Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Corrigé du TE3b Groupes 4,5,6 (29/4/2011)

Exercice 1 (10pts)**.** Soit ϕ la f.b.s. sur $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ est la base canonique. Soit q la forme quadratique associée.

1. (2 pts) Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : Notons X le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$. On a $q(x_1, \ldots, x_5) = {}^tXAX = 2\big(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2\big)$.

2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Solution : En suivant l'algorithme de réduction des formes quadratiques en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned}
q(x_1, \ldots, x_5) &= \boxed{2\Big(x_1 + \frac{1}{2}x_2\Big)^2} + q_2(x_2, \ldots, x_5) \\
\text{avec } q_2(x_2, \ldots, x_5) &= 2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) - \frac{1}{2}x_2^2 \\
&= \frac{3}{2}x_2^2 + 2(x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) = \boxed{\frac{3}{2}\Big(x_2 + \frac{2}{3}x_3\Big)^2} + q_3(x_3, x_4, x_5) \\
\text{avec } q_3(x_3, x_4, x_5) &= 2(x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) - \frac{2}{3}x_3^2 \\
&= \frac{4}{3}x_3^2 + 2(x_3x_4 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) = \boxed{\frac{4}{3}\Big(x_3 + \frac{3}{4}x_4\Big)^2} + q_4(x_4, x_5) \\
\text{avec } q_4(x_4, x_5) &= 2(x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) - \frac{3}{4}x_4^2 = \frac{5}{4}x_4^2 + 2(x_4x_5 + x_5^2) \\
&= \boxed{\frac{5}{4}\Big(x_4 + \frac{4}{5}x_5\Big)^2} - \frac{4}{5}x_5^2 + 2x_5^2 = \frac{5}{4}\Big(x_4 + \frac{4}{5}x_5\Big)^2 + \boxed{\frac{6}{5}x_5^2}
\end{aligned}$$

D'où $q(x_1, \ldots, x_5) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} L_i(x_i, \ldots, x_5)^2$ avec :

$$L_1(x_1, \ldots, x_5) = \sqrt{2}\Big(x_1 + \frac{1}{2}x_2\Big) \qquad L_3(x_3, x_4, x_5) = \sqrt{\frac{4}{3}}\Big(x_3 + \frac{3}{4}x_4\Big) \qquad L_5(x_5) = \sqrt{\frac{6}{5}}x_5$$

$$L_2(x_2, \ldots, x_5) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Big(x_2 + \frac{2}{3}x_3\Big) \qquad L_4(x_4, x_5) = \sqrt{\frac{5}{4}}\Big(x_4 + \frac{4}{5}x_5\Big)$$

C'est-à-dire, pour $1 \leq i \leq 4$: $L_i(x_i, \ldots, x_5) = \sqrt{\dfrac{i+1}{i}}\Big(x_i + \dfrac{i}{i+1}x_{i+1}\Big)$ et $L_5(x_5) = \sqrt{\dfrac{6}{5}}x_5$.

3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Solution : D'après le résultat de la question 2, la signature de q est $(5,0)$ et $\mathrm{rang}(q) = 5$. Ce résultat s'obtient également à partir de l'égalité $q(x_1, \ldots, x_5) = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_5)^2 + x_5^2$ qui permet de vérifier directement que q est définie positive.

Exercice 2 (12pts)**.** Soit ϕ la f.b.s. sur $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ est la base canonique. Soit q la forme quadratique associée.

1. (2 pts) Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : $q(x_1, \ldots, x_5) = 2(x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_5 - x_4x_5)$.

2. (8 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Première solution : Comme q ne comporte pas de « terme carré », on en introduit grâce au changement de variables $\begin{cases} x_1 = x_1' + x_3' \\ x_3 = x_1' - x_3' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \\ x_3' = \dfrac{x_1 - x_3}{2} \end{cases}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
q(x_1, \ldots, x_5) &= Q_1(x_1', x_2', x_3, x_4, x_5) \\
&= 2\big((x_1' + x_3')(x_1' - x_3') - (x_1' + x_3')x_4 + x_2x_4 - x_2x_5 + (x_1' - x_3')x_5 - x_4x_5\big) \\
&= 2(x_1'^2 - x_1'x_4 + x_1'x_5 - x_3'^2 - x_3'x_4 - x_3'x_5 + x_2x_4 - x_2x_5 - x_4x_5) \\
&= 2\Big(x_1' + \frac{1}{2}(-x_4 + x_5)\Big)^2 - 2\Big(x_3' + \frac{1}{2}(x_4 + x_5)\Big)^2 + q_3(x_2, x_4, x_5) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}(x_1 + x_3 - x_4 + x_5)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3 + x_4 + x_5)^2} + q_3(x_2, x_4, x_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } q_3(x_2, x_4, x_5) &= 2(x_2x_4 - x_2x_5 - x_4x_5) - \frac{1}{2}(-x_4 + x_5)^2 + \frac{1}{2}(x_4 + x_5)^2 \\
&= 2(x_2x_4 - x_2x_5)
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $\begin{cases} x_2 = x_2' + x_4' \\ x_4 = x_2' - x_4' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_2' = \dfrac{x_2 + x_4}{2} \\ x_4' = \dfrac{x_2 - x_4}{2} \end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned}
q_3(x_2, x_4, x_5) &= 2\big((x_2' + x_4')(x_2' - x_4') - (x_2' + x_4')x_5\big) \\
&= 2(x_2'^2 - x_4'^2 - x_2'x_5 - x_4'x_5) \\
&= 2\Big(x_2' - \frac{1}{2}x_5\Big)^2 - 2\Big(x_4' + \frac{1}{2}x_5\Big)^2 \\
&= \boxed{\frac{1}{2}(x_2 + x_4 - x_5)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_4 + x_5)^2}
\end{aligned}$$

D'où $q(x_1, \ldots, x_5) = L_1(x_1, \ldots, x_5)^2 - L_2(x_1, \ldots, x_5)^2 + L_3(x_2, x_4, x_5)^2 - L_4(x_2, x_4, x_5)^2$ avec :

$$\begin{aligned}
L_1(x_1, \ldots, x_5) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3 - x_4 + x_5) \qquad & L_3(x_2, x_4, x_5) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_4 - x_5) \\
L_2(x_1, \ldots, x_5) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3 + x_4 + x_5) \qquad & L_4(x_2, x_4, x_5) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_4 + x_5)
\end{aligned}$$

Seconde solution : Comme q ne comporte pas de « terme carré » on utilise la 2e méthode de l'algorithme de réduction des formes quadratiques en somme de carrés de formes linéaires indépendantes en écrivant $q(x_1, \ldots, x_5)$ sous la forme $\lambda \cdot \big(x_1 + \ell_1(x_2, x_4, x_5)\big)\big(x_3 + \ell_2(x_2, x_4, x_5)\big) + q_3(x_3, x_4, x_5)$:

$$q(x_1, \ldots, x_5) = \boxed{2(x_1 + x_5)(x_3 - x_4)} + q_3(x_3, x_4, x_5)$$

$$\text{avec } q_3(x_2, x_4, x_5) = 2(x_2x_4 - x_2x_5 - x_4x_5) + 2x_4x_5 = 2(x_2x_4 - x_2x_5)$$

et on procède de façon similaire avec q_3 :

$$q_3(x_2, x_4, x_5) = \boxed{2x_2(x_4 - x_5)}$$

L'identité $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ donne alors $\begin{cases} 2(x_1 + x_5)(x_3 - x_4) = L_1(x_1, \ldots, x_5)^2 - L_2(x_1, \ldots, x_5)^2 \\ 2x_2(x_4 - x_5) = L_3(x_2, x_4, x_5)^2 - L_4(x_2, x_4, x_5)^2 \end{cases}$ et on retrouve le résultat précédent.

3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Solution : D'après le résultat de la question 2, la signature de q est $(2, 2)$ et $\text{rang}(q) = 4$.

Exercice 3 (4 + 4 pts)**.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + \sqrt{3}x_2 + \sqrt{5}x_3 + \sqrt{7}x_4 + \sqrt{9}x_5|}{5} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

Solution : Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{7} \\ \sqrt{9} \end{pmatrix}$. On a $\|V\|^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|V \cdot X| \leq ||V|| \cdot ||X||$ donne alors

$$|x_1 + \sqrt{3}x_2 + \sqrt{5}x_3 + \sqrt{7}x_4 + \sqrt{9}x_5| \leq 5\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}$$

d'où l'inégalité demandée. Il y a égalité si et seulement si V et X sont colinéaires, c'est-à-dire si $x_2 = \sqrt{3}x_1$, $x_3 = \sqrt{5}x_1$, $x_4 = \sqrt{7}x_1$ et $x_5 = \sqrt{9}x_1$.

Exercice 4 (10 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ et soit w le vecteur $\begin{pmatrix} p^2 - q^2 \\ 2pq \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. (3 pts) Calculer $\|w\|$ et déterminer un vecteur u de norme 1 orthogonal à $v = \dfrac{1}{\|w\|}w$.

Solution : $||w||^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 + q^2)^2$ donc $||w|| = p^2 + q^2$, $v = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2 - q^2 \\ 2pq \end{pmatrix}$ et $u = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} -2pq \\ p^2 - q^2 \end{pmatrix}$.

2. (1 + 6 pts) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $F = \mathbb{R}u$. Écrire la matrice de s dans la base $\mathcal{C} = (u, v)$, puis dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Solution : La matrice de s dans la base $\mathcal{C}$ est $\mathrm{Mat}_\mathcal{C}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si l'on note $P = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} -2pq & p^2 - q^2 \\ p^2 - q^2 & 2pq \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, alors $P^{-1} = {}^tP$ car P est orthogonale par construction de u et v. La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(s) = P\,\mathrm{Mat}_\mathcal{C}(s)\,P^{-1} &= \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} -2pq & p^2 - q^2 \\ p^2 - q^2 & 2pq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} -2pq & p^2 - q^2 \\ p^2 - q^2 & 2pq \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(p^2+q^2)^2}\begin{pmatrix} -2pq & -p^2 + q^2 \\ p^2 - q^2 & -2pq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2pq & p^2 - q^2 \\ p^2 - q^2 & 2pq \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(p^2+q^2)^2}\begin{pmatrix} -(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 & -2(p^2 - q^2)(2pq) \\ -2(p^2 - q^2)(2pq) & (p^2 - q^2)^2 - (2pq)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{P^2+Q^2}\begin{pmatrix} -P^2 + Q^2 & -2PQ \\ -2PQ & P^2 - Q^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (P, Q) = (p^2 - q^2, 2pq) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Remarque : Pour déterminer $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(s)$, on pouvait aussi calculer $s(e_1)$ et $s(e_2)$ en appliquant la formule $s(x) = x - 2\dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)}v$ à $x = e_1$ puis à $x = e_2$.

Exercice 5 (10 pts)**.** On admet que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.

Remarque : Cette identité découle de l'égalité $\forall k$: $({}^tA)^k = {}^t(A^k)$ et de la définition de l'exponentielle de ${}^tA$: $\exp({}^tA) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{({}^tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{{}^t(A^k)}{k!} \underset{(*)}{=} {}^t\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right) = {}^t\exp(A)$, l'égalité $(*)$ résultant de la simple identification des 2 matrices, coefficient par coefficient.

1. (2 pts) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\exp(A) \in O(n)$.

Solution : On a ${}^t\exp(A) \times \exp(A) = \exp({}^tA) \times \exp(A) = \exp(-A) \times \exp(A) = I_n$, ce qu'il fallait démontrer.

2. (5 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ considérée comme élément de $M_3(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer $P_A(X)$ et une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$, calculer son inverse P^{-1}, et déterminer sans calcul la matrice $D = P^{-1}AP$.

Solution : $P_A(X) = \mathrm{dét}(A - X \cdot I_3) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 + 1)$. Les valeurs propres de A sont donc i, $-i$ et 0. On a $\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix_1 - x_2 \\ x_1 - ix_2 \\ -ix_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x_1 = ix_2$ et $x_3 = 0$. L'espace propre V_i est donc engendré par $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$. De même $\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 - x_2 \\ x_1 + ix_2 \\ ix_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x_2 = ix_1$ et $x_3 = 0$. L'espace propre V_{-i} est donc engendré par $\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}}$. Enfin $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. L'espace propre V_0 est donc engendré par $\boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$. La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ est libre car les espaces propres V_i, V_{-i} et V_0 sont en somme directe. C'est donc une base de $\mathbb{C}^3$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. C'est une matrice diagonale par blocs inversible, et son inverse est $\begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, qui est de déterminant -2. La formule $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\, {}^t(\operatorname{com} M)$ donne alors $M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ d'où $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$. Enfin, comme v_1, v_2, v_3 sont des vecteurs propres, respectivement pour les valeurs propres $i, -i, 0$, on a $\boxed{D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

3. (3 pts) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tD)$ puis écrire $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$ comme une matrice à coefficients réels (on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$).

Solution : $\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ie^{it} & e^{-it} & 0 \\ e^{it} & ie^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{it} - ie^{-it} & 0 \\ -ie^{it} + ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (10 pts)**.** Pour tout $n \geq 2$, on considère la matrice $n \times n$ suivante, à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c.-à.-d., les coefficients diagonaux valent 3, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 1, ceux juste en-dessous de la diagonale valent 2, et les autres sont nuls. On pose $D_n = \det(A_n)$.

1. (0,5 + 1 pt) Calculer D_2 et D_3.

Solution : $D_2 = 7$ et $D_3 = 15$.

2. En développant D_n par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = aD_{n-1} - bD_{n-2}$, pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ que l'on déterminera (2,5 pts) . En utilisant cette formule, calculer D_4, D_5 et D_6 ($3 \times 0{,}5$ pt).

Solution : $D_n = 3D_{n-1} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Cette deuxième matrice est de taille $(n-1) \times (n-1)$ et la sous-matrice de taille $(n-2) \times (n-2)$ dans le coin inférieur droit est A_{n-2}. En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient donc D_{n-2}. D'où la relation : $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$. On a alors $D_4 = 3 \times 15 - 2 \times 7 = 31$ et $D_5 = 3 \times 31 - 2 \times 15 = 63$.

3. Les calculs précédents vous suggèrent-ils une formule pour la valeur de D_n (2 pts) ? Si oui, démontrer cette formule par récurrence sur n (2,5 pts).

Solution : On conjecture que $D_n = 2^{n+1} - 1$, ce qui est déjà vérifié pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. On le montre alors par récurrence : supposons que pour tout $k < n$ on a $D_k = 2^{k+1} - 1$; on a alors $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2} = 3(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 1$, ce qu'il fallait démontrer.