II. PRODUIT TENSORIEL ET APPLICATIONS

Séances des 9, 10, 16 et 17 octobre

7. Produit tensoriel

Soit A un anneau commutatif et soient M, N deux A-modules. On veut définir un A-module $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ qui soit engendré par les « produits » d'un élément de M par un élément de N, c.-à-d., par des éléments notés $m \otimes n$.

7.1. Deux motivations. —

7.1.1. Complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. — Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On veut plonger V dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$, appelé le « complexifié » de V. Voici deux façons de faire.

1ère méthode. Supposons V de dimension finie n. Choisissons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. Ceci permet d'identifier V à $\mathbb{R}^n$, via $\sum_k x_k e_k \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. On définit alors le complexifié $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ comme étant $\mathbb{C}^n$, c.-à-d., l'ensemble des combinaisons linéaires $z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n$, avec $z_k \in \mathbb{C}$.

Alors, $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une base de $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{V}_{\mathbb{C}} = 2n$.

2ème méthode. Plutôt que de choisir une base de V, prenons $\{1, i\}$ comme base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. Ceci conduit à définir $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ comme

$$\mathrm{V} \bigoplus i\mathrm{V},$$

c.-à-d., comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$, et on désigne le couple (u, v) par $u + iv$. La structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel est donnée, bien sûr, par

$$a \cdot (u + iv) = au + iav, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

[(0)] Version du 11/10/06

Comme $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2+1)$, pour définir une action de $\mathbb{C}$ sur $\mathrm{V} \oplus i\mathrm{V}$, il suffit de définir une action de i telle $i \cdot i \cdot w = -w$, pour tout $w \in \mathrm{V} \oplus i\mathrm{V}$. Comme la notation le suggère, on pose

$$i \cdot (v,0) = (0,v), \quad \text{c.-à-d.,} \quad i \cdot (v+0) = 0 + iv,$$

d'où nécessairement $i \cdot (0,v) = (-v,0)$. On obtient ainsi une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur

$$\mathrm{V}_{\mathbb{C}} = \mathrm{V} \bigoplus i\mathrm{V}.$$

Explicitement, il résulte de ce qui précède que

$$(a+ib)\cdot(u+iv) = (au-bv) + i(av+bu).$$

(Cette formule est parfois donnée comme définition de $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$, sans explications...)

Remarque 7.1. — C'est un exercice que de vérifier que les deux définitions précédentes coïncident, et donc qu'aucune d'elles ne dépend de la $\mathbb{R}$-base (de V ou de $\mathbb{C}$) choisie. (On aurait aussi pu prendre $\{1, j\}$ comme base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, où $j = \exp(2i\pi/3)$.)

On va voir que le produit tensoriel permet de définir de façon *canonique* (c.-à-d., sans aucun choix), l'espace vectoriel $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ « obtenu à partir de V par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ ».

Plus généralement, si $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'anneaux commutatifs et si M est un A-module, on obtiendra un B-module M_{B} « obtenu à partir de M par extension des scalaires de A à B ».

7.1.2. Produit tensoriel d'algèbres. — Une autre motivation est la suivante.

Définition 7.2. — Soient A, B deux anneaux commutatifs. On dit que B est une A-**algèbre** si l'on s'est donné un morphisme d'anneaux $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

Dans ce cas, B est un A-module, par « restriction des scalaires » via ϕ, c.-à-d., pour l'action $a \cdot b = \phi(a)b$.

Considérons le cas où $\mathrm{A} = \mathbb{C}$, et où l'on se donne les deux $\mathbb{C}$-algèbres $\mathrm{B} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{B}' = \mathbb{C}[\mathrm{Y}]$. On veut définir le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{C}}$ de sorte que l'on ait

$$\mathbb{C}[\mathrm{X}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathrm{Y}] = \mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}],$$

le terme de droite étant l'anneau des polynômes en deux variables, c.-à-d., l'ensemble des sommes finies

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j,$$

où $n \geqslant 0$ et $a_{ij} \in \mathbb{C}$. On voit ainsi que tout polynôme en X, Y est une **somme** de termes $\mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{Y})$; de plus, d'après l'écriture ci-dessus on peut se limiter au cas où P et Q sont des monômes. On prendra garde au fait qu'un polynôme en

X, Y arbitraire n'est pas, en général, égal à un produit de la forme $P(X)Q(Y)$. En effet, pour tout $R \in \mathbb{C}[X, Y]$, notons

$$V(R) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid R(x, y) = 0\}.$$

Si R est de la forme $P(X)Q(Y)$, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $\beta_1, \ldots, \beta_s$ les racines de P et Q, alors $V(R)$ est la réunion des droites verticales $x = \alpha_i$ et des droites horizontales $y = \beta_j$. Par contre, pour $R = XY - 1$, on a

$$V(R) = \{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{C}^\times\}$$

et cet ensemble n'est pas une réunion finie de droites. Ceci montre que $XY - 1$ ne peut s'écrire comme un produit $P(X)Q(Y)$. Ceci illustre la nécessité de considérer non seulement ces produits, mais l'ensemble de toutes les sommes de tels produits.

7.2. Applications bilinéaires. — Soient M, N, P trois A-modules.

Définition 7.3. — Soit ϕ une application d'ensembles $M \times N \to P$. On dit que ϕ est A-**bilinéaire** si elle est A-linéaire en chacune des variables, c.-à-d., si : $\forall\, a, a' \in A$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$,

$$\phi(am + a'm', n) = a\phi(m, n) + a'\phi(m', n); \tag{1}$$

$$\phi(m, an + a'n') = a\phi(m, n) + a'\phi(m, n'). \tag{2}$$

On note $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ l'ensemble de ces applications.

***Définition 7.4* (Applications à valeurs dans un A-module)**
Soit
X un ensemble. Si f, g sont deux applications de X dans P, et $a \in A$, on définit les applications $f + g$ et af par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (af)(x) = af(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Ceci munit l'ensemble des applications de X dans P, noté $\mathrm{Applic}(X, P)$, d'une structure de A-module.

Lemme 7.5. — 1) *L'ensemble* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *des morphismes de* A*-modules* $M \to N$ *est un sous-*A*-module de* $\mathrm{Applic}(M, N)$.

2) *De même,* $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ *est un sous-*A*-module de* $\mathrm{Applic}(M \times N, P)$.

Démonstration. — 1) Soient $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ et $a \in A$. Il faut montrer que l'application

$$a\phi + \psi : M \longrightarrow N, \qquad m \mapsto a\phi(m) + \psi(m),$$

est A-linéaire. Soient $m, m' \in \mathrm{M}$ et $b \in \mathrm{A}$. Alors,

$$\begin{aligned}(a\phi + \psi)(m + bm') &= a\phi(m + bm') + \psi(m + bm') \\ &= a\phi(m) + ab\phi(m') + \psi(m) + b\psi(m') \\ &= (a\phi + \psi)(m) + b(a\phi + \psi)(m').\end{aligned}$$

(Noter qu'on a utilisé la commutativité de A dans la dernière égalité). Ceci montre que $a\phi + \psi$ est A-linéaire, c.-à-d., appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

La démonstration du point 2) est tout-à-fait analogue (on vérifie la A-linéarité par rapport à chacune des variables), et est laissée au lecteur. □

Proposition 7.6. — *On a des isomorphismes de* A*-modules*

$$\mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})); \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})). \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le premier isomorphisme, le deuxième étant analogue. Notons

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})) \longrightarrow \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}), \quad \theta \mapsto \beta(\theta)$$

l'application définie par

$$\beta(\theta)(m, n) = \theta(m)(n),$$

pour tout $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$. On voit facilement que $\beta(\theta)$ est A-bilinéaire.

De plus, β est un morphisme de A-modules. En effet, d'après les définitions, l'on a

$$\begin{aligned}\beta(a\theta + \theta')(m, n) &= (a\theta + \theta')(m)(n) = (a\theta(m) + \theta'(m))(n) \\ &= a\theta(m)(n) + \theta'(m)(n) = (a\beta(\theta) + \beta(\theta'))(m, n).\end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer que β est un isomorphisme, il suffit d'exhiber une application inverse. Pour tout $\phi \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P})$ et tout $m \in \mathrm{M}$, soit $\alpha(\phi)(m)$ l'application $n \mapsto \phi(m, n)$. Cette application appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})$ puisque, pour m fixé, $\phi(m, -)$ est A-linéaire en la 2ème variable. Ainsi, on a obtenu une application

$$\alpha(\phi) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P}).$$

Montrons que cette application est A-linéaire, c.-à-d., que

$$\alpha(\phi)(m + am') = \alpha(\phi)(m) + a\alpha(\phi)(m')$$

(égalité d'applications de N vers P). Évaluant les deux membres en un élément $n \in \mathrm{N}$ arbitraire, ceci revient à montrer que

$$\phi(m + am', n) = \phi(m, n) + a\phi(m', n).$$

Or cette égalité est bien vérifiée, puisque ϕ est A-linéaire en la 1ère variable. Ceci montre que $\alpha(\phi)$ est A-linéaire, et donc que α définit une application

$$\alpha : \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})).$$

On vérifie alors facilement que $(\alpha \circ \beta)(\theta) = \theta$ et $(\beta \circ \alpha)(\phi) = \phi$ pour tout θ et ϕ. Ceci prouve la proposition. □

7.3. Produit tensoriel : définition et propriété universelle. — Soient M, N deux A-modules. On veut définir un A-module, noté $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ ou simplement $\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}$, qui soit formé des sommes de « produits » $m \otimes n$ d'un élément de M par un élément de N. On veut de plus que ce « produit » $\otimes$ vérifie les deux propriétés suivantes.

1) bi-additivité : $\begin{cases} (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n \\ m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'. \end{cases}$

2) « unicité de l'action de A » :

$$a \cdot (m \otimes n) = (am) \otimes n = m \otimes (an).$$

On forme donc le A-module libre $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})$, qui est l'ensemble de toutes les sommes formelles finies

$$\sum_{(m,n) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}} a_{m,n} e_{m,n},$$

avec $a_{m,n} \in \mathrm{A}$ et $a_{m,n} = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Soit K le sous-A-module engendré par les éléments de l'un des types suivants :

$$\begin{aligned} &(1)\ e_{am+m',n} - a e_{m,n} - e_{m',n}, \\ &(2)\ e_{m,an+n'} - a e_{m,n} - e_{m,n'}, \end{aligned}$$

pour $a \in \mathrm{A}$, $m, m' \in \mathrm{M}$, $n, n' \in \mathrm{N}$.

Définition 7.7. — On pose $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} = \mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})/\mathrm{K}$ et l'on note $m \otimes n$ l'image de $e_{m,n}$ dans $\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}$.

Remarque 7.8. — Il résulte des relations (1) et (2) que le produit $m \otimes n$ vérifie la condition 1) (bi-additivité) et la condition 2) :

$$a \cdot (m \otimes n) = (am) \otimes n = m \otimes (an).$$

En particulier, tout élément de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ est une somme finie d'éléments $m \otimes n$.

Proposition 7.9. — *Soit* $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$, *resp.* $(f_j)_{j \in \mathrm{J}}$, *un système de générateurs de* M, *resp.* N, *comme* A*-module. Alors* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ *est engendré comme* A*-module par les éléments* $e_i \otimes f_j$, *pour* $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{J}$.

Démonstration. — Soient $m \in \mathrm{M}$ et $n \in \mathrm{N}$. Par hypothèse, m et n s'écrivent comme des sommes finies

$$m = a_1 e_{i_1} + \cdots + a_r e_{i_r}, \qquad n = b_1 f_{j_1} + \cdots + b_s f_{j_s},$$

avec les a_t et b_u dans A. D'après les relations (1) et (2), on a

$$m \otimes n = \sum_{t=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_t b_u \, e_{i_t} \otimes f_{j_u}.$$

Puisque tout élément de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ est une somme finie d'éléments $m \otimes n$, il en résulte que les $e_i \otimes f_j$ engendrent $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ comme A-module. $\square$

***Théorème 7.10* (Propriété universelle de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, I).** — *Pour tout* A*-module* P*, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}, \mathrm{P}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}), \quad \phi \mapsto \mathrm{B}(\phi),$$

où $\mathrm{B}(\phi)$ *est l'application* $(m, n) \mapsto \phi(m \otimes n)$*. Son inverse est l'application* $\psi \mapsto \mathrm{T}(\psi)$*, où* $\mathrm{T}(\psi)$ *est l'unique* A*-morphisme*

$$\mathrm{T}(\psi) : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\mathrm{T}(\psi)(m \otimes n) = \psi(m, n)$ *pour tout* $m \in \mathrm{M}$*,* $n \in \mathrm{N}$*.*

En particulier, pour définir une application A*-linéaire* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{P}$*, il suffit d'avoir une application* A*-bilinéaire* $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{P}$*.*

Démonstration. — Montrons d'abord que l'application $\psi \mapsto \mathrm{T}(\psi)$ est bien définie. Notons π la projection $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$.

Soit $\psi \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P})$. D'après la propriété universelle du module libre $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})$, il existe un unique morphisme de A-modules

$$\widetilde{\psi} : \mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\widetilde{\psi}(e_{m,n}) = \psi(m, n)$, pour tout $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$. Il faut voir que $\widetilde{\psi}$ passe au quotient, c.-à-d., s'annule sur le sous-module K. Comme celui-ci est engendré par les générateurs de type (1) ou (2), il suffit de voir que $\widetilde{\psi}$ s'annule sur ces générateurs. Pour ceux de type (1), l'on a :

$$\widetilde{\psi}(e_{am+m',n} - a e_{m,n} - e_{m',n}) = \phi(m + m', n) - a\psi(m, n) - \psi(m', n) = 0,$$

puisque ψ est A-linéaire en la 1ère variable. De même, la linéarité en la 2ème variable entraîne que $\widetilde{\psi}$ s'annule sur les générateurs de type (2). Par conséquent, il existe un unique morphisme de A-modules

$$\mathrm{T}(\psi) : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\mathrm{T}(\psi) \circ \pi = \widetilde{\psi}$. On a alors

$$\mathrm{T}(\psi)(m \otimes n) = \widetilde{\psi}(e_{m,n}) = \psi(m, n),$$

pour tout $(m,n) \in \mathrm{M}\times\mathrm{N}$.

Alors, pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N},\mathrm{P})$, tout $\psi \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\times\mathrm{N},\mathrm{P})$ et tout $m\in\mathrm{M}$, $n\in\mathrm{N}$, l'on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{TB}(\phi)(m\otimes n) = \mathrm{B}(\phi)(m,n) = \phi(m\otimes n)\\ \text{et}\quad &\mathrm{BT}(\psi)(m,n) = \mathrm{T}(\psi)(m\otimes n) = \psi(m,n). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{TB}(\phi)=\phi$ et $\mathrm{BT}(\psi)=\psi$, pour tout ϕ et ψ. Le théorème est démontré. □

On déduit du théorème, combiné avec la proposition 7.6, le corollaire suivant.

Corollaire 7.11 **(Propriété universelle de $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$, II)**. — *Pour tout* A*-module* P*, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N},\mathrm{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{P})).$$

7.4. Premières propriétés du produit tensoriel. —

Proposition 7.12 **(Commutativité et associativité)**. — *Soient* $\mathrm{M},\mathrm{N},\mathrm{P}$ *des* A*-modules. On a des isomorphismes de* A*-modules*

$$\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\cong\mathrm{N}\otimes\mathrm{M}; \tag{1}$$

$$(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})\otimes\mathrm{P}\cong\mathrm{M}\otimes(\mathrm{N}\otimes\mathrm{P}). \tag{2}$$

Démonstration. — 1) L'application $\mathrm{M}\times\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{N}\otimes\mathrm{M}$, $(m,n)\mapsto n\otimes m$ est A-bilinéaire donc induit un A-morphisme

$$\sigma:\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{N}\otimes\mathrm{M},$$

tel que $\sigma(m\otimes n)=n\otimes m$ pour tout m,n. On obtient de même un A-morphisme $\tau:\mathrm{N}\otimes\mathrm{M}\to\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}$ tel que $\tau(n\otimes m)=m\otimes n$ pour tout m,n. Alors, il est clair que

$$\tau\circ\sigma=\mathrm{id}_{\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}}\quad\text{et}\quad\sigma\circ\tau=\mathrm{id}_{\mathrm{N}\otimes\mathrm{M}}.$$

Ceci prouve le point 1).

2) Pour $p\in\mathrm{P}$ fixé, l'application $(m,n)\mapsto m\otimes(n\otimes p)$ est A-bilinéaire, donc induit un A-morphisme

$$\theta_p:\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{M}\otimes(\mathrm{N}\otimes\mathrm{P}),$$

tel que $\theta_p(m\otimes n)=m\otimes(n\otimes p)$ pour tout m,n. Alors, l'application

$$\begin{aligned}\theta:(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})\times\mathrm{P}&\longrightarrow\mathrm{M}\otimes(\mathrm{N}\otimes\mathrm{P}),\\ (m\otimes n,p)&\mapsto\theta_p(m\otimes n)=m\otimes(n\otimes p),\end{aligned}$$

est A-bilinéaire, donc induit un morphisme de A-modules

$$\gamma:(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})\otimes\mathrm{P}\longrightarrow\mathrm{M}\otimes(\mathrm{N}\otimes\mathrm{P}),$$

tel que $\gamma((m\otimes n)\otimes p) = m\otimes(n\otimes p)$ pour tout m, n, p. On obtient de façon analogue un morphisme de A-modules

$$\delta : \mathrm{M}\otimes(\mathrm{N}\otimes\mathrm{P}) \longrightarrow (\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})\otimes\mathrm{P},$$

tel que $\gamma(m\otimes(n\otimes p)) = (m\otimes n)\otimes p$ pour tout m, n, p. Il est alors clair que γ et δ sont inverses l'un de l'autre. Ceci prouve la proposition. $\square$

Proposition 7.13. — *On a* $\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\cong\mathrm{M}$*, pour tout* A*-module* M.

Démonstration. — D'abord, l'application $\phi : \mathrm{M}\to\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$, $m\mapsto 1\otimes m$ est A-linéaire. D'autre part, l'application

$$\mathrm{A}\times\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}, \qquad (a,m)\mapsto am$$

est A-bilinéaire, donc induit une application A-linéaire $\phi : \mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to\mathrm{M}$ telle que

$$\phi(a\otimes m) = am, \qquad \forall\, a\in\mathrm{A},\ m\in\mathrm{M}.$$

Alors $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ et, pour tout $a\in\mathrm{A}$, $m\in\mathrm{M}$, l'on a

$$\psi(\phi(a\otimes m)) = 1\otimes am = a\otimes m,$$

d'où $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_{\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}}$. Ceci prouve la proposition. $\square$

***Théorème 7.14* ($\otimes_{\mathrm{A}}$ est un bifoncteur)**. — *Le produit tensoriel est un bifoncteur, au sens suivant. Tout morphisme de* A*-modules*

$$f : \mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}', \quad \textit{resp.} \quad g : \mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{N}'$$

induit un morphisme de A*-modules*

$$\begin{aligned} f\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{N}} &: \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{M}'\otimes\mathrm{N},\\ \textit{resp.}\ \mathrm{id}_{\mathrm{M}}\otimes g &: \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}' \end{aligned}$$

tel que

$$(f\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{N}})(m\otimes n) = f(m)\otimes n, \quad \textit{resp.} \quad (\mathrm{id}_{\mathrm{M}}\otimes g)(m\otimes n) = m\otimes g(n),$$

pour tout $m\in\mathrm{M}, n\in\mathrm{N}$.

Ces applications $f\mapsto f\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ *et* $g\mapsto\mathrm{id}_{\mathrm{M}}\otimes g$ *sont fonctorielles, c.-à-d., préservent les morphismes identités et la composition. De plus, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}\otimes\mathrm{N} & \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{N}}} & \mathrm{M}'\otimes\mathrm{N} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathrm{M}}\otimes g}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathrm{M}'}\otimes g} \\ \mathrm{M}\otimes\mathrm{N}' & \xrightarrow[f\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{N}'}]{} & \mathrm{M}'\otimes\mathrm{N}'. \end{array}$$

Démonstration. — L'application $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N}$, $(m,n) \mapsto f(m) \otimes n$ est A-bilinéaire donc induit une application A-linéaire

$$\mathrm{T_N}(f) = f \otimes \mathrm{id_N} : \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N},$$

telle que $\mathrm{T_N}(f)(m \otimes n) = f(m) \otimes n$. Au vu de cette formule, il est clair que $\mathrm{T_N}(\mathrm{id_M}) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}}$ et que $\mathrm{T_N}(f' \circ f) = \mathrm{T_N}(f') \circ \mathrm{T_N}(f)$, si f' est un morphisme de A-modules $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}''$. Ceci montre que la correspondance

$$\mathrm{T_N} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}$$

est un foncteur. Par conséquent, le produit tensoriel est fonctoriel en la 1ère variable. L'assertion analogue pour la 2ème variable (*i.e.*, les morphismes $g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}'$) se démontre de façon analogue.

Enfin, le diagramme indiqué est commutatif car la composée $(\mathrm{id}_{\mathrm{M}'} \otimes g)(f \otimes \mathrm{id_N})$ envoie chaque $m \otimes n$ sur $f(m) \otimes g(n)$, et il en est de même pour $(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}'})(\mathrm{id_M} \otimes g)$. Ceci prouve le théorème. □

Remarque 7.15. — 1) Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ est surjective, il en est de même de $f \otimes \mathrm{id_N} : \mathrm{M}\otimes\mathrm{N} \to \mathrm{M}'\otimes\mathrm{N}$. En effet, si $m' = f(m)$, alors $m' \otimes n = (f \otimes \mathrm{id_N})(m \otimes n)$, pour tout $n \in \mathrm{N}$.

2) **Attention**, si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ est injective, $f \otimes \mathrm{id_N}$ n'est pas nécessairement injective. Par exemple, soient $\mathrm{A} = \mathbb{Z} = \mathrm{M}' = \mathrm{M}$, soit f le morphisme injectif $x \mapsto 2x$, et soit $\mathrm{N} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, $f \otimes \mathrm{id_N}$ est l'application nulle, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a

$$(f \otimes \mathrm{id_N})(x \otimes \overline{1}) = 2x \otimes \overline{1} = x \otimes 2\overline{1} = 0.$$

D'autre part, d'après la proposition 7.13, $\mathrm{M}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ s'identifie à N, donc est non nul. Ceci montre que $f \otimes \mathrm{id_N}$ n'est pas injective.

7.5. Applications multilinéaires et produits tensoriels itérés. — La notion d'application bilinéaire se généralise comme suit. Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_n$ et P des A-modules.

Définition 7.16. — Soit ϕ une application d'ensembles

$$\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{P}.$$

On dit que ϕ est A-**multilinéaire** si elle est A-linéaire en chacune des variables. On note $\mathrm{Mult_A}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n, \mathrm{P})$ l'ensemble de ces applications.

Considérons le A-module libre $\mathrm{A}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n)$, qui est l'ensemble de toutes les sommes formelles finies

$$\sum_{(m_1,\dots,m_n)\in \mathrm{M}_1\times\cdots\times\mathrm{M}_n} a_{(m_1,\dots,m_n)} e_{(m_1,\dots,m_n)},$$

avec $a_{(m_1,\dots,m_n)} \in \mathrm{A}$ et $a_{(m_1,\dots,m_n)} = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Soit K le sous-A-module engendré par les éléments du type suivant, pour $i = 1, \dots, n$,

$$e_{(m_1,\dots,am_i+m_i',\dots,m_n)} - ae_{(m_1,\dots,m_i,\dots,m_n)} - e_{(m_1,\dots,m_i',\dots,m_n)}.$$

Définition 7.17. — On pose

$$\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n = \mathrm{A}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n)/\mathrm{K}$$

et l'on note $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ l'image de $e_{(m_1,\dots,m_n)}$ dans $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$.

On obtient alors, exactement comme au paragraphe 7.3, le théorème suivant.

***Théorème 7.18* (Propriété universelle de $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$)**
Pour tout A*-module* P*, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n, \mathrm{P}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mult}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n, \mathrm{P}), \quad \phi \mapsto \mathrm{B}(\phi),$$

où $\mathrm{B}(\phi)$ *est l'application* $(m_1, \dots, m_n) \mapsto \phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n)$*. Son inverse est l'application* $\psi \mapsto \mathrm{T}(\psi)$*, où* $\mathrm{T}(\psi)$ *est l'unique* A*-morphisme*

$$\mathrm{T}(\psi) : \mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\mathrm{T}(\psi)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \psi(m_1, \dots, m_n)$*.*

En particulier, pour définir une application A*-linéaire* $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n \to \mathrm{P}$*, il suffit d'avoir une application* A*-multilinéaire* $\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n \to \mathrm{P}$*.*

D'autre part, on a le théorème suivant.

Théorème 7.19. — *Pour tout i, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n \xrightarrow{\sim} (\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes \mathrm{M}_n).$$

Démonstration. — Posons $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$. L'application

$$(m_1, \dots, m_n) \mapsto (m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n)$$

est A-multilinéaire, donc induit une application A-linéaire

$$\phi : \mathrm{M} \longrightarrow (\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n)$$

telle que

$$\phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = (m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n).$$

Construisons l'application inverse. Pour $m_1, \dots, m_i$ fixés, l'application

$$(m_{i+1}, \dots, m_n) \mapsto m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$$

est A-multilinéaire donc induit

$$\tau(m_1, \ldots, m_i) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n, \mathrm{M})$$

tel que

$$\tau(m_1, \ldots, m_i)(m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n.$$

On voit de plus que l'application $(m_1, \ldots, m_i) \mapsto \tau(m_1, \ldots, m_i)$ est A-multilinéaire. Donc il existe

$$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n, \mathrm{M})\right)$$

tel que $\tau(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i)(m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$. D'après la propriété universelle du produit tensoriel (Corollaire 7.10), τ correspond à l'application A-linéaire

$$\psi : (\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n) \longrightarrow \mathrm{M}$$

qui envoie $(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n)$ sur $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$. Il est alors clair que ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre. Le théorème est démontré. □

Notation 7.20. — Il résulte du théorème que tous les modules obtenus à partir de $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ en ajoutant des parenthèses pour former des produits tensoriels de deux modules, sont canoniquement isomorphes à $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$, par l'application qui consiste à "omettre les parenthèses". Par exemple, on a

$$(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2) \otimes (\mathrm{M}_3 \otimes \mathrm{M}_4) \cong (\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2 \otimes \mathrm{M}_3 \otimes \mathrm{M}_4) \cong (\mathrm{M}_1 \otimes (\mathrm{M}_2 \otimes (\mathrm{M}_3 \otimes \mathrm{M}_4))$$

via

$$(m_1 \otimes m_2) \otimes (m_3 \otimes m_4) = m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 \otimes m_4 = (m_1 \otimes (m_2 \otimes (m_3 \otimes m_4)).$$

Par conséquent, dans la suite, on omettra les parenthèses dans les produits tensoriels de plus de deux modules.

Signalons enfin la proposition suivante, qui résulte de l'identification précédente et de la proposition 7.9, ou bien se démontre directement, comme la proposition 7.9.

Proposition 7.21. — *Pour $r = 1, \ldots, n$, soit $(e_i)_{i \in \mathrm{I}_r}$ un système de générateurs de M_r comme A-module. Alors $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$ est engendré comme A-module par les éléments $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$, avec $i_r \in \mathrm{I}_r$.*

7.6. Produits tensoriels d'algèbres et produits de variétés. — Soit k un corps. Commençons par montrer que le produit tensoriel $\otimes_k$ a la propriété proposée comme motivation en 7.1.2, c.-à-d., que le produit tensoriel de deux algèbres de polynômes est une algèbre de polynômes. Soient m, n des entiers $\geqslant 1$ et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ et $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n$ des indéterminées. Pour abréger, on note

$$k[\mathrm{X}] := k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m], \qquad k[\mathrm{Y}] := k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$$

$$k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] := k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$$

et l'on désignera par $\mathrm{P}(\mathrm{X})$, resp. $\mathrm{Q}(\mathrm{Y})$, un élément arbitraire de $k[\mathrm{X}]$, resp. $k[\mathrm{Y}]$. La multiplication définit une application k-bilinéaire

$$k[\mathrm{X}] \times k[\mathrm{Y}] \longrightarrow k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{Y}).$$

D'après la propriété universelle du produit tensoriel, ceci induit donc une application k-linéaire

$$\phi : k[\mathrm{X}] \otimes_k k[\mathrm{Y}] \longrightarrow k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$$

telle que $\phi(\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{Y})$, pour tout $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Q} \in k[\mathrm{Y}]$.

Pour $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose

$$\mathrm{X}^\mu := \mathrm{X}_1^{\mu_1} \cdots \mathrm{X}_m^{\mu_m},$$

et l'on définit de même Y^ν, pour $\nu \in \mathbb{N}^n$. Alors les monômes X^μ, resp. Y^ν, resp. $\mathrm{X}^\mu\mathrm{Y}^\nu$ forment une base de $k[\mathrm{X}]$, resp. $k[\mathrm{Y}]$, resp. $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

D'après la proposition 7.9, les éléments $\mathrm{X}^\mu \otimes \mathrm{Y}^\nu$ engendrent $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}]$ comme k-espace vectoriel. D'autre part, comme leurs images par ϕ sont les produits $\mathrm{X}^\mu\mathrm{Y}^\nu$, qui forment une base de $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 7.22. — *Les* $\mathrm{X}^\mu \otimes \mathrm{Y}^\nu$ *forment une base de* $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}]$*, et* ϕ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}] \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}].$$

Définition et proposition 7.23. — *Soit* A *un anneau et* B, C *deux* A*-algèbres. Il existe sur le* A*-module* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ *une unique structure de* A*-algèbre telle que*

$$(*) \qquad (b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

La A*-algèbre* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ *s'appelle le produit tensoriel des* A*-algèbres* B *et* C.

Démonstration. — L'application $\mathrm{B}\times\mathrm{C}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C} \to \mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{C}$, $(b, c, b', c') \mapsto bb'\otimes cc'$ est A-multilinéaire donc induit une application A-linéaire

$$\tau : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \to \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$$

telle que

$$\tau(b \otimes c \otimes b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

Comme $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} = (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C})$, τ correspond à une application de multiplication A-bilinéaire

$$(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}) \times (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$$

telle que $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$. La commutativité et l'associativité sont alors immédiates pour les éléments de la forme $b \otimes c$, et comme ces éléments engendrent $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{C}$ comme A-module, on obtient que la multiplication est commutative et associative, et qu'elle est uniquement déterminée par la formule $(*)$. La proposition est démontrée. $\square$

Corollaire 7.24. — *L'isomorphisme* $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}] \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ *de la proposition* 7.22 *est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. — Laissée au lecteur ! □

Pour établir la proposition 7.22, on a montré que les $\mathrm{X}^\mu \otimes \mathrm{Y}^\nu$ forment une base de $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}]$, en montrant que leurs images dans $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ sont linéairement indépendantes. Ceci est en fait un cas particulier du résultat général ci-dessous.

Théorème 7.25. — *Soient* A *un anneau,* I, J *deux ensembles, et* M *resp.* N *le* A*-module libre de base* $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$*, resp.* $(f_j)_{j \in \mathrm{J}}$*. Alors* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ *est un* A*-module libre de base* $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}}$.

Démonstration. — Ce théorème n'est pas facile à établir en partant directement de la *définition* du produit tensoriel, mais il découle facilement des *propriétés universelles* du produit tensoriel et des modules libres.

Soit $\mathrm{V} = \mathrm{A}(\mathrm{I} \times \mathrm{J})$ un A-module libre de base $\{v(i,j)\}_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}}$. Il existe une unique application A-linéaire $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ telle que

$$\phi(v(i,j)) = e_i \otimes f_j, \qquad \forall\, i \in \mathrm{I},\ j \in \mathrm{J}. \tag{1}$$

D'autre part, il existe une unique application A-*bilinéaire* $\theta : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{V}$ telle que

$$\theta(e_i, f_j) = v(i,j), \qquad \forall\, i \in \mathrm{I},\ j \in \mathrm{J};$$

explicitement, pour tout couple $x = \sum_i a_i e_i$, $y = \sum_j b_j f_j$, les deux sommes étant finies, on a

$$\theta(x,y) = \sum_{i,j} a_i b_j\, v(i,j).$$

Par conséquent, d'après la propriété universelle 7.10, il existe une unique application A-linéaire $\psi : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{V}$ telle que

$$\psi(e_i \otimes f_j) = v(i,j), \qquad \forall\, i \in \mathrm{I},\ j \in \mathrm{J}. \tag{2}$$

Comme les $v(i,j)$, resp. $e_i \otimes f_j$, engendrent V, resp. $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, il résulte de (1) et (2) que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Donc ϕ et ψ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. Le théorème est démontré. □

On va généraliser le corollaire 7.24 comme suit. Soit V, resp. W, une sous-variété algébrique fermée de k^m, resp. k^n, définie par des polynômes $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_r \in k[\mathrm{X}]$, resp. $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_s \in k[\mathrm{Y}]$.

Notons que $k[\mathrm{X}]$ et $k[\mathrm{Y}]$ sont de façon naturelle des sous-algèbres de $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$. Par exemple, si $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ et si $z = (x, y)$ est un élément de k^{m+n}, alors $\mathrm{P}(z) = \mathrm{P}(x)$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 7.26. — $\mathrm{V}\times\mathrm{W}$ *est une sous-variété algébrique fermée de* k^{m+n}, *définie par les polynômes* $\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_r,\mathrm{Q}_1,\ldots,\mathrm{Q}_s$.

Démonstration. — Il est clair que ces polynômes s'annulent sur $\mathrm{V}\times\mathrm{W}$. Réciproquement, soit $z=(x,y)$ un point de k^{m+n} sur lequel ces polynômes s'annulent. Alors $0=\mathrm{P}_i(z)=\mathrm{P}_i(x)$, pour $i=1,\ldots,r$, et ceci entraîne $x\in\mathrm{V}$. On obtient de même que $y\in\mathrm{W}$. Ceci prouve le lemme. □

Posons $\mathrm{I}=\mathscr{I}(\mathrm{V})$, $\mathrm{J}=\mathscr{I}(\mathrm{W})$, et $\mathrm{K}=\mathscr{I}(\mathrm{V}\times\mathrm{W})$. Alors $k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}]=k[\mathrm{X},\mathrm{Y}]/\mathrm{K}$. Observons que $\mathrm{K}\cap k[\mathrm{X}]=\mathrm{I}$; en effet, si $\mathrm{P}\in k[\mathrm{X}]$ s'annule sur $\mathrm{V}\times\mathrm{W}$, alors pour tout $x\in\mathrm{V},y\in\mathrm{W}$, on a $0=\mathrm{P}(x,y)=\mathrm{P}(x)$, et donc $\mathrm{P}\in\mathrm{I}$. Par conséquent, l'inclusion naturelle $k[\mathrm{X}]\subset k[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ permet d'identifier $k[\mathrm{V}]$ à une sous-algèbre de $k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}]$: si $f\in k[\mathrm{V}]$ et $(v,w)\in\mathrm{V}\times\mathrm{W}$, alors $f(v,w)=f(v)$. De même, $k[\mathrm{W}]$ s'identifie à une sous-algèbre de $k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}]$.

Alors, la multiplication

$$k[\mathrm{V}]\times k[\mathrm{W}]\longrightarrow k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}],\qquad (f,g)\mapsto fg,$$

est k-bilinéaire, donc induit une application k-linéaire

$$\phi : k[\mathrm{V}]\otimes_k k[\mathrm{W}]\longrightarrow k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}]$$

telle que $\phi(f\otimes g)=fg$, pour tout f,g. Alors,

$$\phi((f\otimes g)\cdot(f'\otimes g'))=\phi(ff'\otimes gg')=ff'gg'=fgf'g'=\phi(f\otimes g)\phi(f'\otimes g'),$$

et comme les tenseurs $f\otimes g$ engendrent $k[\mathrm{V}]\otimes_k k[\mathrm{W}]$ comme k-espace vectoriel, on en déduit que ϕ est un morphisme d'algèbres. De plus, ϕ est surjectif puisque $k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}]$ est engendré par les images des monômes $\mathrm{X}^\mu\mathrm{Y}^\nu$.

Théorème 7.27. — ϕ *est un isomorphisme de* k*-algèbres*

$$k[\mathrm{V}]\otimes_k k[\mathrm{W}]\xrightarrow{\ \sim\ } k[\mathrm{V}\times\mathrm{W}].$$

Démonstration. — D'après ce qui a déjà été dit, il suffit de montrer que ϕ est injectif. Soit $\alpha\in\operatorname{Ker}\phi$.

Soit $\{e_i\}_{i\in\mathrm{B}}$, resp. $\{f_j\}_{j\in\mathrm{C}}$ une base de $k[\mathrm{V}]$, resp. $k[\mathrm{W}]$. Comme les $e_i\otimes f_j$ forment une base de $k[\mathrm{V}]\otimes k[\mathrm{W}]$, alors α peut s'écrire comme une somme finie

$$\alpha=\sum_i e_i\otimes\psi_i,\qquad \text{avec } \psi_i\in k[\mathrm{W}].$$

(On écrit $x=\sum_{i,j}a_{ij}e_i\otimes f_j$ et $\psi_i=\sum_j a_{ij}f_j$). Fixons $w_0\in\mathrm{W}$. Pour tout $v\in\mathrm{V}$, on a

$$0=\alpha(v,w_0)=\sum_i e_i(v)\psi_i(w_0),$$

et donc l'élément $\sum_i\psi_i(w_0)e_i$ est identiquement nul sur V. Comme les e_i sont linéairement indépendants dans $k[\mathrm{V}]$, ceci implique $\psi_i(w_0)$. Comme w_0 était arbitraire dans W, ceci montre que $\psi_i = 0$ pour tout i, et donc $\alpha = 0$. Ceci montre que ϕ est injectif. Le théorème est démontré. □

7.7. Produits et sommes directes. — Le but de ce paragraphe est d'introduire la notion de somme directe arbitraire (c.-à-d., pour un ensemble d'indices infini) et de montrer que le produit tensoriel « commute aux sommes directes » (Théorème 7.36). Ce paragraphe peut être omis en première lecture. (Seul le corollaire 7.35 est utilisé à la fin du chapitre, lors de la construction des algèbres symétriques et extérieures.)

Soit A un anneau commutatif et soit I un ensemble quelconque. On suppose donné un A-module M_i, pour tout $i \in \mathrm{I}$. On veut définir un A-module appelé la somme directe des M_i. Pour ceci, il est commode d'introduire d'abord le module produit des M_i.

Définition 7.28. — Le **produit** des M_i est le A-module, noté $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, dont les éléments sont les familles $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que $m_i \in \mathrm{M}_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. La structure de groupe abélien et de A-module est définie composante par composante, c.-à-d.,

$$(m_i)_{i\in\mathrm{I}} + a(m'_i)_{i\in\mathrm{I}} = (m_i + am'_i)_{i\in\mathrm{I}}.$$

Définition 7.29. — La **somme directe** des M_i, notée $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, est le sous-A-module de $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ formé des familles qui sont nulles presque partout, c.-à-d., les familles $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que $m_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Il est clair que ceci est bien un sous-A-module.

Remarque 7.30. — Si l'ensemble I est fini, on voit que

$$\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i = \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \qquad (\mathrm{I} \text{ fini}).$$

Si I a n éléments $i_1, \dots, i_n$ on écrira aussi

$$\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i = \mathrm{M}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{i_n}.$$

Définition 7.31. — Pour tout i, soit

$$\pi_i : \prod_{j\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_j \longrightarrow \mathrm{M}_i$$

la projection sur la i-ème composante et soit

$$\tau_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_j$$

l'insertion à la i-ème place, c.-à-d., pour tout $m \in \mathrm{M}_i$, $\tau_i(m)$ est la famille $(m_j)_{j\in\mathrm{J}}$ telle que $m_i = m$ et $m_j = 0$ si $j \neq i$.

De plus, désignons par σ l'inclusion $\bigoplus_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_j \subseteq \prod_{j\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_j$ et posons $p_i = \pi_i \circ \sigma$: c'est la projection de $\bigoplus_{j\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_j$ sur M_i.

Proposition 7.32. — *π_i et τ_i sont des morphismes de* A*-modules. De plus, on a*

$$\pi_j \circ \sigma \circ \tau_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathrm{M}_i} & si\ j = i; \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En particulier, τ_i est injectif et $\pi_i \circ \sigma$ et π_i sont surjectifs.

Démonstration. — C'est clair. □

Théorème 7.33. — **(Propriété universelle de la somme directe, et du produit)**

Soit N *un* A*-module.*

1) *Pour avoir un morphisme $\phi : \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \to \mathrm{N}$, il suffit d'avoir un morphisme $\phi_i : \mathrm{M}_i \to \mathrm{N}$ pour tout i. De façon plus précise, l'application*

$$\alpha : \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_i, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\left(\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i, \mathrm{N}\right), \quad (\phi_i)_{i\in\mathrm{I}} \mapsto \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \phi_i$$

est une bijection, dont l'inverse β est donnée par $\beta(\phi) = (\phi \circ \tau_i)_{i\in\mathrm{I}}$. De plus, si chaque ϕ_i est surjectif,

2) *Pour avoir un morphisme $\psi : \mathrm{N} \to \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, il suffit d'avoir un morphisme $\psi_i : \mathrm{N} \to \mathrm{M}_i$ pour tout i. De façon plus précise, l'application*

$$\gamma : \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{N}, \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i\right), \quad (\psi_i)_{i\in\mathrm{I}} \mapsto \prod_{i\in\mathrm{I}} \psi_i$$

est une bijection, dont l'inverse δ est donnée par $\delta(\psi) = (\pi_i \circ \phi)_{i\in\mathrm{I}}$.

Démonstration. — Il est clair que l'application $\beta : \phi \mapsto (\phi \circ \tau_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est bien définie. D'autre part, étant donné une famille $\underline{\phi} = (\phi_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on définit

$$\alpha(\underline{\phi}) = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \phi_i$$

par la formule suivante : pour tout $m = \sum_{i\in\mathrm{I}} m_i$,

$$(\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \phi_i)(m) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \phi_i(m_i) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \phi_i\pi_i(m).$$

Ceci fait sens, car seul un nombre fini de m_i sont $\neq 0$ et donc on peut former dans N la somme finie $\sum_{i\in\mathrm{I}} \phi_i(m_i)$. Ayant ainsi vu que α est bien définie, on obtient pour tout ϕ et tout m :

$$(\alpha \circ \beta)(\phi)(m) = \alpha\left((\phi\tau_i)_{i\in\mathrm{I}}\right)(m) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \phi\tau_i\pi_i(m) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \phi(m_i) = \phi(m).$$

Ceci prouve que $\alpha \circ \beta(\phi) = \phi$ pour tout ϕ.

Réciproquement, si $\underline{\phi} = (\phi_j)_{j\in \mathrm{J}}$ alors, pour tout $i \in \mathrm{I}$, la i-ème composante de la famille $(\beta \circ \alpha)(\underline{\phi})$ est l'application de M_i vers N qui à tout $m \in \mathrm{M}_i$ associe :

$$(*) \qquad (\alpha(\underline{\phi}) \circ \tau_i)(m) = \sum_{j\in \mathrm{I}} \phi_j \pi_j(\tau_i(m)) = \phi_i(m),$$

où dans la dernière égalité l'on a utilisé la proposition précédente. Alors, $(*)$ montre que $(\beta \circ \alpha)(\underline{\phi}) = \underline{\phi}$ pour toute famille $\underline{\phi} = (\phi_j)_{j\in \mathrm{J}}$. Ceci prouve l'assertion (1).

La preuve de l'assertion (2) est analogue (en fait, plus facile), et est laissée au lecteur. □

Le théorème ci-dessous et son corollaire seront utilisés à la fin de ce chapitre, dans la construction de l'algèbre symétrique ou extérieure d'un A-module.

Considérons, pour tout $i \in \mathrm{I}$, un morphisme de A-modules

$$f_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}'_i,$$

et définissons $\tau'_i : \mathrm{M}'_i \to \bigoplus_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{M}'_j$ comme précédemment.

Théorème 7.34. — 1) *Les morphismes $\tau'_i \circ f_i$ induisent un morphisme*

$$\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}'_i,$$

noté $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} f_i$. De plus, ce morphisme est surjectif (resp. injectif) si chacun des f_i l'est.

2) *Les morphismes $f_i \circ \pi_i$ induisent un morphisme*

$$\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}'_i,$$

noté $\prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$. De plus, ce morphisme est injectif (resp. surjectif) si chacun des f_i l'est.

Démonstration. — Dans les deux cas, l'existence du morphisme résulte du théorème précédent.

Supposons que chaque f_i soit injectif, et soit $\underline{m} = (m_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un élément de $\operatorname{Ker} \prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$. Alors

$$0 = \left(\prod_{i\in \mathrm{I}} f_i\right)(\underline{m}) = (f_i(m_i))_{i\in \mathrm{I}}.$$

Comme chaque f_i est supposé injectif, on obtient $m_i = 0$ pour tout i, et donc $\underline{m} = 0$. Ceci montre que $\prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$ est injectif, et l'on obtient de même que $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} f_i$ l'est aussi.

Supposons maintenant chaque f_i surjectif. Comme $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ est engendré par ses sous-modules M_i, pour montrer que $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} f_i$ est surjectif il suffit de voir que chaque M_i est contenu dans l'image de $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} f_i$. Or ceci est clair puisque chaque f_i est surjectif.

Montrons que $f := \prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$ est surjectif. Soit $\underline{m'} = (m'_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un élément du produit des M'_i. Comme chaque f_i est surjectif, il existe pour chaque i un élément $m_i \in \mathrm{M}_i$ tel que $f_i(m_i) = m'_i$. (Ici, on a utilisé l'axiome du choix.) Alors $(m_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est un élément du produit des M_i qui s'envoie par f sur $\underline{m'}$. Ceci prouve que f est surjective. Le théorème est démontré. □

Le point 1) du corollaire ci-dessous est déjà contenu dans le théorème précédent, mais on le répète en raison de son importance.

Corollaire 7.35. — *Pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *soit* N_i *un sous-module de* M_i. *Alors,*

1) $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ *est un sous-module de* $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, *et*

2)
$$\frac{\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i}{\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i} \cong \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \frac{\mathrm{M}_i}{\mathrm{N}_i}.$$

Démonstration. — 1) D'après le théorème précédent, les inclusions $\mathrm{N}_i \subseteq \mathrm{M}_i$ induisent un morphisme injectif
$$\eta : \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i,$$
qui permet d'identifier $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ au sous-module :
$$\{(m_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \mid \forall\, i \in \mathrm{I}, \quad m_i \in \mathrm{N}_i\}.$$

2) Pour tout $i \in \mathrm{I}$, notons π_i la projection $\pi_i : \mathrm{M}_i \to \mathrm{M}_i/\mathrm{N}_i$. D'après le théorème précédent, les π_i induisent un morphisme surjectif
$$\pi : \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i/\mathrm{N}_i.$$
Le noyau de π est formé des familles presque partout nulles $\underline{m} = (m_i)_{i\in \mathrm{I}}$ telles que
$$0 = \pi(\underline{m}) = (\pi_i(m_i))_{i\in \mathrm{I}}.$$
Par conséquent, $\operatorname{Ker}\pi = \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{N}_i$. Le corollaire découle alors du Théorème fondamental d'isomorphisme. □

Théorème 7.36 **($\otimes$ commute aux sommes directes)**. — *Soient* N *et* M_i, $i \in \mathrm{I}$, *des* A*-modules. On a un isomorphisme de* A*-modules :*
$$\left(\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i\right) \otimes \mathrm{N} \cong \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N})$$

Démonstration. — Posons $\mathrm{S} = \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ et notons τ_i l'inclusion $\mathrm{M}_i \to \mathrm{S}$, pour tout i.

D'après le théorème 7.14, chaque τ_i induit un A-morphisme

$$\tau_i \otimes \mathrm{id}_\mathrm{N} : \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{S} \otimes \mathrm{N},$$

qui envoie chaque $m_i \otimes n$ sur $\tau_i(m_i) \otimes n$. D'après la propriété universelle de la somme directe, ces morphismes induisent un morphisme de A-modules

$$\psi : \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{S} \otimes \mathrm{N},$$

tel que $\psi(\sum_{i\in\mathrm{I}} m_i \otimes n) = (\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i)) \otimes n$.

D'autre part, tout élément de S s'écrit de façon unique comme une somme finie $\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i)$, avec $m_i \in \mathrm{M}_i$ et $m_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et l'application

$$\mathrm{S} \times \mathrm{N} \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N}, \qquad \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i), n\right) \mapsto \sum_{i\in\mathrm{I}} m_i \otimes n,$$

est bien définie et A-bilinéaire, donc induit un morphisme de A-modules

$$\phi : \mathrm{S} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N},$$

tel que $\phi((\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i)) \otimes n) = \sum_{i\in\mathrm{I}} m_i \otimes n$. Il est alors clair que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre. Ceci prouve le théorème. □

Remarque 7.37. — On obtient ainsi que le produit tensoriel des A-modules libres $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$ et $\mathrm{A}^{(\mathrm{J})}$ est le A-module libre de base $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. En effet,

$$\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} = \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i, \qquad \mathrm{A}^{(\mathrm{J})} = \bigoplus_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{N}_j,$$

où $\mathrm{M}_i = \mathrm{A} = \mathrm{N}_j$ pour tout i, j. D'après le théorème précédent et le fait que $\mathrm{A} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A} = \mathrm{A}$, on obtient que

$$\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{A}^{(\mathrm{J})} \cong \bigoplus_{\mathrm{I}\times\mathrm{J}} \mathrm{A} = \mathrm{A}^{(\mathrm{I}\times\mathrm{J})}.$$

8. Extension des scalaires et changement de base

8.1. Extension et restriction des scalaires. — Soit $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux commutatifs ; c.-à-d., B est une A-algèbre.

***Définition et proposition 8.1* (Extension des scalaires)**. — *Soit* M *un* A*-module. Alors sur le* A*-module* $\mathrm{B} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M}$*, il existe une unique structure de* B*-module telle que*

$$(*) \qquad b \cdot (b' \otimes m) = bb' \otimes m, \qquad \forall\, b, b' \in \mathrm{B},\ m \in \mathrm{M}.$$

On l'appelle le module obtenu par extension des scalaires (ou changement de base) de A *à* B.

Démonstration. — Par hypothèse, B, M sont des A-modules, et l'on peut former le A-module $B \otimes_A M$, où l'action de A est définie par :

$$a \cdot (b \otimes m) = \phi(a)b \otimes m = b \otimes am.$$

Il faut voir que l'action $(*)$ de B est bien définie. Or, on voit facilement que l'application

$$B \times B \times M \longrightarrow B \otimes_A M, \qquad (b, b', m) \mapsto bb' \otimes m$$

est A-trilinéaire. Elle induit donc une application A-linéaire

$$\gamma : B \otimes_A B \otimes_A M \longrightarrow B \otimes_A M$$

telle que $\gamma(b \otimes b' \otimes m) = bb'm$, puis une application A-bilinéaire $B \times (B \otimes_A M) \to B \otimes_A M$, telle que

$$b \cdot (b' \otimes m) = bb' \otimes m.$$

Comme tout élément w de $B \otimes_A M$ est une somme de tenseurs $b' \otimes m$, on obtient facilement que $1 \cdot w = w$ et $b \cdot (c \cdot w) = bc \cdot w$, pour tout $w \in B \otimes_A M$, $b, c \in B$. Ceci montre que $B \otimes_A M$ est un B-module. □

***Définition 8.2* (Restriction des scalaires).** — Soit N un B-module. On peut le considérer comme A-module via $\phi : A \to B$, en posant

$$a \cdot n := \phi(a)n, \qquad \forall\, a \in A,\ n \in N.$$

On notera ${}_A N$ ce A-module ; on dit que c'est le A-module obtenu à partir de N par restriction des scalaires.

***Théorème 8.3* (Propriété universelle des modules étendus)**

Soient M *un* A*-module et* N *un* B*-module. On a une bijection*

$$\theta(M, N) : \mathrm{Hom}_A(M, {}_A N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$$

défini par $\theta(M, N)(f)(b \otimes m) = bf(m)$*, pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_A(M, {}_A N)$ *et* $b \in B$, $m \in M$.

De plus, cette bijection est bifonctorielle, au sens suivant. Soient $\phi : M' \to M$ *un* A*-morphisme et* $\psi : N \to N'$ *un* B*-morphisme. Alors le diagramme* *suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}', {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) & \xrightarrow[\sim]{\theta(\mathrm{M}',\mathrm{N})} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}', \mathrm{N}) \\
{\scriptstyle \phi^*}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_{\mathrm{B}} \otimes \phi)^*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) & \xrightarrow[\sim]{\theta(\mathrm{M},\mathrm{N})} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}) \\
{\scriptstyle \psi_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}') & \xrightarrow[\sim]{\theta(\mathrm{M},\mathrm{N}')} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}'),
\end{array}$$

où $\phi^*(f) = f \circ \phi$ et $\psi_*(f) = \psi \circ f$, pour tout f.

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. L'application

$$\mathrm{B} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad (b, m) \mapsto bf(m)$$

est A-bilinéaire donc induit une application A-linéaire

$$\theta(f) : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad b \otimes m \mapsto bm.$$

Pour tout $b, b' \in \mathrm{B}$, $m \in \mathrm{M}$, on a

$$\theta(f)(b \cdot (b' \otimes m)) = \theta(f)(bb' \otimes m) = bb'm = b\theta(f)(b' \otimes m).$$

Comme tout $x \in \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est somme de tenseurs $b' \otimes m$, ceci montre que $\theta(f)$ est B-linéaire. Ceci montre qu'on a une l'application bien définie $\theta = \theta(\mathrm{M}, \mathrm{N})$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

D'autre part, pour tout $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N})$, notons $\gamma|_{\mathrm{M}}$ l'application

$$\mathrm{M} \longrightarrow {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}, \qquad m \mapsto \gamma(1 \otimes m).$$

On voit facilement que $\gamma|_{\mathrm{M}}$ est A-linéaire, et que $\theta(f)|_{\mathrm{M}} = f$. De plus, pour tout $b \in \mathrm{B}$, $m \in \mathrm{M}$, on a

$$\theta(\gamma|_{\mathrm{M}})(b \otimes m) = b\gamma|_{\mathrm{M}}(m) = b\gamma(1 \otimes m) = \gamma(b \otimes m).$$

Ceci montre que $\theta(\gamma|_{\mathrm{M}}) = \gamma$. La bijection annoncée en découle.

La vérification de la bifonctorialité est facile et est laissée au lecteur. □

On peut alors définir le complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V comme étant e $\mathbb{C}$-'espace vectoriel obtenu par extension des scalaires :

$$\mathrm{V}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{V}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier, par exemple en utilisant la proposition précédente, que ceci coïncide avec les deux définitions données en 7.1.1.

8.2. Produit tensoriel par $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$**.** — Un exemple important d'extension des scalaires est la localisation par rapport à une partie multiplicative S.

Soient A un anneau, S une partie multiplicative de A et soit M un A-module. On a construit dans le chapitre I le $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. Rappelons brièvement que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ est formé des « fractions » m/s, où $m \in \mathrm{M}$, $s \in \mathrm{S}$, et que l'on a :

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{t} \Leftrightarrow \quad \text{il existe } u \in \mathrm{S} \text{ tel que } u(tm - sm') = 0.$$

La structure de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module est définie par

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st},$$

et l'application $\tau_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, $m \mapsto m/1$ est un morphisme de A-modules.

De plus, via $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, tout $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module N peut être vu, par restriction des scalaires, comme un A-module noté ${}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$. Avec cette notation, la propriété universelle de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ énoncée dans le théorème 4.9, se reformule comme suit.

Théorème 8.4 **(Propriété universelle de** $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$**).** — *Pour tout* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-module* N*, l'application* $\gamma \mapsto \gamma|_{\mathrm{M}}$ *est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}, \mathrm{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}).$$

En d'autres termes, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *vérifie la même propriété universelle que le module étendu* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$*.*

De ceci on déduit :

Théorème 8.5. — *Il existe un unique isomorphisme de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-modules*

$$\eta_{\mathrm{M}} : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$$

tel que $\eta_{\mathrm{M}}(m/1) = 1 \otimes m$*, pour tout* $m \in \mathrm{M}$*.*

De plus, cet isomorphisme est fonctoriel en M*, c.-à-d., si* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *est un morphisme de* A*-modules, alors le diagramme ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} & \xrightarrow[\sim]{\eta_{\mathrm{M}}} & \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \\
{\scriptstyle \mathrm{S}^{-1}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes f} \\
\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} & \xrightarrow[\sim]{\eta_{\mathrm{N}}} & \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}.
\end{array}$$

Démonstration. — D'après la propriété universelle de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, il existe un unique $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-morphisme $\phi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ tel que $\phi(m/1) = 1 \otimes m$, pour tout $m \in \mathrm{M}$.

De même, d'après la propriété universelle de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, il existe un unique $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-morphisme $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ tel que $\psi(1 \otimes m) = m/1$, pour tout $m \in \mathrm{M}$. Il en résulte que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Ceci prouve la première assertion. La vérification de la fonctorialité est facile et laissée au lecteur. $\square$

8.3. Produit tensoriel par A/I. — Soit I un idéal de A. Un autre exemple important d'extension des scalaires est le changement de base par le morphisme $A \to A/I$. (Même si l'anneau quotient A/I est « plus petit » que A, on parle encore d'extension des scalaires). Soit M un A-module, et formons le A-module M/IM. On a vu en 4.22 (Chap. I) que l'action de A sur M/IM, donnée par un morphisme d'anneaux

$$A \longrightarrow \mathrm{End}(M/IM),$$

se factorisait à travers A/I, munissant ainsi M/IM d'une structure de A/I-module.

Proposition 8.6. — *On a un isomorphisme de* A/I-*modules :* $(A/I) \otimes_A M \cong M/IM$.

Démonstration. — Notons π, resp. π_M, la projection $A \to A/I$, resp. $M \to M/IM$. On rappelle que la structure de A-module de A/I est donnée par

$$a \cdot \pi(b) = \pi(a)\pi(b) = \pi(ab),$$

pour tout $a, b \in A$. Alors, l'application

$$(A/I) \times M \longrightarrow M/IM, \qquad (a + I, m) \mapsto am + IM,$$

est bien définie et A-bilinéaire. Elle induit donc un morphisme de A-modules

$$\sigma : (A/I) \otimes M \longrightarrow M/IM,$$

tel que $\sigma(\pi(a) \otimes m) = \pi_M(am)$.

D'autre part, l'application $\tau : M \to (A/I) \otimes M$, $m \mapsto \pi(1) \otimes m$, est un morphisme de A-modules. Son noyau contient le sous-module IM ; en effet, pour tout $m \in M$ et $x \in I$, on a

$$\tau(xm) = \pi(1) \otimes xm = x\pi(1) \otimes m = p(x) \otimes m = 0.$$

Par conséquent, τ se factorise en un A-morphisme

$$\overline{\tau} : M/IM \longrightarrow (A/I) \otimes M,$$

tel que $\overline{\tau}(m+IM) = \pi(1)\otimes m$. Alors, on voit facilement que σ et $\overline{\tau}$ sont inverses l'un de l'autre. La proposition est démontrée. □

9. Algèbres tensorielles, symétriques, et extérieures

Un autre intérêt du produit tensoriel est qu'il permet de construire certaines algèbres associées à un k-espace vectoriel V ou, plus généralement, un A-module M. Dans la suite, A désignera un anneau **commutatif**.

9.1. A-algèbres non-commutatives. — On va être amené à considérer des morphismes d'anneaux $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, où B est un anneau non nécessairement commutatif. Ceci conduit aux définitions suivantes.

***Définition 9.1* (A-algèbres).** — Soit $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux, B n'étant pas nécessairement commutatif. Alors ϕ définit deux structures de A-module sur B :

$$a \cdot b = \phi(a)b, \qquad a * b = b\phi(a),$$

pour $a \in \mathrm{A}$, $b \in \mathrm{B}$. (On a $a' * (a * b) = (aa') * b = (a'a) * b$ car A est commutatif). On dit que B est une A-**algèbre** si ces deux structures de A-module coïncident, c.-à-d., si l'on a

$$\phi(a)b = b\phi(a), \qquad \forall\, a \in \mathrm{A},\ b \in \mathrm{B}.$$

***Définition 9.2* (Centre d'un anneau).** — Soit B un anneau non nécessairement commutatif. On dit qu'un élément $b_0 \in \mathrm{B}$ est **central** s'il commute à tout élément de B, c.-à-d., si $b_0 b = b b_0$ pour tout $b \in \mathrm{B}$. On note Z(B) l'ensemble des éléments centraux de B ; il contient 1, et l'on voit facilement que c'est un sous-anneau de B. On l'appelle le **centre** de B.

Alors, un morphisme d'anneaux $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ fait de B une A-algèbre si et seulement si, $\phi(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{B})$.

9.2. Algèbre tensorielle d'un A-module. — Soit M un A-module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{\otimes n} = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$$

(n facteurs), avec la convention $\mathrm{T}^0_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$.

***Théorème 9.3* (L'algèbre tensorielle $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$).** — *On pose*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{A} \bigoplus \mathrm{M} \bigoplus \mathrm{M}^{\otimes 2} \bigoplus \mathrm{M}^{\otimes 3} \bigoplus \cdots$$

C'est une A*-algèbre associative, non-commutative, pour la multiplication définie par :*

$$(1) \qquad a \cdot w = aw = w \cdot a, \qquad \forall\, a \in \mathrm{A},\ w \in \mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}),$$

et, pour $p, q \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \in \mathrm{M}$,

$$(2) \qquad (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q.$$

De plus, $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *vérifie la propriété universelle suivante : pour toute* A*-algèbre non nécessairement commutative* B*, et tout morphisme de* A*-modules* $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$*, il existe un unique morphisme de* A*-algèbres* $\phi : \mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$ *tel que* $\phi(m) = \tau(m)$*, pour tout* $m \in \mathrm{M}$.

Démonstration. — Soient $p, q \geqslant 1$. D'après le théorème 7.19, on a

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^p_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{T}^q_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{T}^{p+q}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) & \mapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q. \end{array}$$

et ceci induit une application de multiplication A-bilinéaire

$$\mathrm{T}^p_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \times \mathrm{T}^q_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{T}^{p+q}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$$

vérifiant (2). On vérifie alors facilement que la multiplication est associative. Par définition, les éléments de A sont centraux, donc $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ est une A-algèbre.

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ une A-algèbre (non nécessairement commutative) et $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ un morphisme de A-modules. Pour tout $n \geqslant 1$, l'application

$$\mathrm{M}^n \longrightarrow \mathrm{B}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \tau(x_1) \cdots \tau(x_n)$$

(à droite, c'est le produit dans B), est A-multilinéaire donc induit une application A-linéaire $\phi_n = \mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$ telle que

$$(*) \qquad \phi_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \tau(x_1) \cdots \tau(x_n).$$

Alors, on vérifie facilement que l'application $\phi : \mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$, égale à f sur $\mathrm{T}^0_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et à ϕ_n sur chaque $\mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, est un morphisme de A-algèbres, vérifiant $\phi(m) = \tau(m)$ pour tout $m \in \mathrm{M}$. Enfin, un tel morphisme vérifie nécessairement $(*)$, ce qui prouve l'unicité de ϕ. Le théorème est démontré. $\square$

Proposition 9.4. — *Si* M *est un* A*-module libre de base* $(v_1, \ldots, v_d)$*, alors chaque* $\mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *est un* A*-module libre de base les éléments*

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}, \qquad i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, d\}.$$

En particulier, $\mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *est libre de rang* d^n.

Démonstration. — Ceci résulte, par récurrence sur n, du théorème 7.25 (voir aussi la remarque 7.37). $\square$

9.3. Modules et algèbres gradués. — Avant de définir l'algèbre symétrique de M, il est utile d'introduire la notion de A-module (resp. A-algèbre) gradué. Par définition, un A-module **gradué** est un A-module M somme directe de A-modules $(\mathrm{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{M}_n.$$

Dans ce cas, M_n s'appelle la composante de degré n de M. On dit qu'un élément $x \in \mathrm{M}$ est **homogène** s'il est non nul et appartient à l'une des composantes M_n ; dans ce cas, on dit que x est homogène de degré n, ou simplement **de degré** n.

Soit B une A-algèbre. Supposons que comme A-module B soit une somme directe $\mathrm{B} = \bigoplus_n \mathrm{B}_n$ et que la multiplication vérifie : $1 \in \mathrm{B}_0$ et

$$\mathrm{B}_p \cdot \mathrm{B}_q \subseteq \mathrm{B}_{p+q}, \forall\, p, q.$$

Dans ce cas, on dit que B est une **A-algèbre graduée**. En particulier, $\mathrm{T}_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \bigoplus_n \mathrm{T}^n_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ est une A-algèbre graduée.

***Définition 9.5* (Idéaux bilatères et anneaux quotients)**. — Soit B un anneau non commutatif. Un **idéal bilatère** de B est un sous-groupe I tel que $axb \in \mathrm{I}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $a, b \in \mathrm{B}$.

Dans ce cas, on vérifie facilement que le groupe abélien B/I est muni d'une structure d'anneau non-commutatif, définie par

$$(a + \mathrm{I})(b + \mathrm{I}) = ab + \mathrm{I}.$$

(La démonstration est analogue à celle de 2.1.)

Définition et proposition 9.6. — *Soit* $\mathrm{B} = \bigoplus_n \mathrm{B}_n$ *une* A*-algèbre graduée et soit* I *un idéal bilatère de* B*. On dit que* I *est un* **idéal homogène** *s'il est engendré par des éléments homogènes de* B*. Dans ce cas, posant* $\mathrm{I}_n = \mathrm{I} \cap \mathrm{B}_n$ *pour tout* n*, on a*

$$(*) \qquad \mathrm{I} = \bigoplus_n (\mathrm{I} \cap \mathrm{B}_n),$$

et l'algèbre quotient B/I *est graduée :*

$$\mathrm{B/I} = \bigoplus_n (\mathrm{B/I})_n, \quad \textit{où} \quad (\mathrm{B/I})_n = \mathrm{B}_n/\mathrm{I}_n.$$

Démonstration. — Dans $(*)$, l'inclusion $\supseteq$ a toujours lieu, et il s'agit de montrer l'autre inclusion lorsque I est homogène. Soit (x_λ) un système de générateurs homogènes de I, chaque x_λ étant de degré d_λ. Tout élément de I est somme d'éléments de la forme $bx_\lambda c$, avec $b, c \in \mathrm{B}$. Écrivons

$$b = b_1 + \cdots + b_r, \qquad c = c_1 + \cdots + c_s,$$

avec chaque b_i, resp. c_j, homogène de degré p_i, resp. q_j. Alors

$$bx_\lambda c = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} b_i x_\lambda c_j,$$

et chaque $b_i x_\lambda c_j$ appartient à I et est homogène de degré $p_i + d_\lambda + q_j$, ou bien nul. Il en résulte que $\mathrm{I} = \bigoplus_n \mathrm{I}_n$.

Donc, $\mathrm{B/I} \cong \bigoplus_n (\mathrm{B}_n/\mathrm{I}_n)$, d'après le corollaire 7.35, et l'on vérifie alors facilement que la multiplication de B/I (induite par celle de B) fait de B/I une A-algèbre graduée. $\square$

9.4. Algèbre symétrique d'un A-module. — Soit M un A-module.

Définition et proposition 9.7 **(L'algèbre symétrique** $\mathrm{S_A(M)}$**)**
Soit $\mathrm{S_A(M)}$ *le quotient de la* A*-algèbre* $\mathrm{T_A(M)}$ *par l'idéal homogène* I *engendré par les éléments de degré* 2 *:*

$$x \otimes y - y \otimes x, \qquad x, y \in \mathrm{M}.$$

On a $\mathrm{S_A(M)} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{S_A^n(M)}$*, avec* $\mathrm{S_A^0(M)} = \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{S_A^1(M)} = \mathrm{M}$*, et* $\mathrm{S_A(M)}$ *est une* A*-algèbre graduée* **commutative***, appelée l'algèbre symétrique du* A*-module* M*. Elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute* A*-algèbre commutative* B*, et tout morphisme de* A*-modules* $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$*, il existe un unique morphisme de* A*-algèbres* $\psi : \mathrm{S_A(M)} \to \mathrm{B}$ *tel que* $\psi(m) = \tau(m)$*, pour tout* $m \in \mathrm{M}$*.*

Démonstration. — Posant $\mathrm{I}_n = \mathrm{I} \cap \mathrm{T_A^n(M)}$ et $\mathrm{S_A^n(M)} = \mathrm{T_A^n(M)/I}_n$, il résulte de la proposition précédente que

$$\mathrm{S_A(M)} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{S_A^n(M)}$$

est une A-algèbre graduée. De plus, comme I est engendré par des éléments de degré 2, on a $\mathrm{I}_0 = 0 = \mathrm{I}_1$ et donc $\mathrm{S_A^0(M)} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{S_A^1(M)} = \mathrm{M}$.

Pour $x, y \in \mathrm{M}$, leur produit $xy \in \mathrm{S_A^2(M)}$ est l'image dans $\mathrm{S_A^2(M)}$ de $x \otimes y$. Mais, comme $x \otimes y - y \otimes x \in \mathrm{I}_2$, on obtient que

$$(\dagger) \qquad xy = yx, \qquad \forall\, x, y \in \mathrm{M}$$

On en déduit que $\mathrm{S_A(M)}$ est commutative. En effet, tout élément de $\mathrm{S_A(M)}$ est une somme finie de monômes $x_1 \cdots x_p$, où $x_i \in \mathrm{M}$, et il résulte de (†) que deux tels monômes commutent.

Enfin, la propriété universelle de $\mathrm{S_A(M)}$ découle de celle de $\mathrm{T_A(M)}$: soient B une A-algèbre commutative et $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ un morphisme de A-modules. Alors, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\phi : \mathrm{T_A(M)} \to \mathrm{B}$ tel que

$$\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \tau(x_1) \cdots \tau(x_p)$$

pour tout $p \geqslant 1$, $x_i \in \mathrm{M}$. Comme B est commutative, on a $\phi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$ pour tout $x, y \in \mathrm{M}$, d'où $\phi(\mathrm{I}) = 0$. Donc ϕ passe au quotient et définit un morphisme de A-algèbres $\psi : \mathrm{S_A(M)} \to \mathrm{B}$ tel que

$$(*) \qquad \psi(x_1 \cdots x_p) = \tau(x_1) \cdots \tau(x_p)$$

pour tout $p \geqslant 1$ et $x_i \in \mathrm{M}$. Ceci prouve l'existence. Enfin, tout morphisme de A-algèbres $\psi : \mathrm{S_A(M)} \to \mathrm{B}$ tel que $\psi(m) = \tau(m)$ pour $m \in \mathrm{M}$, doit vérifier $(*)$, d'où l'unicité. □

***Théorème 9.8* (Algèbre symétrique de A^r).** — *Soit* M *un* A-*module libre de rang* r. *On a un isomorphisme de* A-*algèbres*

$$\mathrm{S_A(M)} \cong \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r].$$

En particulier, si $(v_1, \ldots, v_r)$ *est une* A-*base de* M *alors, pour tout* $n \geqslant 1$, *les monômes*

$$v_1^{t_1} \cdots v_r^{t_r}, \qquad t_i \geqslant 0,\ t_1 + \cdots + t_r = n,$$

forment une A-*base de* $\mathrm{S}^n_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ *et celui-ci est un* A-*module libre de rang* $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Démonstration. — Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une A-base de M. Considérons le morphisme de A-modules $\tau : \mathrm{M} \to k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]$ défini par $\tau(v_i) = \mathrm{X}_i$. D'après la propriété universelle de $\mathrm{S_A(M)}$, il existe un unique morphisme de A-algèbres

$$\psi : \mathrm{S_A(M)} \longrightarrow \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]$$

tel que $\psi(v_i) = \mathrm{X}_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Réciproquement, d'après la propriété universelle de $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]$, il existe un unique morphisme de A-algèbres

$$\phi : \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r] \longrightarrow \mathrm{S_A(M)}$$

tel que $\phi(\mathrm{X}_i) = v_i$. Alors $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ puisque $\mathrm{S_A(M)}$ est engendrée comme A-algèbre par les v_i, et de même $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Donc ψ et ϕ sont des isomorphismes réciproques, et la deuxième assertion en découle.

Enfin, le calcul du rang s'effectue grâce à l'astuce suivante. Considérons une ligne formée de $n+r-1$ cases, numérotées de 1 à $n+r-1$ de gauche à droite, dans laquelle on veut noircir $r-1$ cases. Il y a

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

choix possibles. D'autre part, chaque choix consiste en une suite strictement croissante

$$0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} < k_r = n$$

formée des numéros des cases noircies. Ce choix correspond au monôme

$$v_1^{t_1} \cdots v_r^{t_r},$$

où l'on a posé $t_i = k_i - k_{i-1}$ (le nombre de cases blanches entre k_{i-1} et k_i). On a bien $t_i \geqslant 0$ et $\sum_i t_i = n$, et réciproquement la donnée de tels t_i détermine de façon unique une suite de k_i. Ceci achève la preuve du théorème. □

9.5. Algèbre extérieure et applications multilinéaires alternées. — Soit M un A-module.

Définition et proposition 9.9 **(L'algèbre extérieure $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$)**
Soit
$\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *le quotient de la* A*-algèbre* $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *par l'idéal homogène* J *engendré par les éléments de degré* 2 *:*

$$x \otimes x, \qquad x \in \mathrm{M}.$$

On a $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$*, avec* $\bigwedge_{\mathrm{A}}^0(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ *et* $\bigwedge_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$*, et* $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *est une* A*-algèbre graduée, appelée l'algèbre extérieure du* A*-module* M*. Elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute* A*-algèbre* B*, et tout morphisme de* A*-modules* $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ *tel que*

$$\tau(m)^2 = 0, \qquad \forall\, m \in \mathrm{M},$$

il existe un unique morphisme de A*-algèbres* $\psi : \bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$ *tel que* $\psi(m) = \tau(m)$*, pour tout* $m \in \mathrm{M}$*.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{J}_n = \mathrm{J} \cap \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$ et $\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M}) = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})/\mathrm{J}_n$. Comme J est engendré par des éléments de degré 2, c'est un idéal homogène, et il résulte de la proposition 9.6 que

$$\bigwedge\nolimits_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigwedge\nolimits_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$$

est une A-algèbre graduée. De plus, $\mathrm{J}_0 = 0 = \mathrm{J}_1$, d'où $\bigwedge_{\mathrm{A}}^0(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et $\bigwedge_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

La propriété universelle de $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ découle de celle de $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, exactement comme dans le cas de l'algèbre symétrique. Ceci ne présente pas de difficulté et est laissé au lecteur. □

Notation 9.10. — Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{M} = \bigwedge_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M})$. On désigne par

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

leur produit dans l'algèbre $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$. Par définition, c'est l'image dans $\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$ de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.

On rappelle que S_n désigne le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Lemme 9.11. — 1) *Pour tout* $x, y \in \mathrm{M}$*, on a*

$$(*) \qquad x \wedge y = -y \wedge x.$$

2) *Plus généralement, pour tout* $n \geqslant 2$*,* $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{M}$ *et* $\tau \in \mathrm{S}_n$*, on a*

$$(**) \qquad x_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\tau(n)} = \pm x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

3) *Pour tout* $n \geqslant 2$, *soit* J'_n *le sous-*A*-module de* $\mathrm{T}^n_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ *engendré par les tenseurs* $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ *pour lesquels les* x_i *ne sont pas tous distincts (c.-à-d., il existe* $i \neq j$ *tel que* $x_i = x_j$*). Alors,* $\mathrm{J}'_n = \mathrm{J}_n$.

Démonstration. — Pour tout $x, y \in \mathrm{M}$, on a

$$(x+y) \otimes (x+y) = x \otimes x + y \otimes y + x \otimes y + y \otimes x,$$

d'où $x \otimes y + y \otimes x \in \mathrm{J}$, et donc $x \wedge y + y \wedge x = 0$. Ceci prouve 1).

Le point 2) en découle. En effet, si $1 = \tau(i)$, c.-à-d., si x_1 apparaît à la i-ème place dans le tenseur de gauche, alors on peut ramener x_1 à la 1ère place par $(i-1)$ applications de $(*)$, ce qui produit le signe $(-1)^{i-1}$. On procède ensuite de même avec x_2, etc.

3) Il est clair que $\mathrm{J}_n \subseteq \mathrm{J}'_n$; montrons la réciproque. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{M}$; on suppose qu'il existe $i < j$ tel que $x_i = x_j$. Il s'agit de montrer que

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{J}_n$$

ou, de façon équivalente, que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$. Or, en utilisant 1) de façon répétée, puis l'égalité $x_i = x_j$, on obtient

$$x_i \wedge \cdots \wedge x_j = (-1)^{j-1-i}\, x_i \wedge x_j \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_{j-1} = 0.$$

□

Remarque 9.12. — On suppose connue la définition de la signature $\varepsilon(\tau)$ d'une permutation $\tau \in \mathrm{S}_n$. En utilisant le fait que S_n est engendré par les transpositions $(i, i+1)$ et que $\varepsilon : \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes, on peut montrer que le signe qui apparaît dans $(**)$ est la signature $\varepsilon(\tau)$.

Proposition 9.13. — *Supposons que* M *soit engendré comme* A*-module par des éléments* $v_1, \dots, v_d$. *Alors, pour* $1 \leqslant n \leqslant d$, $\bigwedge^n_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ *est engendré comme* A*-module par les* $\binom{d}{n}$ *éléments*

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d,$$

et l'on a $\bigwedge^n_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = 0$ *pour* $n > d$.

Démonstration. — Soit $n \geqslant 1$. Par multilinéarité, tout élément de $\bigwedge^n_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ est combinaison linéaire des d^n éléments

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant d.$$

Or, d'après le point 1) du lemme précédent, cet élément est nul si deux indices i_j et i_k sont égaux. Ceci est forcément le cas si $n > d$, ce qui prouve déjà que $\bigwedge^n_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = 0$ si $n > d$.

On peut donc supposer $n \leqslant d$ et les indices $i_1, \dots, i_n$ deux à deux distincts. On peut de plus se ramener au cas où

$$i_1 < \cdots < i_n$$

puisque, d'après le point 2) du lemme précédent, effectuer des permutations ne fait que produire un changement de signe. Ceci prouve la proposition. □

Définition 9.14. — Soient M, N deux A-modules et $n \geqslant 1$. Une application A-multilinéaire $\phi : \mathrm{M}^n \to \mathrm{N}$ est dite **alternée** si elle vérifie, pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{M}$,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ s'il existe } i \neq j \text{ tel que } x_i = x_j.$$

On note $\mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ l'ensemble des applications A-multilinéaires alternées $\mathrm{M}^n \to \mathrm{N}$.

Théorème 9.15 **(Propriété universelle de $\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$)**. — *Pour tout morphisme de* A*-modules* $f : \bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M}) \to \mathrm{N}$*, l'application*

$$\theta(f) : \mathrm{M}^n \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$$

est alternée, et θ définit une bijection

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\textstyle\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M}), \mathrm{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Démonstration. — $\theta(f)$ est évidemment A-multilinéaire. Comme f s'annule sur $\mathrm{J}_n = \mathrm{J}'_n$, alors $\theta(f)$ est alternée. On a donc une application

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\textstyle\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M}), \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Réciproquement, soit $\phi \in \mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. Comme ϕ est A-multilinéaire, il induit une application A-linéaire

$$\eta(\phi) : \mathrm{M}^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \phi(x_1, \dots, x_n).$$

Comme ϕ est alternée, alors $\eta(\phi)$ s'annule sur $\mathrm{J}'_n = \mathrm{J}_n$ donc passe au quotient et définit une application A-linéaire

$$\eta'(\phi) : \textstyle\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \phi(x_1, \dots, x_n).$$

On voit alors que θ et η' sont des bijections réciproques. Ceci prouve le théorème. □

Théorème 9.16 **(Algèbre extérieure de A^d)**. — *Si* M *est un* A*-module libre de base* $(v_1, \dots, v_d)$ *alors* $\bigwedge_{\mathrm{A}}^d(\mathrm{M}) = 0$ *pour* $n > d$ *et, pour* $n \leqslant d$*, les monômes*

$$(\dagger) \qquad v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d,$$

forment une A*-base de* $\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$ *; celui-ci est donc un* A*-module libre de rang* $\binom{d}{n}$*. En particulier,* $\bigwedge_{\mathrm{A}}^d(\mathrm{M}) \cong \mathrm{A}$.

Démonstration. — D'après la proposition 9.13, $\bigwedge_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M}) = 0$ pour $n > d$, et les éléments (†) engendrent $\bigwedge_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M})$ comme A-module pour $n \leqslant d$. Il s'agit donc de montrer que les éléments (†) sont linéairement indépendants sur A.

Traitons d'abord le cas particulier $n = d$. Posons $\mathrm{C} = \bigwedge_{\mathrm{A}}^{d}(\mathrm{M})$; on sait que C est engendré comme A-module par l'élément

$$c := v_1 \wedge \cdots \wedge v_d.$$

Soit $\mathfrak{a}$ l'annulateur de c, c.-à-d., le noyau du morphisme surjectif $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $a \mapsto ac$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{a} = 0$. On va montrer plus bas qu'il existe un élément

$$(*) \qquad f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{A}) \text{ tel que } f(c) = 1.$$

Tenant ceci pour acquis, pour tout $a \in \mathfrak{a}$ on obtient $0 = f(ac) = af(c) = a$, d'où $\mathfrak{a} = 0$. Ceci montre que $\bigwedge_{\mathrm{A}}^{d}(\mathrm{M})$ est librement engendré par c.

Maintenant, pour $n < d$, notons $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, d\}$ ayant n éléments. Si I est une telle partie, et si l'on désigne par $i_1 < \cdots < i_n$ ses éléments, rangés par ordre croissant, on pose

$$v_{\mathrm{I}} := v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}.$$

Supposons qu'on ait une relation de dépendance linéaire

$$(\mathrm{E}) \qquad 0 = \sum_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_n} a_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}, \qquad a_{\mathrm{I}} \in \mathrm{A}.$$

Fixons $\mathrm{I}_0 \in \mathscr{P}_n$ et soit J_0 son complémentaire dans $\{1, \ldots, d\}$. Alors $\mathrm{J}_0 \in \mathscr{P}_{d-n}$ et, pour tout $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_n$, on a :

$$\mathrm{I} \neq \mathrm{I}_0 \Rightarrow \mathrm{I} \cap \mathrm{J}_0 \neq \varnothing.$$

Par conséquent, il résulte du lemme 9.11 qu'en multipliant (E) par v_{J_0}, on obtient

$$0 = a_{\mathrm{I}_0} v_{\mathrm{I}_0} \wedge v_{\mathrm{J}_0} = \pm a_{\mathrm{I}_0} c.$$

Comme C est librement engendré par c, ceci implique $a_{\mathrm{I}_0} = 0$. Ceci montre que les v_{I} sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\bigwedge_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M})$, qui est donc un A-module libre de rang $\binom{d}{n}$. Ceci achève la preuve du théorème, modulo la preuve de l'assertion $(*)$.

Or, d'après la propriété universelle 9.15, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\textstyle\bigwedge_{\mathrm{A}}^{d}(\mathrm{M}), \mathrm{A}) \cong \mathrm{Alt}_d(\mathrm{M}, \mathrm{A}).$$

Par conséquent, pour trouver un tel f, il suffit de trouver une application A-multilinéaire alternée $\phi : \mathrm{M}^d \to \mathrm{A}$ telle que $\phi(v_1, \ldots, v_d) = 1$. Considérons l'application ϕ définie comme suit. Pour tout d-uplet $(x_1, \ldots, x_d)$ d'éléments de M, on peut former la matrice

$$\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_d) = \mathrm{Mat}_{(v_1, \ldots, v_d)}(x_1, \ldots, x_d)$$

exprimant les x_j dans la base (v_i). C.-à-d., chaque x_j s'écrit de façon unique dans la base (v_i) :

$$x_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} v_i;$$

on forme alors la matrice $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_d) = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. On pose alors

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}\,\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n).$$

Il résulte des propriétés des déterminants que ϕ est une application multilinéaire alternée. (Pour la construction et les propriétés des déterminants, on renvoie, par exemple, à [**BM**, Ch. IV] ou [**La**, XIII, § 4]). De plus, pour $(x_1, \ldots, x_d) = (v_1, \ldots, v_d)$, la matrice P est la matrice identité, de déterminant 1. On a donc bien $\phi(v_1, \ldots, v_d) = 1$. Ceci achève la preuve du théorème. □

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Art] E. Artin, Galois Theory, nouvelle édition, Dover, 1998.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.

[BAlg] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[BM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative (niveau M1), Ellipses, 2004.

[ChL] A. Chambert-Loir, Algèbre corporelle, Presses de l'École polytechnique, 2005.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Dou] A. Douady, R. Douady, Algèbre et théories galoisiennes (2 tomes), Cedic Fernand Nathan, 1977, 2ème éd., Cassini, 2005.

[Elk] R. Elkik, Cours d'algèbre, Ellipses, 2002.

[Esc] J.-P. Escofier, Théorie de Galois, Dunod, 2000.

[Ja1] N. Jacobson, Basic algebra I, W. H. Freeman & Co., 1974.

[Ja2] N. Jacobson, Basic algebra II, W. H. Freeman & Co., 1980.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : Algèbre, Dunod, 2004.

[Ne04] J. Nekovàř, Théorie de Galois, cours UPMC 2003/4, disponible à l'adresse : www.math.jussieu.fr/~nekovar/co/ln

[Pe1] D. Perrin, Cours d'algèbre, E.N.S.J.F. 1981, et 3ème édition, Ellipses, 1996.

[Pe2] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Sa] P. Samuel, Théorie algébrique des nombres, Hermann, 1967.

[Se] J.-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, (3ème édition corrigée), Hermann, 1978.

[Ti] J.-P. Tignol, Galois' Theory of algebraic equations, World Scientific, 2001.