Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé du devoir 4 du 22 mars 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **6** exercices indépendants et est noté sur **50**

Dans les exercices 1 à 3, $(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3. On note $(\mid)$ le produit scalaire sur E. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. On oriente E par le choix de $\mathcal{B}$.

Exercice 1. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4x+4y+7z \\ -8x+y+4z \\ x-8y+4z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.

Solution : $f(O)$ a pour coordonnées $(1, -1, 3)$ donc, pour tout point $M(x, y, z)$, on a

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4x+4y+7z \\ -8x+y+4z \\ x-8y+4z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).$$

Il en résulte que $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \le i \le j \le 3$, montrer que $A \in O(3)$.

Solution : On a $(C_1 \mid C_1) = \dfrac{1}{81}(16+64+1) = (C_2 \mid C_2) = 1$ et $(C_3 \mid C_3) = \dfrac{1}{81}(49+16+16) = 1$. Et $(C_1 \mid C_2) = \dfrac{1}{81}(16-8-8) = 0$, et $(C_1 \mid C_3) = \dfrac{1}{81}(28-32+4) = (C_2 \mid C_3) = 0$. Donc $A \in O(3)$.

3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.

Solution : Comme $A \in O(3)$ et comme le mineur $\dfrac{1}{81}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 4/9$ égale le coefficient a_{33}, on a $\mathrm{dét}(A) = 1$.

4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Solution : A est une rotation $\neq I_3$. Calculons son axe $D = \mathrm{Ker}(9A - 9I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc} -5 & 4 & 7 \\ -8 & -8 & 4 \\ 1 & -8 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2 \to C_2 + 2C_3]{C_1 \to C_1 + 2C_3} \left(\begin{array}{ccc} 9 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & -18 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \to -C_2 + 2C_1} \left(\begin{array}{ccc} 9 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ -9 & 0 & -5 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

donc D est engendré par le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour l'angle θ, on a $1 = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{dét}(A) + 2\cos(\theta)$, d'où $\cos(\theta) = 0$ et donc $\theta = \pm\pi/2$. Pour déterminer le signe, prenons $x = 9e_1$. On a $x \notin D$ et $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(x, Ax, f_3) = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-15) < 0$. Donc $\overrightarrow{f}$ est la rotation d'axe D engendré et orienté par f_3 et d'angle $-\pi/2$.

5. (1 pt) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis sa projection orthogonale u sur $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Solution : On a $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $F = D = \mathbb{R}f_3$, donc $u = \dfrac{(T \mid f_3)}{(f_3 \mid f_3)} f_3 = \dfrac{2+1+6}{4+1+4} f_3 = f_3$.

6. (2,5 pts) Déterminer les points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Solution : Un point $M(x, y, z)$ est un point fixe de $g = t_{-u} \circ f$ si et seulement si l'on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f(M) - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c.-à.-d., si l'on a $(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Or on a vu en échelonnant la matrice $A - I_3$ que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc le point $I(1, 0, 2)$ est un point fixe de g. Donc, d'après le cours, l'ensemble des points fixes de g est la droite affine $\mathcal{D} = I + D$, donc g est la rotation affine d'axe $\mathcal{D}$, orienté par u, et d'angle $-\pi/2$. Enfin, comme $u \in D$, alors $f = t_u \circ g$ est le vissage de vecteur u, d'axe $\mathcal{D} = I + D$ orienté par u, et d'angle $-\pi/2$.

Exercice 2. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y + 2z \\ -2x + 2y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.

Solution : $f(O)$ a pour coordonnées $(-1, 3, -2)$ donc, pour tout point $M(x, y, z)$, on a

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y + 2z \\ -2x + 2y + z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}).$$

Il en résulte que $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \le i \le j \le 3$, montrer que $A \in O(3)$.

Solution : On a $(C_1 \mid C_1) = \dfrac{1}{9}(1 + 4 + 4) = (C_2 \mid C_2) = (C_3 \mid C_3) = 1$ et $(C_1 \mid C_2) = \dfrac{1}{9}(2 + 2 - 4) = (C_2 \mid C_3) = -(C_1 \mid C_3) = 0$. Donc $A \in O(3)$.

3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.

Solution : Comme $A \in O(3)$ et comme le mineur $\dfrac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1/3$ est l'opposé du coefficient a_{33}, on a $\mathrm{dét}(A) = -1$.

4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Solution : A est une rotation gauche $\neq I_3$. De plus, $1 = \mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$ donc $\cos(\theta) = 1$, d'où $\theta = 0$ et donc A est la symétrie orthogonale par rapport au plan $P = \mathrm{Ker}(A - I_3)$. (On pouvait aussi dire que la matrice de A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée, et comme $A \in O(3)$ les valeurs propres sont ± 1, et comme $\mathrm{dét}(A) = -1$ et $A \neq I_3$, les valeurs propres sont $1, 1, -1$ donc A une symétrie orthogonale.) Pour déterminer le plan $P = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, calculons son orthogonal $D = P^{\perp} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$. On a :

$$\left(\frac{3A + 3I_3}{I_3} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + C_2]{C_1 \to C_1 - 2C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 6 \\ -6 & 2 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

donc D est engendrée par le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et P est le plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$.

5. (1 pt) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis sa projection orthogonale u sur $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Solution : On a $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $F^\perp = D = \mathbb{R}f_3$, donc $u = T - \dfrac{(T \mid f_3)}{(f_3 \mid f_3)} f_3 = T - \dfrac{-1-3-2}{3} f_3 = T + 2f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. (2,5 pts) Déterminer les points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Solution : D'après le cours, g a des points fixes et est la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ de direction P formé des points $I(x, y, z)$ tels que $(\overrightarrow{Ig(I)} \mid f_3) = 0$. Comme

$$\overrightarrow{Ig(I)} = \overrightarrow{If(I)} - u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y + 2z \\ -2x + 2y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2x + 2y - 2z \\ 2x - 2y + 2z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

on obtient l'équation $-2x + 2y - 2z = 2(f_3 \mid f_3) = 6$. Donc $\mathcal{P}$ est le plan affine d'équation $x - y + z = -3$; il contient, par exemple, le point $I(-1, 1, -1) = O - f_3$, donc $\mathcal{P} = I + P$. Enfin, $f = t_u \circ g$ est la symétrie orthogonale glissée par rapport au plan $\mathcal{P}$, de vecteur de glissement $u \in P$.

Exercice 3. (10 pts) Soit I le point de coordonnées $(1, 1, 0)$ et soit v_1 (resp. v_2) le vecteur $e_1 + e_3$ (resp. $e_1 - e_3$). Pour $i = 1, 2$, soit $\mathcal{P}_i$ le plan affine $I + (\mathbb{R}v_i)^\perp$, soient s_i la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}_i$, et g_i la symétrie orthogonale glissée par rapport à $\mathcal{P}_i$, de vecteur de glissement $u = e_2$. Soit σ_i la partie linéaire de g_i.

1. (2 pts) En utilisant une formule connue, déterminer les matrices $S_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_1)$ et $S_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_2)$.

Solution : On rappelle que si σ est la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H et si v est un vecteur $\neq 0$ orthogonal à H, alors pour tout $x \in E$ on a $\sigma(x) = x - 2\dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)} v$. Ici, on a $(v_1 \mid v_1) = 2 = (v_2 \mid v_2)$ et l'on obtient :

$$\sigma_1(e_1) = e_1 - 2\frac{1}{2}v_1 = e_1 - v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1(e_2) = e_2, \qquad \sigma_1(e_3) = e_3 - 2\frac{1}{2}v_1 = e_3 - v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2(e_1) = e_1 - 2\frac{1}{2}v_2 = e_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2(e_2) = e_2, \qquad \sigma_2(e_3) = e_3 - 2\frac{-1}{2}v_1 = e_3 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $S_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $S_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (2 pts) Pour tout point $M(x, y, z)$, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{Is_1(M)} = \sigma_1(\overrightarrow{IM})$, puis celles (x_1, y_1, z_1) du point $g_1(M)$.

Solution : On a $\overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Is_1(M)} = \sigma_1(\overrightarrow{IM}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y-1 \\ 1-x \end{pmatrix}$. Puis $\overrightarrow{Ig_1(M)} = \overrightarrow{Is_1(M)} + e_2 = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ 1-x \end{pmatrix}$, et enfin $\overrightarrow{Og_1(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Ig_1(M)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ y \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z \\ 1+y \\ 1-x \end{pmatrix}$. Donc les coordonnées de $g_1(M)$ sont $(1 - z, 1 + y, 1 - x)$. À titre de vérification, on vérifie que $g_1(I) = (1, 2, 0) = I + e_2$.

3. (2 pts) Déterminer de même les coordonnées (x_2, y_2, z_2) du point $g_2(M)$.

Solution : On a $\overrightarrow{Is_2(M)} = \sigma_2(\overrightarrow{IM}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y-1 \\ x-1 \end{pmatrix}$. Puis $\overrightarrow{Ig_2(M)} = \overrightarrow{Is_2(M)} + e_2 = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x-1 \end{pmatrix}$, et enfin $\overrightarrow{Og_2(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Ig_2(M)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ y \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$: les coordonnées de $g_2(M)$ sont $(z+1, y+1, x-1)$. À titre de vérification, on vérifie que $g_2(I) = (1, 2, 0) = I + e_2$.

4. (1,5 pt) Soit $r = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Calculer $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$ et montrer que r est une rotation dont on déterminera les caractéristiques géométriques.

Solution : $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On voit que $R \in \mathrm{SO}(3)$ et $R(e_2) = e_2$, donc r est une rotation d'axe $D = \mathbb{R}e_2$. Comme les vecteurs e_1 et e_3 sont orthogonaux à e_2 et sont changés en leurs opposés, on voit que r est le demi-tour d'axe D (i.e. la rotation d'axe $\mathbb{R}e_2$ et d'angle π).

5. (2,5 pts) Soit $h = g_2 \circ g_1$. Calculer $h(I)$ puis le vecteur $\overrightarrow{Ih(I)}$. Puis, combinant ceci à la question précédente, déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de h.

Solution : D'après les calculs précédents, les coordonnées de $g_1(I)$ sont $(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 0)$ et donc celles de $h(I) = g_2(g_1(I))$ sont $(z_1 + 1, y_1 + 1, x_1 - 1) = (1, 3, 0)$. Donc $h(I) = I + 2e_2$. D'autre part, la partie linéaire de h est $\sigma_2 \circ \sigma_1 = r$, qui est le demi-tour d'axe $D = \mathbb{R}e_2$. Comme $h(I) = I + 2e_2$, il résulte du cours (§7.4.8) que h est le vissage de vecteur $v = 2e_2$, d'axe $\mathcal{D} = I + D$ orienté par v et d'angle π.

Exercice 4. (6 pts) Soient A, B, C trois points distincts du plan affine $\mathcal{P}$.

1. (1 pt) On fixe $O \in \mathcal{P}$. Soit G le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. Montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$.

Solution : Soit P un point arbitraire de $\mathcal{P}$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\frac{1}{3}\big(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\big) = \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}\big) = \overrightarrow{PO} + \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\big) = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{PG}.$$

2. (1 pt) Soit I le milieu du segment $[A, B]$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$.

Solution : Comme I est le milieu de $[A, B]$, on a $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$, donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BI}$.

3. (1 pt) Montrer que $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = 0$.

Solution : D'après la question 1) appliquée à $P = G$, on a

$$(*) \qquad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

En ajoutant à ceci l'égalité $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = 0$, on obtient $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = 0$.

4. (2 pts) Soit J (resp. K) le milieu du segment $[B, C]$ (resp. $[C, A]$). Montrer que G appartient à chacune des droites (CI), (AJ) et (BK).

Solution : L'égalité précédente se récrit : $\overrightarrow{CG} = 2(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI})$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$. Ceci montre que G appartient à la droite (CJ) et, plus précisément, que G appartient au segment $[C, J]$ et est situé aux deux-tiers de ce segment en partant de C.
Si J (resp. K) est le milieu de $[B, C]$ (resp. $[C, A]$), on a $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = 0$ (resp. $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{AK} = 0$), et en ajoutant ceci à l'égalité $(*)$, on obtient $2\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GA} = 0$ (resp. $2\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GB} = 0$). On en déduit comme précédemment que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}, \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK},$$

et ceci montre que G appartient aux droites (AJ) et (BK), et plus précisément aux segments $[A, J]$ et $[B, K]$, à chaque fois aux deux-tiers du segment en partant du sommet.
Ceci montre le fait bien connu que : « les médianes d'un triangle sont concourrantes aux deux-tiers de leur longueur », où la médiane issue d'un sommet désigne le segment joignant un sommet au milieu du côté opposé, et où la longueur est comptée à partir du sommet.

5. (1 pt) Faire un dessin représentant 3 points non alignés A, B, C, puis placer approximativement les points I, J, K et déterminer graphiquement le point G.

Solution : On dessine un triangle non aplati (ABC), puis on place les milieux I, J, K des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$, puis on trace les droites (ou les segments) joignant C à I, A à J et B à K ; elles se coupent en un point G, qui est l'isobarycentre (centre de gravité) du triangle (ABC).

Exercice 5. (9 pts) Soient $(\mathcal{P}, P)$ un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$. On note (x, y) les coordonnées dans ce repère. Soit

$$\mathcal{C} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 8x - 8y - 4 = 0\}.$$

Soit ϕ la forme polaire de la forme quadratique $Q(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$.

1. (1 pt) Écrire la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi)$.

Solution : $S = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (1 pt) Calculer le polynôme caractéristique $P_S(X)$ et déterminer ses racines $\lambda_1 < \lambda_2$.

Solution : $P_S(X) = X^2 - 10X + 24$. Le discriminant réduit est $5^2 - 24 = 1$, donc les racines sont 5 ± 1, i.e. 4 et 6.

3. (2 pts) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ où u_1 (resp. u_2) est un vecteur propre de S pour la valeur propre λ_1 (resp. λ_2). Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$.

Solution : On a $S - 4I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on voit que $C_1 + C_2 = 0$. Donc un vecteur propre unitaire pour la valeur propre $\lambda_1 = 4$ est $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis $S - 6I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'on voit que $C_2 - C_1 = 0$. Donc un vecteur propre unitaire pour la valeur propre $\lambda_2 = 6$ est $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (2 pts) On note (x_1, x_2) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Écrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$, puis écrire l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Solution : La matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^tPSP = P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, donc la partie quadratique $Q(x_1, x_2)$ est $4x_1^2 + 6x_2^2$. D'autre part, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, donc $x + y = \sqrt{2}x_1$. Donc l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $4x_1^2 + 6x_2^2 - 8\sqrt{2}x_1 - 4 = 0$, ou encore : $2x_1^2 + 3x_2^2 - 4\sqrt{2}x_1 - 2 = 0$.

5. (1,5 pt) Écrire l'équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2} \pm \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, en déterminant explicitement l'expression de X (resp. Y) en fonction de x_1 (resp. x_2).

Solution : On a $2x_1^2 - 4\sqrt{2}x_1 = 2(x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1) = 2[(x_1 - \sqrt{2})^2 - 2]$, donc en posant $X = x_1 - \sqrt{2}$ et $Y = x_2$, on obtient l'équation $2X^2 + 3Y^2 = 6$, d'où $\dfrac{X^2}{3} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$, et donc $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}$.

6. (0,5 + 1 = 1,5 pt) Soit I le centre de $\mathcal{C}$. Déterminer les coordonnées de I dans le repère $\mathcal{R}$, puis dans le repère $\mathcal{R}_0$.

Solution : Le centre de l'ellipse $\mathcal{C}$ est le point I de coordonnées $X = 0 = Y$, c.-à.-d., $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_2 = 0$. Alors les coordonnées (x, y) de I dans le repère $\mathcal{R}_0$ sont : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (5 pts) Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine de dimension 3 et soient A_0, A_1, A_2, A_3 quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$, i.e. tels que le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ qu'ils engendrent soit égal à $\mathcal{E}$. Soient B_0, B_1, B_2, B_3 quatre points arbitraires de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. (On pourra commencer, supposant f donnée, par montrer l'unicité de $u = \overrightarrow{f}$ puis celle de f, et montrer ensuite l'existence de f.)

Solution : Supposons f donnée et soit $u = \overrightarrow{f}$ sa partie linéaire. Alors on a

$$(*) \qquad u(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}, \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3,$$

et u est entièrement déterminée par ces égalités, puisque par hypothèse les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de E. De plus, f est uniquement déterminée par la donnée de u et du point $B_0 = f(A_0)$, puisque pour tout point $M \in \mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{B_0f(M)} = u(\overrightarrow{A_0M})$ et donc $f(M) = B_0 + u(\overrightarrow{A_0M})$. Ceci montre l'unicité de f, si f existe.

Réciproquement, ce raisonnement, pris en sens inverse, permet de construire f. En effet, comme $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3})$ est une base de E, il existe un (unique) endomorphisme u de E défini par $(*)$. Définissons alors l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par :

$$(**) \qquad \forall M \in \mathcal{E}, \qquad f(M) = B_0 + u(\overrightarrow{A_0M}).$$

Alors, on a $f(A_0) = B_0$ et donc, pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{f(A_0)f(M)} = \overrightarrow{B_0f(M)} = u(\overrightarrow{A_0M}),$$

et ceci montre que f est une application affine, de partie linéaire u. De plus, pour $i = 1, 2, 3$, on a $f(A_i) = B_0 + \overrightarrow{B_0B_i} = B_i$. L'existence de f est donc démontrée.