Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé de l'examen du 29 juin 2012 (3h)

Exercice 1 (10 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 2z = 1$ et soient P la direction de $\mathcal{P}$ et σ la partie linéaire de s.

1. (4 pts) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P, puis choisir un point $I \in \mathcal{P}$ et pour tout point $M = (x, y, z)$ calculer le vecteur $\overrightarrow{Is(M)}$ puis déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$.

Solution : Le plan vectoriel P a pour équation $0 = x + y - 2z = (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$, donc le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à P. On a $(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n}) = 6$. Donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\sigma(v) = v - 2\frac{(v \mid \overrightarrow{n})}{(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n})}\overrightarrow{n} = v - \frac{(v \mid \overrightarrow{n})}{3}\overrightarrow{n}.$$

On peut choisir le point $I = (1, 0, 0)$. Alors, comme $s(I) = I$, on a

$$\overrightarrow{Is(M)} = \overrightarrow{s(I)s(M)} = \sigma(\overrightarrow{IM}) = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(x - 1 + y - 2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 2z - 2 \\ -x + 2y + 2z + 1 \\ 2x + 2y - z - 2 \end{pmatrix}.$$

Puis, notant O le point $(0, 0, 0)$, on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \overrightarrow{Os(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Is(M)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{Is(M)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 2z + 1 \\ -x + 2y + 2z + 1 \\ 2x + 2y - z - 2 \end{pmatrix}.$$

Soit t_w la translation de vecteur $w = 3e_2$ et soit $g = t_w \circ s$.

2. (2 pts) Déterminer les projections orthogonales v et u de w sur $D = P^\perp$ et P respectivement.

Solution : On a $v = \dfrac{(w \mid \overrightarrow{n})}{(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n})}\overrightarrow{n} = \dfrac{3}{6}\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $u = w - v = w - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de g.

Solution : D'après le cours, on sait que g est la symétrie glissée, de vecteur de glissement $u \in P$, par rapport à un plan affine $\mathcal{P}'$, parallèle à $\mathcal{P}$, qui est l'ensemble des points fixes de la symétrie orthogonale $f = t_{-u} \circ g = t_v \circ s$. Pour déterminer $\mathcal{P}'$, écrivons que $\mathcal{P}' = I + \lambda v + P$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est déterminé par la condition que $I' = I + \lambda v$ soit un point fixe de $f = t_{-u} \circ g = t_v \circ s$. D'abord, on a

$$s(I') = s(I + \lambda v) = s(I) + \sigma(\lambda v) = I - \lambda v$$

(la dernière égalité car $s(I) = I$ et $v \in P^\perp$). Donc $t_v(s(I')) = I + (1 - \lambda)v$, et ceci égale $I' = I + \lambda v$ si et seulement si $\lambda = 1/2$. Donc g est la symétrie glissée, de vecteur de glissement $u \in P$, par rapport au plan affine $\mathcal{P}' = I + (1/2)v + P = \mathcal{P} + (1/2)v$. Son équation s'obtient comme suit : $M' = (x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}'$ si et seulement si $M = M' - (1/2)v = M' - (1/4)\overrightarrow{n}$ appartient à $\mathcal{P}$, et dans ce cas on a

$$x + y - 2z = (\overrightarrow{OM'} \mid \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{n}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n}) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

donc l'équation de $\mathcal{P}'$ est $x + y - 2z = 5/2$.

Exercice 2 (14 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. (1 pt) Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/6$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.

Solution : On a $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1 pt) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\det(A)$.

Solution : On voit facilement que les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, donc $A \in O(3)$. De plus, en développant par rapport à la 1ère ligne, on obtient que $\mathrm{d\acute{e}t}(A) = -1$.

3. (2 pts) Écrire la matrice $B = RA$, montrer que $B \in O(3)$ et calculer $\mathrm{d\acute{e}t}(B)$.

Solution : On a

$$B = RA = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $A, R \in O(3)$ et que $O(3)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, alors $B \in O(3)$. De plus, $\mathrm{d\acute{e}t}(B) = \mathrm{d\acute{e}t}(R)\,\mathrm{d\acute{e}t}(A) = -1$, donc $B \in O^-(3)$.

4. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (L'angle à trouver θ n'est pas, a priori, de la forme $q\pi$, avec $q \in \mathbb{Q}$; pour le déterminer on se contentera de donner la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)

Solution : Comme $B \in O^-(3)$ et $B \neq -I_3$, alors $D = \mathrm{Ker}(B + I_3)$ est de dimension 1, donc B est soit la symétrie orthogonale σ_P par rapport au plan $P = D^\perp$, soit une « rotation gauche » d'axe D et d'angle θ. (Le cas $\theta = 0$ donne σ_P.) On a $2\cos(\theta) + \mathrm{d\acute{e}t}(B) = 2\cos(\theta) - 1 = \mathrm{Tr}(B) = -1/2$, d'où $\cos(\theta) = 1/4$. Puis

$$\left(\begin{array}{c} B + I_3 \\ \hline I_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 + \sqrt{3}C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donc D est engendrée par $f = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et l'on choisit ce vecteur pour orienter D. Alors $x = e_2$ n'appartient pas à D et donc le signe de $\sin(\theta)$ est celui de $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathcal{B}}(e_2, Be_2, f) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{3} > 0$. Donc B est la rotation gauche d'axe orienté et engendré par $f = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = 1/4$ et $\sin(\theta) > 0$ (i.e. $\sin(\theta) = \sqrt{15}/4$).

5. (1 pt) Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B + I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente (on ne cherchera pas à calculer explicitement les f_i). Pour $i = 1, 2, 3$, exprimer Bf_i dans la base $\mathcal{C}$.

Solution : D'après la question précédente, la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par B est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, i.e. on a $\begin{cases} Bf_1 = \cos(\theta)f_1 + \sin(\theta)f_2 \\ Bf_2 = -\sin(\theta)f_1 + \cos(\theta)f_2 \\ Bf_3 = -f_3. \end{cases}$

6. (3 pts) Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ comme dans la question précédente, et pour $i = 1, 2, 3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)

Solution : On a $u(f'_i) = SBS^{-1}Sf_i = SBf_i$, donc on déduit de la question précédente que :

$$\begin{cases} u(f'_1) = S(\cos(\theta)f_1 + \sin(\theta)f_2) = \cos(\theta)f'_1 + \sin(\theta)f'_2, \\ u(f'_2) = S(-\sin(\theta)f_1 + \cos(\theta)f_2) = -\sin(\theta)f'_1 + \cos(\theta)f'_2, \\ u(f'_3) = S(-f_3) = -f'_3, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $S \in \mathrm{SO}(3)$, la base orthonormée $\mathcal{C}'$ est directe, et ce qui précède montre que u est la rotation gauche d'axe orienté et engendré par $f_3' = Sf_3$ et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = 1/4$ et $\sin(\theta) > 0$.
Si $S \in O^-(3)$, la base orthonormée $\mathcal{C}' = (f_1', f_2', f_3')$ est indirecte, donc la base $\mathcal{D} = (f_1', f_2', -f_3')$ est directe, et donc u est la rotation gauche d'axe orienté et engendré par $-f_3'$ et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = 1/4$ et $\sin(\theta) > 0$. On peut aussi considérer la base orthonormée directe $\mathcal{D}' = (f_1', -f_2', f_3')$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}'}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc u est aussi la rotation gauche d'axe orienté et engendré par $f_3' = Sf_3$ et d'angle $-\theta$.

7. (2 pts) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR = R^{-1}BR$.

Solution : Dans la question 4., on a orienté $D = \mathrm{Ker}(B + I_3)$ par le choix du générateur $f = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou, ce qui revient au même, par le choix du vecteur unitaire $f_3 = \dfrac{1}{\|f\|} f$). Remarquons que R^{-1} est la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $-\pi/6$, et calculons :

$$f' = R^{-1} f = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, comme $S = R^{-1}$ appartient à $\mathrm{SO}(3)$, il résulte de la question précédente que C est la rotation gauche d'axe orienté et engendré par f' et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = 1/4$ et $\sin(\theta) > 0$.

Exercice 3 (12 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. (3 pts) Soit $A = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.

Solution : Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On a

$$(C_1 \mid C_1) = (1/16)(9 + 6 + 1) = 1 = (C_3 \mid C_3), \qquad (C_2 \mid C_2) = (1/16)(6 + 4 + 6) = 1,$$
$$(C_1 \mid C_2) = (1/16)\sqrt{3}(3 - 2 - 1) = 0 = (C_2 \mid C_3), \qquad (C_1 \mid C_3) = (1/16)(-3 + 6 - 3) = 0.$$

Donc $A \in O(3)$. Pour voir si $\mathrm{dét}(A) = 1$ ou -1, on applique le résultat de l'exercice 10 de la feuille 6. « Négligeant » le facteur $(1/4)$ qui précède A, considérons le coefficient 3 en bas à droite ; le mineur correspondant est

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{vmatrix} = 12,$$

qui est de même signe que 3. (En fait, pour être précis, le coefficient de A en bas à droite est $3/4$, et le mineur correspondant de A est $\begin{vmatrix} 3/4 & \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & 4/4 \end{vmatrix}$ qui égale $3/4$.) Donc, d'après l'exercice 10 de la feuille 6, on sait que $\mathrm{dét}(A) = 1$.

2. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Solution : Comme $A \in \mathrm{SO}(3)$ et $A \neq I_3$, on sait que A est une rotation d'axe $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et d'angle θ tel que $2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{Tr}(A) = (1/4)(3 + 2 + 3) = 2$, d'où $\cos(\theta) = 1/2$, donc $\theta = \pm\pi/3$. Puis

$$\begin{pmatrix} 4(A - I_3) \\ \hline I_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & \sqrt{6} & -1 \\ -\sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ -1 & \sqrt{6} & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \sqrt{6} & -1 \\ 0 & -2 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donc D est engendrée par le vecteur $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_3$ et l'on choisit ce vecteur pour orienter D. Alors $x = 4e_1$ n'appartient pas à D et donc le signe de $\sin(\theta)$ est celui de $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(x, Ax, f) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\sqrt{6}$. Donc A est la rotation d'axe engendré et orienté par $f = e_1 - e_3$ et d'angle $\pi/3$ (ou bien d'axe engendré et orienté par $-f = e_3 - e_1$ et d'angle $-\pi/3$).

On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui envoie tout point $M = (x, y, z)$ sur le point $M' = (x', y', z')$, où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. (1 pt) Quelle est la partie linéaire de g ?

Solution : Notons O le point $(0, 0, 0)$. On a $g(O) = (2, 2, 0)$ et pour tout $M = (x, y, z)$ on a $\overrightarrow{g}(OM) = \overrightarrow{g(O)g(M)} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Mat}\mathcal{B}(\overrightarrow{f}) = A$, i.e. $\overrightarrow{g}$ est la rotation d'axe engendré et orienté par $f = e_1 - e_3$ et d'angle $\pi/3$.

4. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de g. (Soient $w = 2e_1 + 2e_2$, π_D la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, et $u = \pi_D(w)$, on pourra chercher les points fixes de $t_{-u} \circ g$, où t_{-u} désigne la translation de vecteur $-u$).

Solution : D'après le cours, on sait que g est un vissage, de vecteur de vissage $u = \pi_D(w)$, d'axe une droite affine $\mathcal{D} = I + D$, orientée par $f = e_1 - e_3$, et d'angle $\theta = \pi/3$. De plus, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points fixes de la rotation affine $r = t_{-u} \circ g$.

On a $u = \dfrac{(w \mid f)}{(f \mid f)} f = \dfrac{2}{2} f = f$. Les points fixes $I(x, y, z)$ de r vérifient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{c.-à.-d.} \qquad (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où le système

$$\begin{cases} -x + \sqrt{6}y - z = -4 \\ -\sqrt{6}x - 2y - \sqrt{6}z = -8 \\ -x + \sqrt{6}y - z = -4. \end{cases}$$

Les lignes L_1 et L_3 sont identiques, et en faisant $\sqrt{6}L_1 - L_2$ on obtient $8y = 8 - 4\sqrt{6}$, d'où $y = 1 - \sqrt{3/2}$, puis en reportant dans la ligne 1 :

$$x + z = 4 + \sqrt{6}y = 4 + \sqrt{6} - 3 = 1 + \sqrt{6}.$$

Donc $\mathcal{D}$ est la droite affine donnée par les équations $y = 1 - \sqrt{3/2}$ et $x + z = 1 + \sqrt{6}$; c'est la droite de direction $D = \mathbb{R}(e_1 - e_3)$ passant, par exemple, par le point $I = (1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{3/2}, 0)$. Et donc g est le vissage d'axe $\mathcal{D}$, orienté par $f = e_1 - e_3$, d'angle $\pi/3$, et de vecteur de glissement $u = f = e_1 - e_3$.

Exercice 4 (15 pts). 1. (3 pts) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\alpha A + \beta I_p$ est diagonalisable et exprimer ses valeurs propres en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de A.

Solution : Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$, où $Af_i = \lambda_i f_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. Alors $(\alpha A + \beta I_p)(f_i) = (\alpha\lambda_i + \beta)f_i$, et ceci montre que $\alpha A + \beta I_p$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les $\alpha\lambda_i + \beta$, pour $i = 1, \ldots, p$.

2. (1,5 pt) Soient $n \in \mathbb{N}^\times$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$q(x_1, \ldots, x_{2n}) = 2(x_1x_{n+1} + x_2x_{n+2} + \cdots + x_nx_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} 2\, x_i\, x_{n+i},$$

et soit ϕ la forme polaire de q. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Solution : On a $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$.

3. (2 pts) On suppose dans cette question que $n = 1$. Écrire dans ce cas la matrice A et déterminer ses valeurs propres et une base orthonormée (f, g) de vecteurs propres.

Solution : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie orthogonale qui échange e_1 et e_2, donc le vecteur unitaire $f = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ (resp. $g = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$) est vecteur propre pour la valeur propre 1 (resp. -1).

4. (3 pts) On revient au cas n arbitraire. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ associé à A et, pour $i = 1, \dots, n$, soit P_i le plan de $\mathbb{R}^{2n}$ engendré par e_i et e_{n+i}. Montrer que P_i est stable par u et, en utilisant la question précédente, construire une base orthonormée (f_i, g_i) de P_i formée de vecteurs propres de A. Puis écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer ainsi les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ de A (comptées avec multiplicité).

<u>Solution</u> : Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $Ae_i = e_{n+i}$ et $Ae_{n+i} = e_i$, donc A induit un endomorphisme u_i de P_i tel que $\mathrm{Mat}_{(e_i, e_{n+i})}(u_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, d'après la question précédente, les vecteur unitaires $f_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_{n+i})$ et $g_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_{n+i})$ forment une base de P_i, et l'on a $u(f_i) = f_i$ et $u(g_i) = -g_i$.
Comme $\mathbb{R}^{2n} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, alors $(f_1, g_1, \dots, f_n, g_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$, et la matrice de u dans cette base est diagonale, les coefficients diagonaux étant $(1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1)$; en d'autres termes, dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array}\right)$. On obtient ainsi que les valeurs propres de A sont 1 et -1, chacune de multiplicité n.

5. (1,5 pt) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha > 0$, soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$Q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \beta\, x_i^2 + \alpha\, q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \beta\, x_i^2 + 2\,\alpha\,(x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n}),$$

et soit ψ sa forme polaire. Écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$.

<u>Solution</u> : On a $B = \left(\begin{array}{c|c} \beta I_n & \alpha I_n \\ \hline \alpha I_n & \beta I_n \end{array}\right) = \alpha A + \beta I_{2n}$.

6. (4 pts) En utilisant la question 1), déterminer en fonction des valeurs de β la signature de Q (on rappelle que $\alpha > 0$). On indiquera en particulier dans quels cas Q est dégénérée.

<u>Solution</u> : D'après ce qui précède et la question 1), les valeurs propres de B sont $\beta - \alpha$ et $\beta + \alpha$, chacune de multiplicité n. Comme, d'après le théorème de diagonalisation simultanée, la signature de Q est donnée par le nombre de valeurs propres de B qui sont > 0 ou < 0, on obtient que la signature de Q est égale à :

$$\begin{cases} (0, 2n) & \text{si } \beta < -\alpha, \\ (0, n) & \text{si } \beta = -\alpha, \\ (n, n) & \text{si } -\alpha < \beta < \alpha, \\ (n, 0) & \text{si } \beta = \alpha, \\ (2n, 0) & \text{si } \beta > \alpha. \end{cases}$$

En particulier, Q est dégénérée si et seulement si $\beta = \pm\alpha$.

Exercice 5 (12 pts)**.** Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite fixée, soit $b \in \mathbb{R}^{\times}$ et soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 2\,b\,x_{n+1} + b^2\,x_n = c_n\}$.

1. (3 pts) Expliquer par une phrase que $\mathcal{E}_c$ est non vide, puis montrer que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$, et déterminer sa direction E.

<u>Solution</u> : $\mathcal{E}_c$ est non vide car, pour tout $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, la relation de récurrence $x_{n+2} - 2\,b\,x_{n+1} + b^2\,x_n = c_n$ permet de construire, de façon unique, une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_c$ telle que $x_0 = a_0$ et $x_1 = a_1$. (On a alors $x_2 = c_0 - b^2 a_0 + 2ba_1$, puis $x_3 = c_1 - b^2 a_1 + 2bx_2$, etc.) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - 2\,b\,u_{n+1} + b^2\,u_n = 0.$$

Alors, pour tout $x, y \in \mathcal{E}_c$, la suite $\overrightarrow{xy} = y - x$ appartient à E. Réciproquement, pour tout $x \in \mathcal{E}_c$ et $u \in E$, la suite $y = x + u$ appartient à $\mathcal{E}_c$ et vérifie $\overrightarrow{xy} = u$. Ceci montre que $\{\overrightarrow{xy} \mid x, y \in \mathcal{E}_c\} = E$ et donc, d'après la proposition 7.2.6 du cours, que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$ de direction E.

2. (3 pts) Déterminer $\dim(E)$, puis montrer que la suite géométrique $u = (b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $v = (nb^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

Solution : On a déjà vu que l'application $E \to \mathbb{R}^2$, qui à toute suite u associe le couple (u_0, u_1) formé par ses deux premiers termes, est linéaire et bijective, donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Donc $\dim(E) = 2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b^{n+2} - 2b \cdot b^{n+1} + b^2 \cdot b^n = 0$ et

$$(n+2)b^{n+1} - 2b \cdot (n+1)b^n + b^2 \cdot nb^{n-1} = nb^{n+1}(1-2+1) + 2b^{n+1}(1-1) = 0,$$

donc les suites u et v appartiennent à $\mathcal{E}_c$. Elles sont linéairement indépendantes, car $(u_0, u_1) = (1, b)$ et $(v_0, v_1) = (0, 1)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$. (On peut aussi écrire que si $\alpha u + \beta v = 0$, alors $\alpha \cdot 1 = 0 = \alpha \cdot b + \beta \cdot 1$, d'où $\alpha = 0 = \beta$.)

3. (2 pts) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $a_0 = 1$ et $a_1 = 2b$, et soit $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_n = a_0\, c_{n-2} + a_1\, c_{n-3} + \cdots + a_{n-2}c_0 = \sum_{i=0}^{n-2} a_i\, c_{n-2-i} = \sum_{i=0}^{n-2} a_{n-2-i}\, c_i$$

(en particulier, on a $C_0 = 0 = C_1$). Sans chercher à calculer la suite a, montrer que C appartient à $\mathcal{E}_c$.

Solution : Pour tout n, $C_{n+2} - 2\,b\,C_{n+1} + b^2\,C_n$ est égal à :

$$\underbrace{a_0}_{=1}\, c_n + \underbrace{(a_1 - 2\,b\,a_0)}_{=0}\, c_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \underbrace{(a_{n-i} - 2\,b\,a_{n-1-i} + b^2\,a_{n-2-i})}_{=0 \text{ car } a\in E}\, c_i = c_n,$$

donc $C \in \mathcal{E}_c$.

4. (1 pt) Écrire l'élément $a \in E$ de la question précédente comme combinaison linéaire des suites u et v de la question 2), puis donner une formule exprimant a_n en fonction de b.

Solution : Comme (u, v) est une base de E, on peut écrire de façon unique $a = \alpha\, u + \beta\, v$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En prenant les termes aux crans 0 et 1, on obtient le système

$$\begin{cases} 1 = a_0 = \alpha, \\ 2\,b = a_1 = \alpha\, b + \beta, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = b$, donc $a = u + b\,v$ et $a_n = b^n + b \cdot nb^{n-1} = (n+1)b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (1,5 pt) On prend $c_i = (i+1)\, b^{i+2}$ pour tout i. On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$. Donner alors une formule exprimant $C_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} a_i\, c_{n-2-i}$ en fonction de b.

Solution : On a $C_0 = 0 = C_1$ et, pour tout $n \geq 2$:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-2} (i+1)b^i\,(n-1-i)b^{n-i} = b^n \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)$$

(pour la dernière égalité, on a posé $j = i+1$). Comme

$$\sum_{i=1}^{n-1} in = n\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

on obtient que $C_n = b^n \dfrac{n(n-1)}{6}(3n - 2n + 1) = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6} b^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris pour $n = 0$ et $n = 1$).

6. (1,5 pt) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de $\mathcal{E}_c$ tel que $x_0 = b$ et $x_1 = b^2$. Écrire $w = x - C$ comme combinaison linéaire des suites u et v de la question 2), puis donner une formule exprimant x_n en fonction de b.

Solution : Comme x et C appartiennent à $\mathcal{E}_c$, alors $w = x - C$ appartient à E donc s'écrit $\alpha\, u + \beta\, v$. Comme $C_0 = 0 = C_1$, on obtient, en prenant les termes aux crans 0 et 1, le système

$$\begin{cases} b = x_0 = \alpha, \\ b^2 = x_1 = \alpha\, b + \beta, \end{cases}$$

d'où $\alpha = b$ et $\beta = 0$. Donc $w = b\, u$ et $x = w + C = b\, u + C$, et donc $\boxed{x_n = b^{n+1} + \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6} b^n,}$ pour tout n.

Exercice 6 (12 pts)**.** On admet que, pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\exp({}^tB) = {}^t\exp(B)$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A qui sont antisymétriques (i.e. ${}^tA = -A$).

1. (3 pts) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer, en le justifiant soigneusement, que $\exp(A) \in O(n)$.

Solution : D'après ce qui précède, on a ${}^t\exp(A)\exp(A) = \exp({}^tA)\exp(A) = \exp(-A)\exp(A)$. De plus, comme $-A$ et A commutent, on a $\exp(-A)\exp(A) = \exp(-A + A) = \exp(0) = I_n$. On a donc ${}^t\exp(A)\exp(A) = I_n$ et ceci montre que $\exp(A) \in O(n)$.

2. (3 pts) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On admet que la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \text{dét}(\exp(tA))$ est continue. En utilisant ceci, montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}(n)$.

Solution : Pour tout $t \in [0, 1]$, $tA \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et donc $\exp(tA) \in O(n)$, d'où $\phi(t) \in \{-1, 1\}$. D'autre part, comme $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\phi([0, 1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $\phi(0) = \text{dét}(I_n) = 1$, on en déduit que $\phi(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, d'où $\text{dét}(A) = \phi(1) = 1$. Donc $A \in \mathrm{SO}(n)$.

3. (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par A. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer les valeurs propres de A et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A, puis écrire les matrices $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

Solution : $P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 + 1)$ a pour racines 0 et $\pm i$. De plus, il est clair que $e_3 \in \mathrm{Ker}(A)$.
Cherchons des vecteurs propres pour $\lambda = \pm i$. Comme A laisse stable le plan engendré par e_1 et e_2, il suffit d'écrire :

$$\left(\begin{array}{cc} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 - \lambda C_2} \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 + \lambda^2 = 0 & -\lambda \\ \hline 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{array}\right)$$

donc $e_1 - ie_2$ (resp. $e_1 + ie_2$) est vecteur propre pour la valeur propre i (resp. $-i$). Pour $\mathcal{C} = (e_1 - ie_2, e_1 + ie_2, e_3)$, on a donc

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (3 pts) Calculer P^{-1} puis, en utilisant que $P^{-1}\exp(tA)P = \exp(tA')$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tA)$ et montrer que c'est la matrice d'une rotation que l'on précisera.

Solution : L'inverse de $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{\text{dét}(Q)}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\exp(tA) = P\exp(tA')P^{-1} = P\exp\left(\begin{pmatrix} it & 0 & 0\\ 0 & -it & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0\\ 0 & e^{-it} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$ est égal à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -i & i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0\\ 0 & e^{-it} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & i/2 & 0\\ 1/2 & -i/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} & 0\\ -ie^{it} & ie^{-it} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & i/2 & 0\\ 1/2 & -i/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (e^{it}+e^{-it})/2 & i(e^{it}-e^{-it})/2 & 0\\ -i(e^{it}-e^{-it})/2 & (e^{it}+e^{-it})/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0\\ \sin(t) & \cos(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc $\exp(tA)$ est la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle t.