Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé du devoir 1 du 8 février 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **2** exercices et est noté sur **50**

Exercice 1 (42 pts)**.** [1] Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et soit $P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 4 & -4 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$ son polynôme caractéristique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M.

1. (4 pts) En faisant des opérations sur les colonnes, calculer $P_M(X)$. (On trouvera $P_M(X) = (a-X)(b-X)(c-X)$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $a < 0 < b < c$.)

Solution : En faisant $C_1 \to C_1 - C_2$ et $C_3 \to C_3 + C_2$ on obtient :

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 4 & -4 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 4 & 0 \\ X+1 & -X & 2-X \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (X+1)(2-X) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Puis en faisant $C_2 \to C_2 + 4C_1 - C_3$ on a :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-X) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(3-X).$$

Donc $P_M(X) = -(X+1)(2-X)(3-X) = (-1-X)(2-X)(3-X)$. Et avec les notations suggérées par l'énoncé, on a : $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$.

2. (4,5 pts) Déterminer un vecteur propre v_a (resp. v_b, resp. v_c) associé à la valeur propre a (resp. b, resp. c).

Solution : Pour $a = -1$, on a :

$$\begin{pmatrix} M + I_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + C_2]{C_1 \to C_1 - C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On voit ainsi que $M + I_3$ est de rang 2, et que l'espace propre $V_{-1} = \operatorname{Ker}(M + I_3)$ est engendré par le vecteur $v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2$.

En fait, on pouvait déduire ceci, sans calcul supplémentaire, du calcul que l'on a fait de $P_M(X)$. En effet, remplaçant X par un scalaire $x \in k$ arbitraire, $M - xI_3$ est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et ses colonnes C_j sont les vecteurs $(M - xI_3)(e_j)$. On a vu qu'en faisant $C_1 \to C_1 - C_2$, la 1ère colonne s'annule pour $x = -1$, ce qui signifie que

$$(M - (-1)I_3)(e_1 - e_2) = 0,$$

donc $e_1 - e_2$ est un élément de l'espace propre $V_{-1} = \operatorname{Ker}(M + I_3)$. Or, comme -1 est une racine simple de $P_M(X)$, on sait que $\dim V_{-1} = 1$, et donc on obtient, sans calcul supplémentaire, que $V_{-1} = \mathbb{R}(e_1 - e_2)$.

Pour $b = 2$, on a aussi vu qu'en faisant $C_3 \to C_3 + C_2$, la 3ème colonne de $M - xI_3$ s'annule pour $x = 2$, qui est aussi une racine simple de $P_M(X)$. Donc le même raisonnement montre que $V_2 = \operatorname{Ker}(M - 2I_3) = \mathbb{R}(e_2 + e_3)$.

Enfin, pour $c = 3$, on a :

$$\begin{pmatrix} M - 3I_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[1] Les questions 7 et 8 sont indépendantes des questions 1 à 6.

On voit ainsi que $M - 3I_3$ est de rang 2, et que l'espace propre $V_3 = \mathrm{Ker}(M - 3I_3)$ est engendré par le vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3$.

3. (4 pts) Écrire la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_a, v_b, v_c)$ et calculer son inverse P^{-1}.

Solution :

$$\begin{pmatrix} P \\ \hline I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 + C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to -C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut vérifier : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (2,5 pts) Montrer que $\mathcal{C} = (v_a, v_b, v_c)$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$. (On pourra citer un résultat du cours, ou bien utiliser la question précédente.)

Solution : Comme v_{-1}, v_2, v_3 sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, ils forment une famille libre, de cardinal 3, donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Ou bien : le calcul précédent montre que la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_{-1}, v_2, v_3)$ est inversible, donc (v_{-1}, v_2, v_3) est une famille libre, de cardinal 3, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5. (2 pts) Pour tout vecteur $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X \in \mathbb{R}^3$, rappeler la formule matricielle (vue en L1) exprimant X en fonction de P et des coordonnées X' de v dans la base $\mathcal{C}$. (Pour retrouver cette formule, si nécessaire, écrire $v = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i = \sum_{j=1}^{3} x'_j f_j$, où $(f_1, f_2, f_3) = (v_a, v_b, v_c)$ et exprimer les f_j en fonction des e_i.)

Solution : On a $X = PX'$ (et donc $X' = P^{-1}X$). Si on l'a oubliée, on peut retrouver cette formule comme suit : puisque $P = \mathrm{Mat}_{(e_1, \ldots, e_n)}(f_1, \ldots, f_n)$, on a $f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ pour tout j et donc en écrivant :

$$v = \sum_i x_i e_i = \sum_j x'_j f_j = \sum_j x'_j \sum_i p_{ij} e_i = \sum_i (\sum_j p_{ij} x'_j) e_i$$

on obtient que $X = PX'$.

6. (2 + 2 pts) Que représente la matrice $P^{-1}MP$? Sans faire de calcul supplémentaire, écrire la matrice $D = P^{-1}MP$.

Solution : $D = P^{-1}MP$ est la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{C} = (v_{-1}, v_2, v_3)$. Comme c'est une base de vecteurs propres, on a

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, i.e. pour tout $U \in \mathcal{S}$, chaque terme $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathcal{S}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall U, V \in \mathcal{S}, \qquad (\lambda U + V)_n = \lambda U_n + V_n.$$

Soit $E = \{U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n\}$, où M est la matrice des questions précédentes.

7. (2 pts) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

<u>Solution</u> : Il est clair que la suite nulle appartient à E (car $M0 = 0$). Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U, V \in E$. Il faut montrer que la suite $W = \lambda U + V$ appartient à E, c.-à.-d., que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+1} = MW_n$. Or ceci est clair, car :

$$W_{n+1} = \lambda U_{n+1} + V_{n+1} = \lambda MU_n + MV_n = M(\lambda U_n + V_n) = MW_n.$$

8. (4,5 pts) Construire un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$. (En expliquant pourquoi ϕ est surjective, et pourquoi ϕ est injective).

<u>Solution</u> : L'application $\phi : E \to \mathbb{R}^3$ qui à toute suite $U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe son terme initial U_0 est linéaire. (C'est évident, car $(\lambda U + V)_0 = \lambda U_0 + V_0$.) Elle est surjective, car U_0 peut être choisi arbitrairement (et ensuite U_1 est défini par $U_1 = MU_0$, puis $U_2 = MU_1$, etc.). Elle est injective, car si $U_0 = 0$, alors on a $U_1 = MU_0 = 0$, puis $U_2 = MU_1 = 0$, etc., donc $U_n = 0$ pour tout n. (On peut faire une récurrence si on veut, mais ce n'est pas nécessaire...)

9. (4,5 pts) Les valeurs propres de M étant, comme plus haut, $a < b < c$, déterminer des suites non nulles $A, B, C \in E$ telles que $A_{n+1} = aA_n$ (resp. $B_{n+1} = bB_n$, resp. $C_{n+1} = cC_n$), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis donner une formule explicite pour la valeur de A_n, B_n, C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Solution</u> : Les conditions $A_1 = MA_0 = aA_0$ et $A_0 \neq 0$ (pour que A soit non nulle) signifient que $A_0 \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre a. Réciproquement, si on prend pour A_0 un tel vecteur propre, et qu'on définit la suite $A \in E$ par $A_{n+1} = MA_n$ pour tout n (cf. la question précédente), alors on a : $A_1 = MA_0 = aA_0$, puis $A_2 = MA_1 = M(aA_0) = aMA_0 = a^2A_0$, puis $A_3 = MA_2 = a^3A_0$, etc., d'où $A_n = a^nA_0$ pour tout n. On peut faire une récurrence si on veut : supposons avoir montré que $A_n = a^nA_0$ (c'est vrai pour $n = 0$ (car $a^0 = 1$) et pour $n = 1$), alors

$$A_{n+1} = MA_n = M(a^nA_0) = a^nMA_0 = a^{n+1}A_0$$

et donc $A_{n+1} = aA_n$ pour tout n. Donc on peut prendre $A_0 = v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura : $A_n = (-1)^nA_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ -(-1)^n \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, pour $b = 2$ on peut prendre $B_0 = v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura : $B_n = 2^nB_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

Et pour $c = 3$, on peut prendre $C_0 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura : $C_n = 3^nC_0 = \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

10. (4 pts) En utilisant les questions 4 et 8, montrer que (A, B, C) est une base de E.

<u>Solution</u> : L'image de (A, B, C) par l'isomorphisme $\phi : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ est (v_{-1}, v_2, v_3), qui forme une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$. Donc (A, B, C) est une base de E, car c'est l'image de $\mathcal{C}$ par l'isomorphisme inverse ϕ^{-1}. Ou bien, si on préfère, on peut montrer directement que (A, B, C) est libre : si $x, y, z \in \mathbb{R}$ et si $xA + yB + zC = 0$, alors $xA_0 + yB_0 + zC_0 = 0$, et comme (A_0, B_0, C_0) est une base de $\mathbb{R}^3$, on a $x = y = z = 0$. Ceci montre que la famille (A, B, C) est libre, donc est une base de E puisque $\dim(E) = 3$.

11. (6pts) Soit U l'élément de E défini par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En utilisant les questions 5 et 8, exprimer U dans la base (A, B, C), puis en déduire une formule explicite donnant la valeur de U_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Les coordonnées X' de U_0 dans la base $\mathcal{C}$ sont données par

$$X' = P^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

i.e. on a $U_0 = A_0 + B_0 + C_0$. Comme ϕ est un isomorphisme, on a donc $U = A + B + C$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A_n + B_n + C_n = \begin{pmatrix}(-1)^n + 3^n\\ 2^n + 3^n - (-1)^n\\ 2^n + 3^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (8 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^5$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. (4 pts) Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4 + e_5$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^* + a_5e_5^*$ s'annule-t-elle sur P ?

Solution : Comme tout élément v de P s'écrit $v = \lambda v_1 + \mu v_2$, on voit d'abord que f s'annule sur P si et seulement si $f(v_1) = 0$ et $f(v_2) = 0$. Puis, comme

$$f(v_1) = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\1\end{pmatrix} = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \quad f(v_2) = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

la condition pour que f s'annule sur P est :

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\end{cases}$$

En remplaçant L_1 par $L_1 - L_2$, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0\\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_1 = -a_2\\ a_5 = -a_2 - a_3 - a_4.\end{cases}$$

2. (4 pts) Déterminer une base $(f_1, \ldots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.

Solution : Le système linéaire précédent montre que $P^\perp$ est de dimension 3. Ceci résulte aussi du cours, §1.3 :

$$\dim(P^\perp) = \mathrm{codim}_V(P) = \dim(V) - \dim(P) = 5 - 2 = 3.$$

Dans le système précédent, on a pris comme variables libres a_2, a_3, a_4, donc une base de $P^\perp$ est donnée, par exemple, par les formes linéaires obtenues respectivement en prenant

$$\begin{pmatrix}a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

i.e. par les formes linéaires suivantes :

$$f_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = -e_1^* + e_2^* - e_5^*, \quad f_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = e_3^* - e_5^*, \quad f_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = e_4^* - e_5^*.$$

Ceci équivaut à dire que P est défini par les trois équations : $-x_1 + x_2 - x_5 = 0$, $x_3 - x_5 = 0$ et $x_4 - x_5 = 0$.