - {}^tB}{2}$$

et $(B + {}^tB)/2 \in \mathcal{S}$, et $(B - {}^tB)/2 \in \mathcal{A}$. Ceci prouve que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

3. Montrer que pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle, on a $\mathrm{Tr}({}^tBB) > 0$. (5pts)

Solution : Posons $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$({}^tBB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} ({}^tB)_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}^2$$

donc $\mathrm{Tr}({}^tBB) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tBB)_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}^2$ est la somme des carrés des coefficients de B ; ceci est > 0 si $B \neq 0$.

4. On note $\phi_{\mathcal{S}}$ (resp. $\phi_{\mathcal{A}}$) la restriction de ϕ à $\mathcal{S}$ (resp $\mathcal{A}$). Montrer que $\phi_{\mathcal{S}}$ et $\phi_{\mathcal{A}}$ sont non-dégénérées. (1+1pts)

Solution : Soit $S \in \mathcal{S}$ telle que $S \in N(\phi_{\mathcal{S}})$. Alors $S = {}^tS$ et l'égalité $0 = \phi(S, S) = \mathrm{Tr}(S^2) = \mathrm{Tr}({}^tSS)$ entraîne $S = 0$. Ceci prouve que $\phi_{\mathcal{S}}$ est non-dégénérée.
De même, si $A \in \mathcal{A}$ appartient à $N(\phi_{\mathcal{A}})$ alors $A = -{}^tA$ et $0 = \phi(A, A) = \mathrm{Tr}(A^2) = -\mathrm{Tr}({}^tAA)$ entraîne $A = 0$. Ceci prouve que $\phi_{\mathcal{A}}$ est non-dégénérée.

5. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont orthogonaux pour ϕ ; en déduire que ϕ est non-dégénérée. (3+2pts)

Solution : Soient $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Alors ${}^t(SA) = {}^tA \cdot {}^tS = -AS$. On a donc

$$\mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}\left({}^t(SA)\right) = -\mathrm{Tr}(AS) = -Tr(SA),$$

d'où $0 = \mathrm{Tr}(SA) = \phi(S, A)$. Ceci prouve que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont orthogonaux pour ϕ.
Soit alors $B \in N(\phi)$, d'après 2. on peut écrire $B = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Comme $\phi(S, A) = 0$, l'égalité $\phi(S, B) = 0$ donne $\phi(S, S) = 0$, d'où $S = 0$ d'après 4. Puis $0 = \phi(B, A) = \phi(A, A)$ donne $A = 0$, d'après 4. à nouveau. Ceci montre que $N(\phi) = \{0\}$, c.-à.-d., que ϕ est non dégénérée.