Devoir du 17 décembre 2019 (durée 1h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce devoir est noté sur **20**. Le barème donné (sur 24) est indicatif; les notes > 20 seront comptées comme 20. Le correcteur tiendra compte de **la précision, présentation et lisibilité** des arguments. En particulier, les réponses illisibles ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. (11 pts) Soit G un groupe abélien de cardinal $n = 216$.

1. Pour chaque diviseur premier p de n, déterminer le cardinal de la composante p-primaire de G.

   Correction. On a $n = 4{\cdot}54 = 8{\cdot}27 = 2^3 \times 3^3$. Donc G est le produit de sa composante 2-primaire G_2 et de sa composante 3-primaire G_3, et l'on a $|G_2| = 2^3 = 8$ et $|G_3| = 3^3 = 27$. $\square$

2. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens de cardinal 216 et donner pour chacun la liste des facteurs invariants.

   Correction. Il y a trois possibilités pour G_2:

   $$a)\ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \qquad b)\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad c)\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$

   et trois possibilités pour G_3:

   $$d)\ \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \qquad e)\ \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad f)\ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3.$$

   Comme $G = G_2 \times G_3$ cela donne pour G les $3 \times 3 = 9$ possibilités ci-dessous. Dans chaque cas, on a fait un tableau où la 1ère (resp. 2ème) ligne indique le cardinal des facteurs cycliques de G_2 (resp. G_3); le produit de chaque colonne donnant les facteurs invariants.

Cas ad

8
27
$d_1 = 216$

Cas ae

	8
3	9
$d_1 = 3$	$d_2 = 72$

Cas af

		8
3	3	3
$d_1 = 3$	$d_2 = 3$	$d_3 = 24$

Cas bd

2	4
	27
$d_1 = 2$	$d_2 = 108$

Cas be

2	4
3	9
$d_1 = 6$	$d_2 = 36$

Cas bf

	2	4
3	3	3
$d_1 = 3$	$d_2 = 6$	$d_3 = 12$

Cas cd

2	2	2
		27
$d_1 = 2$	$d_2 = 2$	$d_3 = 54$

Cas ce

2	2	2
	3	9
$d_1 = 2$	$d_2 = 6$	$d_3 = 18$

Cas cf

2	2	2
3	3	3
$d_1 = 6$	$d_2 = 6$	$d_3 = 6$

□

Exercice 2. (13 pts) On veut montrer qu'il n'existe pas de groupe simple de cardinal 132. On raisonne par l'absurde: soit G un groupe simple de cardinal $n = 132$. Pour tout diviseur premier de n, on note N_p le nombre de p-Sylows de G.

1. (3 pts) En justifiant votre réponse, déterminer N_{11} et donner les possibilités pour N_3.

Correction. On rappelle que si $|G| = p^a m$ avec $\mathrm{pgcd}(m, p) = 1$, alors chaque p-Sylow de G est de cardinal p^a et leur nombre est congru à 1 modulo p et divise m.
Par ailleurs, si $N_p = 1$ alors l'unique p-Sylow P est distingué; si G est simple cela entraîne que $G = P$, et comme le seul p-groupe simple est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ceci n'est possible que si $n = p$.
Ici, comme G est simple et $|G| = 132 = 12 \cdot 11 = 4 \cdot 3 \cdot 11$, on a donc $N_p > 1$ pour $p \in \{2, 3, 11\}$. De plus, comme N_{11} divise 12 et est congru à 1 modulo 11, on a nécessairement $N_{11} = 12$.
Et N_3 est > 1 et divise $4 \cdot 11$ donc appartient à $\{2, 4, 11, 22, 44\}$; parmi ceux-ci, seuls 4 et 22 sont congrus à 1 modulo 3. Donc $N_3 \in \{4, 22\}$. □

2. (3 pts) Soit $p \in \{3, 11\}$ et soient $H \neq H'$ deux p-Sylows de G. Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.

Correction. Fixons $p = 3$ ou $p = 11$ et soient $H \neq H'$ deux p-Sylows de G. Alors $|H| = p = |H'|$ et donc H et H' sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et chacun est engendré par n'importe lequel de ses éléments $\neq e$. Soit $g \in H \cap H'$, si on avait $g \neq e$ on aurait $\langle g \rangle = H$ et $\langle g \rangle = H'$, d'où $H = H'$, une contradiction. Donc si $H \neq H'$ alors $H \cap H' = \{e\}$. $\square$

3. (3 pts) Pour $p \in \{3, 11\}$, on note K_p le nombre d'éléments de G d'ordre p. Déterminer K_{11} et exprimer K_3 en fonction de N_3.

Correction. Soit $p \in \{3, 11\}$ et soit g un élément d'ordre p. Alors g appartient à un p-Sylow de G. Réciproquement, pour $p = 3$ ou 11 tout p-Sylow H de G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc tout élément de $H - \{e\}$ est d'ordre p. D'autre la question précédente, les ensembles $H - \{e\}$ (chacun de cardinal $p - 1$) sont deux-à-deux disjoints lorsque H parcourt l'ensemble des p-Sylows de G.
Il résulte de ce qui précède que pour $p = 3$ ou 11 on a $K_p = N_p \cdot (p - 1)$. Donc $N_{11} = 12 \cdot 10 = 120$ et $K_3 = 2N_3$ est égal à 44 ou à 8. $\square$

4. (1 pt) Montrer que $N_3 \neq 22$ puis déterminer N_3.

Correction. Comme $K_{11} + K_3 < n = 132$, on ne peut avoir $N_3 = 22$. Donc $N_3 = 4$ et $K_3 = 8$. Il y a donc $120 + 8 = 128$ éléments d'ordre 11 ou bien 3 et il ne reste que quatre autres éléments: e, x_1, x_2, x_3. $\square$

5. (3 pts) En comptant les éléments d'ordre divisant 4, montrer que G possède un unique 2-Sylow. Conclure.

Correction. On sait que tous les 2-Sylows de G sont de cardinal 4 et qu'il en existe au moins un. Si P est un 2-Sylow, ses quatre éléments sont d'ordre divisant 4, donc ce ne sont aucun des 128 éléments d'ordre 11 ou 3, donc ce sont les quatre éléments restants: e, x_1, x_2, x_3. Ceci montre qu'il n'y a qu'un seul 2-Sylow P, qui est formé des quatre éléments e, x_1, x_2, x_3. Cet unique 2-Sylow est donc distingué, contredisant la simplicité de G. Il n'existe donc pas de groupe simple de cardinal 132.

$\square$