Devoir du 17 décembre 2019 (durée 1h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce devoir est noté sur **20**. Le barème donné (sur 24) est indicatif; les notes > 20 seront comptées comme 20. Le correcteur tiendra compte de **la précision, présentation et lisibilité** des arguments. En particulier, les réponses illisibles ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. (11 pts) Soit G un groupe abélien de cardinal $n = 216$.

1. Pour chaque diviseur premier p de n, déterminer le cardinal de la composante p-primaire de G.

2. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens de cardinal 216 et donner pour chacun la liste des facteurs invariants.

Exercice 2. (13 pts) On veut montrer qu'il n'existe pas de groupe simple de cardinal 132. On raisonne par l'absurde: soit G un groupe simple de cardinal $n = 132$. Pour tout diviseur premier de n, on note N_p le nombre de p-Sylows de G.

1. (3 pts) En justifiant votre réponse, déterminer N_{11} et donner les possibilités pour N_3.

2. (3 pts) Soit $p \in \{3, 11\}$ et soient $H \neq H'$ deux p-Sylows de G. Montrer que $H \cap H' = \{e\}$.

3. (3 pts) Pour $p \in \{3, 11\}$, on note K_p le nombre d'éléments de G d'ordre p. Déterminer K_{11} et exprimer K_3 en fonction de N_3.

4. (1 pt) Montrer que $N_3 \neq 22$ puis déterminer N_3.

5. (3 pts) En comptant les éléments d'ordre divisant 4, montrer que G possède un unique 2-Sylow. Conclure.