X. PRODUIT TENSORIEL ET APPLICATIONS, LOCALISATION

SÉANCE ADDITIONNELLE DU 4 DÉCEMBRE (HORS DU PROGRAMME DE L'EXAMEN)

23. Produit tensoriel

[17] Soit A un anneau commutatif et soient M, N deux A-modules. On veut définir un A-module $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ qui soit engendré par les « produits » d'un élément de M par un élément de N, c.-à-d., par des éléments notés $m \otimes n$.

23.1. Deux motivations. —

23.1.1. Complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. — Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On veut plonger V dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$, appelé le « complexifié » de V. Voici deux façons de faire.

1ère méthode. Supposons V de dimension finie n. Choisissons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. Ceci permet d'identifier V à $\mathbb{R}^n$, via $\sum_k x_k e_k \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. On définit alors le complexifié $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ comme étant $\mathbb{C}^n$, c.-à-d., l'ensemble des combinaisons linéaires $z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n$, avec $z_k \in \mathbb{C}$.

Alors, $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une base de $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{V}_{\mathbb{C}} = 2n$.

2ème méthode. Plutôt que de choisir une base de V, prenons $\{1, i\}$ comme base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. Ceci conduit à définir $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ comme

$$\mathrm{V} \bigoplus i\mathrm{V},$$

c.-à-d., comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$, et on désigne le couple (u, v) par $u + iv$. La structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel est donnée, bien sûr, par

$$a \cdot (u + iv) = au + iav, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 + 1)$, pour définir une action de $\mathbb{C}$ sur $\mathrm{V} \oplus i\mathrm{V}$, il suffit de définir une action de i telle $i \cdot i \cdot w = -w$, pour tout $w \in \mathrm{V} \oplus i\mathrm{V}$.

[17] version du 2/12/07

Comme la notation le suggère, on pose

$$i \cdot (v, 0) = (0, v), \quad \text{c.-à-d.,} \quad i \cdot (v + 0) = 0 + iv,$$

d'où nécessairement $i \cdot (0, v) = (-v, 0)$. On obtient ainsi une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur

$$\mathrm{V}_{\mathbb{C}} = \mathrm{V} \bigoplus i\mathrm{V}.$$

Explicitement, il résulte de ce qui précède que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ u, v \in \mathrm{V}, \qquad (a + ib) \cdot (u + iv) = (au - bv) + i(av + bu).$$

(Cette formule est parfois donnée comme *définition* de $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}\ldots$)

Remarque 23.1. — C'est un exercice que de vérifier que les deux définitions précédentes coïncident, et donc qu'aucune d'elles ne dépend de la $\mathbb{R}$-base (de V ou de $\mathbb{C}$) choisie. (On aurait aussi pu prendre $\{1, j\}$ comme base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, où $j = \exp(2i\pi/3)$.)

On va voir que le produit tensoriel permet de définir de façon *canonique* (c.-à-d., sans aucun choix), l'espace vectoriel $\mathrm{V}_{\mathbb{C}}$ « obtenu à partir de V par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ ».

Plus généralement, si $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'anneaux commutatifs et si M est un A-module, on obtiendra un B-module M_{B} « obtenu à partir de M par extension des scalaires de A à B ».

23.1.2. Produit tensoriel d'algèbres. — Une autre motivation est la suivante.

Définition 23.2. — Soient A, B deux anneaux commutatifs. On dit que B est une A-**algèbre** si l'on s'est donné un morphisme d'anneaux $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

Dans ce cas, B est un A-module, par « restriction des scalaires » via ϕ, c.-à-d., pour l'action $a \cdot b = \phi(a)b$.

Considérons le cas où $\mathrm{A} = \mathbb{C}$, et où l'on se donne les deux $\mathbb{C}$-algèbres $\mathrm{B} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{B}' = \mathbb{C}[\mathrm{Y}]$. On veut définir le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{C}}$ de sorte que l'on ait

$$\mathbb{C}[\mathrm{X}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathrm{Y}] = \mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}],$$

le terme de droite étant l'anneau des polynômes en deux variables, c.-à-d., l'ensemble des sommes finies

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j,$$

où $n \geqslant 0$ et $a_{ij} \in \mathbb{C}$. On voit ainsi que tout polynôme en X, Y est une **somme** de termes $\mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{Y})$; de plus, d'après l'écriture ci-dessus on peut se limiter au cas où P et Q sont des monômes. On prendra garde au fait qu'un polynôme en

X, Y arbitraire n'est pas, en général, égal à un produit de la forme $P(X)Q(Y)$. En effet, pour tout $R \in \mathbb{C}[X, Y]$, notons

$$V(R) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid R(x, y) = 0\}.$$

Si R est de la forme $P(X)Q(Y)$, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $\beta_1, \ldots, \beta_s$ les racines de P et Q, alors $V(R)$ est la réunion des droites verticales $x = \alpha_i$ et des droites horizontales $y = \beta_j$. Par contre, pour $R = XY - 1$, on a

$$V(R) = \{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{C}^\times\}$$

et cet ensemble n'est pas une réunion finie de droites. Ceci montre que $XY - 1$ ne peut s'écrire comme un produit $P(X)Q(Y)$. Ceci illustre la nécessité de considérer non seulement ces produits, mais l'ensemble de toutes les *sommes* de tels produits.

23.2. Applications bilinéaires. — Soient M, N, P trois A-modules.

Définition 23.3. — Soit ϕ une application d'ensembles $M \times N \to P$. On dit que ϕ est **A-bilinéaire** si elle est A-linéaire en chacune des variables, c.-à-d., si : $\forall\, a, a' \in A$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$,

$$\phi(am + a'm', n) = a\phi(m, n) + a'\phi(m', n); \tag{1}$$

$$\phi(m, an + a'n') = a\phi(m, n) + a'\phi(m, n'). \tag{2}$$

On note $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ l'ensemble de ces applications.

***Définition 23.4* (Applications à valeurs dans un A-module)**

Soit X un ensemble. Si f, g sont deux applications de X dans P, et $a \in A$, on définit les applications $f + g$ et af par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (af)(x) = af(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Ceci munit l'ensemble des applications de X dans P, noté $\mathrm{Applic}(X, P)$, d'une structure de A-module.

Lemme 23.5. — 1) *L'ensemble* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *des morphismes de* A*-modules* $M \to N$ *est un sous-*A*-module de* $\mathrm{Applic}(M, N)$.

2) *De même,* $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ *est un sous-*A*-module de* $\mathrm{Applic}(M \times N, P)$.

Démonstration. — 1) Soient $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ et $a \in A$. Il faut montrer que l'application

$$a\phi + \psi : M \longrightarrow N, \qquad m \mapsto a\phi(m) + \psi(m),$$

est A-linéaire. Soient $m, m' \in \mathrm{M}$ et $b \in \mathrm{A}$. Alors,

$$\begin{aligned}(a\phi + \psi)(m + bm') &= a\phi(m + bm') + \psi(m + bm') \\ &= a\phi(m) + ab\phi(m') + \psi(m) + b\psi(m') \\ &= (a\phi + \psi)(m) + b(a\phi + \psi)(m').\end{aligned}$$

(Noter qu'on a utilisé la commutativité de A dans la dernière égalité). Ceci montre que $a\phi + \psi$ est A-linéaire, c.-à-d., appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

La démonstration du point 2) est tout-à-fait analogue (on vérifie la A-linéarité par rapport à chacune des variables), et est laissée au lecteur. □

Proposition 23.6. — *On a des isomorphismes de* A*-modules*

$$\mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})); \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{P})). \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer le premier isomorphisme, le deuxième étant analogue. Notons

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})) \longrightarrow \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}), \quad \theta \mapsto \beta(\theta)$$

l'application définie par

$$\beta(\theta)(m, n) = \theta(m)(n),$$

pour tout $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$. On voit facilement que $\beta(\theta)$ est A-bilinéaire.

De plus, β est un morphisme de A-modules. En effet, d'après les définitions, l'on a

$$\begin{aligned}\beta(a\theta + \theta')(m, n) = (a\theta + \theta')(m)(n) &= (a\theta(m) + \theta'(m))(n) \\ = a\theta(m)(n) + \theta'(m)(n) &= (a\beta(\theta) + \beta(\theta'))(m, n).\end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer que β est un isomorphisme, il suffit d'exhiber une application inverse. Pour tout $\phi \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P})$ et tout $m \in \mathrm{M}$, soit $\alpha(\phi)(m)$ l'application $n \mapsto \phi(m, n)$. Cette application appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})$ puisque, pour m fixé, $\phi(m, -)$ est A-linéaire en la 2ème variable. Ainsi, on a obtenu une application

$$\alpha(\phi) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P}).$$

Montrons que cette application est A-linéaire, c.-à-d., que

$$\alpha(\phi)(m + am') = \alpha(\phi)(m) + a\alpha(\phi)(m')$$

(égalité d'applications de N vers P). Évaluant les deux membres en un élément $n \in \mathrm{N}$ arbitraire, ceci revient à montrer que

$$\phi(m + am', n) = \phi(m, n) + a\phi(m', n).$$

Or cette égalité est bien vérifiée, puisque ϕ est A-linéaire en la 1ère variable. Ceci montre que $\alpha(\phi)$ est A-linéaire, et donc que α définit une application

$$\alpha : \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}\times\mathrm{N},\mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N},\mathrm{P})).$$

On vérifie alors facilement que $(\alpha\circ\beta)(\theta)=\theta$ et $(\beta\circ\alpha)(\phi)=\phi$ pour tout θ et ϕ. Ceci prouve la proposition. □

23.3. Produit tensoriel : définition et propriété universelle. — Soient M,N deux A-modules. On veut définir un A-module, noté $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ ou simplement $\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}$, qui soit formé des sommes de « produits » $m\otimes n$ d'un élément de M par un élément de N. On veut de plus que ce « produit » $\otimes$ vérifie les deux propriétés suivantes.

1) bi-additivité : $\begin{cases}(m+m')\otimes n = m\otimes n + m'\otimes n\\ m\otimes(n+n') = m\otimes n + m\otimes n'.\end{cases}$

2) « unicité de l'action de A » :

$$a\cdot(m\otimes n)=(am)\otimes n = m\otimes(an).$$

On forme donc le A-module libre $\mathrm{A}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})$, qui est l'ensemble de toutes les sommes formelles finies

$$\sum_{(m,n)\in\mathrm{M}\times\mathrm{N}} a_{m,n}e_{m,n},$$

avec $a_{m,n}\in\mathrm{A}$ et $a_{m,n}=0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Soit K le sous-A-module engendré par les éléments de l'un des types suivants :

$$\begin{aligned}&(1)\ e_{am+m',n}-ae_{m,n}-e_{m',n},\\&(2)\ e_{m,an+n'}-ae_{m,n}-e_{m,n'},\end{aligned}$$

pour $a\in\mathrm{A}$, $m,m'\in\mathrm{M}$, $n,n'\in\mathrm{N}$.

Définition 23.7. — On pose $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}=\mathrm{A}(\mathrm{M}\times\mathrm{N})/\mathrm{K}$ et l'on note $m\otimes n$ l'image de $e_{m,n}$ dans $\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}$.

Remarque 23.8. — Il résulte des relations (1) et (2) que le produit $m\otimes n$ vérifie la condition 1) (bi-additivité) et la condition 2) :

$$a\cdot(m\otimes n)=(am)\otimes n = m\otimes(an).$$

En particulier, tout élément de $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ est une somme finie d'éléments $m\otimes n$.

Proposition 23.9. — *Soit* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, *resp.* $(f_j)_{j\in\mathrm{J}}$, *un système de générateurs de* M, *resp.* N, *comme* A-*module. Alors* $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ *est engendré comme* A-*module par les éléments* $e_i\otimes f_j$, *pour* $i\in\mathrm{I}$, $j\in\mathrm{J}$.

Démonstration. — Soient $m \in \mathrm{M}$ et $n \in \mathrm{N}$. Par hypothèse, m et n s'écrivent comme des sommes finies

$$m = a_1 e_{i_1} + \cdots + a_r e_{i_r}, \qquad n = b_1 f_{j_1} + \cdots + b_s f_{j_s},$$

avec les a_t et b_u dans A. D'après les relations (1) et (2), on a

$$m \otimes n = \sum_{t=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_t b_u \, e_{i_t} \otimes f_{j_u}.$$

Puisque tout élément de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ est une somme finie d'éléments $m \otimes n$, il en résulte que les $e_i \otimes f_j$ engendrent $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ comme A-module. $\square$

***Théorème 23.10* (Propriété universelle de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, I).** — *Pour tout* A*-module* P*, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}, \mathrm{P}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P}), \quad \phi \mapsto \mathrm{B}(\phi),$$

où $\mathrm{B}(\phi)$ *est l'application* $(m, n) \mapsto \phi(m \otimes n)$*. Son inverse est l'application* $\psi \mapsto \mathrm{T}(\psi)$*, où* $\mathrm{T}(\psi)$ *est l'unique* A*-morphisme*

$$\mathrm{T}(\psi) : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\mathrm{T}(\psi)(m \otimes n) = \psi(m, n)$ *pour tout* $m \in \mathrm{M}$*,* $n \in \mathrm{N}$*.*

En particulier, pour définir une application A*-linéaire* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{P}$*, il suffit d'avoir une application* A*-bilinéaire* $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{P}$*.*

Démonstration. — Montrons d'abord que l'application $\psi \mapsto \mathrm{T}(\psi)$ est bien définie. Notons π la projection $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$.

Soit $\psi \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P})$. D'après la propriété universelle du module libre $\mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N})$, il existe un unique morphisme de A-modules

$$\widetilde{\psi} : \mathrm{A}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\widetilde{\psi}(e_{m,n}) = \psi(m, n)$, pour tout $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$. Il faut voir que $\widetilde{\psi}$ passe au quotient, c.-à-d., s'annule sur le sous-module K. Comme celui-ci est engendré par les générateurs de type (1) ou (2), il suffit de voir que $\widetilde{\psi}$ s'annule sur ces générateurs. Pour ceux de type (1), l'on a :

$$\widetilde{\psi}(e_{am+m',n} - a e_{m,n} - e_{m',n}) = \phi(m + m', n) - a\psi(m, n) - \psi(m', n) = 0,$$

puisque ψ est A-linéaire en la 1ère variable. De même, la linéarité en la 2ème variable entraîne que $\widetilde{\psi}$ s'annule sur les générateurs de type (2). Par conséquent, il existe un unique morphisme de A-modules

$$\mathrm{T}(\psi) : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\mathrm{T}(\psi) \circ \pi = \widetilde{\psi}$. On a alors

$$\mathrm{T}(\psi)(m \otimes n) = \widetilde{\psi}(e_{m,n}) = \psi(m, n),$$

pour tout $(m, n) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$.

Alors, pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}, \mathrm{P})$, tout $\psi \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \mathrm{P})$ et tout $m \in \mathrm{M}$, $n \in \mathrm{N}$, l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{TB}(\phi)(m \otimes n) &= \mathrm{B}(\phi)(m, n) = \phi(m \otimes n) \\ \text{et} \quad \mathrm{BT}(\psi)(m, n) &= \mathrm{T}(\psi)(m \otimes n) = \psi(m, n). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{TB}(\phi) = \phi$ et $\mathrm{BT}(\psi) = \psi$, pour tout ϕ et ψ. Le théorème est démontré. □

On déduit du théorème, combiné avec la proposition 23.6, le corollaire suivant.

Corollaire 23.11 **(Propriété universelle de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, II)**. — *Pour tout* A*-module* P*, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}, \mathrm{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{P})).$$

23.4. Premières propriétés du produit tensoriel. —

Proposition 23.12 **(Commutativité et associativité)**. — *Soient* M, N, P *des* A*-modules. On a des isomorphismes de* A*-modules*

$$\mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \cong \mathrm{N} \otimes \mathrm{M}; \tag{1}$$

$$(\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}) \otimes \mathrm{P} \cong \mathrm{M} \otimes (\mathrm{N} \otimes \mathrm{P}). \tag{2}$$

Démonstration. — 1) L'application $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N} \otimes \mathrm{M}$, $(m, n) \mapsto n \otimes m$ est A-bilinéaire donc induit un A-morphisme

$$\sigma : \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N} \otimes \mathrm{M},$$

tel que $\sigma(m \otimes n) = n \otimes m$ pour tout m, n. On obtient de même un A-morphisme $\tau : \mathrm{N} \otimes \mathrm{M} \to \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}$ tel que $\tau(n \otimes m) = m \otimes n$ pour tout m, n. Alors, il est clair que

$$\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}} \quad \text{et} \quad \sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{N} \otimes \mathrm{M}}.$$

Ceci prouve le point 1).

2) Pour $p \in \mathrm{P}$ fixé, l'application $(m, n) \mapsto m \otimes (n \otimes p)$ est A-bilinéaire, donc induit un A-morphisme

$$\theta_p : \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M} \otimes (\mathrm{N} \otimes \mathrm{P}),$$

tel que $\theta_p(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes p)$ pour tout m, n. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \theta : (\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}) \times \mathrm{P} &\longrightarrow \mathrm{M} \otimes (\mathrm{N} \otimes \mathrm{P}), \\ (m \otimes n, p) &\mapsto \theta_p(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes p), \end{aligned}$$

est A-bilinéaire, donc induit un morphisme de A-modules

$$\gamma : (\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}) \otimes \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{M} \otimes (\mathrm{N} \otimes \mathrm{P}),$$

tel que $\gamma((m \otimes n) \otimes p) = m \otimes (n \otimes p)$ pour tout m, n, p. On obtient de façon analogue un morphisme de A-modules

$$\delta : \mathrm{M} \otimes (\mathrm{N} \otimes \mathrm{P}) \longrightarrow (\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}) \otimes \mathrm{P},$$

tel que $\gamma(m \otimes (n \otimes p)) = (m \otimes n) \otimes p$ pour tout m, n, p. Il est alors clair que γ et δ sont inverses l'un de l'autre. Ceci prouve la proposition. □

Proposition 23.13. — *On a* $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \cong \mathrm{M}$, *pour tout* A-*module* M.

Démonstration. — D'abord, l'application $\psi : \mathrm{M} \to \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, $m \mapsto 1 \otimes m$ est A-linéaire. D'autre part, l'application

$$\mathrm{A} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}, \qquad (a, m) \mapsto am$$

est A-bilinéaire, donc induit une application A-linéaire $\phi : \mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ telle que

$$\phi(a \otimes m) = am, \qquad \forall\, a \in \mathrm{A},\ m \in \mathrm{M}.$$

Alors $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ et, pour tout $a \in \mathrm{A}$, $m \in \mathrm{M}$, l'on a

$$\psi(\phi(a \otimes m)) = 1 \otimes am = a \otimes m,$$

d'où $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}}$. Ceci prouve la proposition. □

Théorème 23.14 **($\otimes_{\mathrm{A}}$ est un bifoncteur)**. — *Le produit tensoriel est un bifoncteur, au sens suivant. Tout morphisme de* A-*modules*

$$f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}', \quad \textit{resp.} \quad g : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}'$$

induit un morphisme de A-*modules*

$$\begin{aligned} f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}} &: \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N}, \\ \textit{resp.}\ \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \otimes g &: \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}' \end{aligned}$$

tel que

$$(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})(m \otimes n) = f(m) \otimes n, \quad \textit{resp.} \quad (\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \otimes g)(m \otimes n) = m \otimes g(n),$$

pour tout $m \in \mathrm{M}, n \in \mathrm{N}$.

Ces applications $f \mapsto f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ *et* $g \mapsto \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \otimes g$ *sont fonctorielles, c.-à-d., préservent les morphismes identités et la composition. De plus, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} & \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}} & \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \otimes g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathrm{M}'} \otimes g} \\ \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}' & \xrightarrow[f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}'}]{} & \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N}'. \end{array}$$

Démonstration. — L'application $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N}$, $(m,n) \mapsto f(m) \otimes n$ est A-bilinéaire donc induit une application A-linéaire

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(f) = f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}} : \mathrm{M} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}' \otimes \mathrm{N},$$

telle que $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(f)(m \otimes n) = f(m) \otimes n$. Au vu de cette formule, il est clair que $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}}$ et que $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(f' \circ f) = \mathrm{T}_{\mathrm{N}}(f') \circ \mathrm{T}_{\mathrm{N}}(f)$, si f' est un morphisme de A-modules $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}''$. Ceci montre que la correspondance

$$\mathrm{T}_{\mathrm{N}} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}$$

est un foncteur. Par conséquent, le produit tensoriel est fonctoriel en la 1ère variable. L'assertion analogue pour la 2ème variable (*i.e.*, les morphismes $g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}'$) se démontre de façon analogue.

Enfin, le diagramme indiqué est commutatif car la composée $(\mathrm{id}_{\mathrm{M}'} \otimes g)(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})$ envoie chaque $m \otimes n$ sur $f(m) \otimes g(n)$, et il en est de même pour $(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}'})(\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \otimes g)$. Ceci prouve le théorème. $\square$

Remarque 23.15. — 1) Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ est surjective, il en est de même de $f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}} : \mathrm{M}\otimes\mathrm{N} \to \mathrm{M}'\otimes\mathrm{N}$. En effet, si $m' = f(m)$, alors $m' \otimes n = (f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})(m \otimes n)$, pour tout $n \in \mathrm{N}$.

2) **Attention**, si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ est injective, $f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ n'est pas nécessairement injective. Par exemple, soient $\mathrm{A} = \mathbb{Z} = \mathrm{M}' = \mathrm{M}$, soit f le morphisme injectif $x \mapsto 2x$, et soit $\mathrm{N} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, $f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ est l'application nulle, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a

$$(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}})(x \otimes \overline{1}) = 2x \otimes \overline{1} = x \otimes 2 \cdot \overline{1} = 0.$$

D'autre part, d'après la proposition 23.13, $\mathrm{M}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ s'identifie à N, donc est non nul. Ceci montre que $f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ n'est pas injective.

23.5. Applications multilinéaires et produits tensoriels itérés. — La notion d'application bilinéaire se généralise comme suit. Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ et P des A-modules.

Définition 23.16. — Soit ϕ une application d'ensembles

$$\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{P}.$$

On dit que ϕ est A-**multilinéaire** si elle est A-linéaire en chacune des variables. On note $\mathrm{Mult}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n, \mathrm{P})$ l'ensemble de ces applications.

Considérons le A-module libre $\mathrm{A}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n)$, qui est l'ensemble de toutes les sommes formelles finies

$$\sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in \mathrm{M}_1\times\cdots\times\mathrm{M}_n} a_{(m_1,\ldots,m_n)} e_{(m_1,\ldots,m_n)},$$

avec $a_{(m_1,\dots,m_n)} \in \mathrm{A}$ et $a_{(m_1,\dots,m_n)} = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Soit K le sous-A-module engendré par les éléments du type suivant, pour $i = 1, \dots, n$,

$$e_{(m_1,\dots,am_i+m_i',\dots,m_n)} - ae_{(m_1,\dots,m_i,\dots,m_n)} - e_{(m_1,\dots,m_i',\dots,m_n)}.$$

Définition 23.17. — On pose

$$\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n = \mathrm{A}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n)/\mathrm{K}$$

et l'on note $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ l'image de $e_{(m_1,\dots,m_n)}$ dans $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$.

On obtient alors, exactement comme au paragraphe 23.3, le théorème suivant.

***Théorème 23.18* (Propriété universelle de $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$)**
Pour tout A*-module* P*, on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n, \mathrm{P}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mult}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n, \mathrm{P}), \quad \phi \mapsto \mathrm{B}(\phi),$$

où $\mathrm{B}(\phi)$ *est l'application* $(m_1, \dots, m_n) \mapsto \phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n)$*. Son inverse est l'application* $\psi \mapsto \mathrm{T}(\psi)$*, où* $\mathrm{T}(\psi)$ *est l'unique* A*-morphisme*

$$\mathrm{T}(\psi) : \mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{P}$$

tel que $\mathrm{T}(\psi)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \psi(m_1, \dots, m_n)$*.*

En particulier, pour définir une application A*-linéaire* $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n \to \mathrm{P}$*, il suffit d'avoir une application* A*-multilinéaire* $\mathrm{M}_1 \times \cdots \times \mathrm{M}_n \to \mathrm{P}$*.*

D'autre part, on a le théorème suivant.

Théorème 23.19. — *Pour tout* i*, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n \xrightarrow{\sim} (\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes \mathrm{M}_n).$$

Démonstration. — Posons $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$. L'application

$$(m_1, \dots, m_n) \mapsto (m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n)$$

est A-multilinéaire, donc induit une application A-linéaire

$$\phi : \mathrm{M} \longrightarrow (\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n)$$

telle que

$$\phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = (m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n).$$

Construisons l'application inverse. Pour $m_1, \dots, m_i$ fixés, l'application

$$(m_{i+1}, \dots, m_n) \mapsto m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$$

est A-multilinéaire donc induit

$$\tau(m_1, \ldots, m_i) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n, \mathrm{M})$$

tel que

$$\tau(m_1, \ldots, m_i)(m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n.$$

On voit de plus que l'application $(m_1, \ldots, m_i) \mapsto \tau(m_1, \ldots, m_i)$ est A-multilinéaire. Donc il existe

$$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i, \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n, \mathrm{M})\right)$$

tel que $\tau(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i)(m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$. D'après la propriété universelle du produit tensoriel (Corollaire 23.10), τ correspond à l'application A-linéaire

$$\psi : (\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_i) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}_{i+1} \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n) \longrightarrow \mathrm{M}$$

qui envoie $(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n)$ sur $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$. Il est alors clair que ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre. Le théorème est démontré. □

Notation 23.20. — Il résulte du théorème que tous les modules obtenus à partir de $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ en ajoutant des parenthèses pour former des produits tensoriels de deux modules, sont canoniquement isomorphes à $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$, par l'application qui consiste à "omettre les parenthèses". Par exemple, on a

$$(\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2) \otimes (\mathrm{M}_3 \otimes \mathrm{M}_4) \cong (\mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2 \otimes \mathrm{M}_3 \otimes \mathrm{M}_4) \cong (\mathrm{M}_1 \otimes (\mathrm{M}_2 \otimes (\mathrm{M}_3 \otimes \mathrm{M}_4))$$

via

$$(m_1 \otimes m_2) \otimes (m_3 \otimes m_4) = m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 \otimes m_4 = (m_1 \otimes (m_2 \otimes (m_3 \otimes m_4)).$$

Par conséquent, dans la suite, on omettra les parenthèses dans les produits tensoriels de plus de deux modules.

Signalons enfin la proposition suivante, qui résulte de l'identification précédente et de la proposition 23.9, ou bien se démontre directement, comme la proposition 23.9.

Proposition 23.21. — *Pour $r = 1, \ldots, n$, soit $(e_i)_{i \in \mathrm{I}_r}$ un système de générateurs de M_r comme* A*-module. Alors $\mathrm{M}_1 \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_n$ est engendré comme* A*-module par les éléments $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$, avec $i_r \in \mathrm{I}_r$.*

23.6. Produits tensoriels d'algèbres et produits de variétés. — Soit k un corps. Commençons par montrer que le produit tensoriel $\otimes_k$ a la propriété proposée comme motivation en 23.1.2, c.-à-d., que le produit tensoriel de deux algèbres de polynômes est une algèbre de polynômes. Soient m, n des entiers $\geqslant 1$ et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ et $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n$ des indéterminées. Pour abréger, on note

$$k[\mathrm{X}] := k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m], \qquad k[\mathrm{Y}] := k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$$

$$k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] := k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$$

et l'on désignera par $\mathrm{P}(\mathrm{X})$, resp. $\mathrm{Q}(\mathrm{Y})$, un élément arbitraire de $k[\mathrm{X}]$, resp. $k[\mathrm{Y}]$. La multiplication définit une application k-bilinéaire

$$k[\mathrm{X}] \times k[\mathrm{Y}] \longrightarrow k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{Y}).$$

D'après la propriété universelle du produit tensoriel, ceci induit donc une application k-linéaire

$$\phi : k[\mathrm{X}] \otimes_k k[\mathrm{Y}] \longrightarrow k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$$

telle que $\phi(\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{Q}(\mathrm{Y})$, pour tout $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Q} \in k[\mathrm{Y}]$.

Pour $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose

$$\mathrm{X}^\mu := \mathrm{X}_1^{\mu_1} \cdots \mathrm{X}_m^{\mu_m},$$

et l'on définit de même Y^ν, pour $\nu \in \mathbb{N}^n$. Alors les monômes X^μ, resp. Y^ν, resp. $\mathrm{X}^\mu\mathrm{Y}^\nu$ forment une base de $k[\mathrm{X}]$, resp. $k[\mathrm{Y}]$, resp. $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

D'après la proposition 23.9, les éléments $\mathrm{X}^\mu \otimes \mathrm{Y}^\nu$ engendrent $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}]$ comme k-espace vectoriel. D'autre part, comme leurs images par ϕ sont les produits $\mathrm{X}^\mu\mathrm{Y}^\nu$, qui forment une base de $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 23.22. — *Les* $\mathrm{X}^\mu \otimes \mathrm{Y}^\nu$ *forment une base de* $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}]$, *et* ϕ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}] \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}].$$

Définition et proposition 23.23. — *Soit* A *un anneau et* B, C *deux* A*-algèbres. Il existe sur le* A*-module* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ *une unique structure de* A*-algèbre telle que*

$$(*) \qquad (b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

La A*-algèbre* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ *s'appelle le produit tensoriel des* A*-algèbres* B *et* C.

Démonstration. — L'application $\mathrm{B} \times \mathrm{C} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C} \to \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$, $(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$ est A-multilinéaire donc induit une application A-linéaire

$$\tau : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \to \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$$

telle que

$$\tau(b \otimes c \otimes b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

Comme $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} = (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C})$, τ correspond à une application de multiplication A-bilinéaire

$$(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}) \times (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$$

telle que $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$. La commutativité et l'associativité sont alors immédiates pour les éléments de la forme $b \otimes c$, et comme ces éléments engendrent $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ comme A-module, on obtient que la multiplication est commutative et associative, et qu'elle est uniquement déterminée par la formule $(*)$. La proposition est démontrée. $\square$

Corollaire 23.24. — *L'isomorphisme* $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}] \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ *de la proposition* 23.22 *est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. — Laissée au lecteur ! □

Pour établir la proposition 23.22, on a montré que les $\mathrm{X}^\mu \otimes \mathrm{Y}^\nu$ forment une base de $k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{Y}]$, en montrant que leurs images dans $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ sont linéairement indépendantes. Ceci est en fait un cas particulier du résultat général ci-dessous.

Théorème 23.25. — *Soient* A *un anneau,* I, J *deux ensembles, et* M *resp.* N *le* A*-module libre de base* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$*, resp.* $(f_j)_{j\in \mathrm{J}}$*. Alors* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ *est un* A*-module libre de base* $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.

Démonstration. — Ce théorème n'est pas facile à établir en partant directement de la *définition* du produit tensoriel, mais il découle facilement des *propriétés universelles* du produit tensoriel et des modules libres.

Soit $\mathrm{V} = \mathrm{A}(\mathrm{I} \times \mathrm{J})$ un A-module libre de base $\{v(i, j)\}_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$. Il existe une unique application A-linéaire $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ telle que

$$\phi(v(i, j)) = e_i \otimes f_j, \qquad \forall\, i \in \mathrm{I},\ j \in \mathrm{J}. \tag{1}$$

D'autre part, il existe une unique application A-*bilinéaire* $\theta : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{V}$ telle que

$$\theta(e_i, f_j) = v(i, j), \qquad \forall\, i \in \mathrm{I},\ j \in \mathrm{J};$$

explicitement, pour tout couple $x = \sum_i a_i e_i$, $y = \sum_j b_j f_j$, les deux sommes étant finies, on a

$$\theta(x, y) = \sum_{i,j} a_i b_j\, v(i, j).$$

Par conséquent, d'après la propriété universelle 23.10, il existe une unique application A-linéaire $\psi : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{V}$ telle que

$$\psi(e_i \otimes f_j) = v(i, j), \qquad \forall\, i \in \mathrm{I},\ j \in \mathrm{J}. \tag{2}$$

Comme les $v(i, j)$, resp. $e_i \otimes f_j$, engendrent V, resp. $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, il résulte de (1) et (2) que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Donc ϕ et ψ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. Le théorème est démontré. □

On va généraliser le corollaire 23.24 comme suit. Soit V, resp. W, une sous-variété algébrique fermée de k^m, resp. k^n, définie par des polynômes $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_r \in k[\mathrm{X}]$, resp. $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_s \in k[\mathrm{Y}]$.

Notons que $k[\mathrm{X}]$ et $k[\mathrm{Y}]$ sont de façon naturelle des sous-algèbres de $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$. Par exemple, si $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ et si $z = (x, y)$ est un élément de k^{m+n}, alors $\mathrm{P}(z) = \mathrm{P}(x)$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 23.26. — $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ *est une sous-variété algébrique fermée de* k^{m+n}, *définie par les polynômes* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_r, \mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_s$.

Démonstration. — Il est clair que ces polynômes s'annulent sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$. Réciproquement, soit $z = (x, y)$ un point de k^{m+n} sur lequel ces polynômes s'annulent. Alors $0 = \mathrm{P}_i(z) = \mathrm{P}_i(x)$, pour $i = 1, \ldots, r$, et ceci entraîne $x \in \mathrm{V}$. On obtient de même que $y \in \mathrm{W}$. Ceci prouve le lemme. □

Posons $\mathrm{I} = \mathscr{I}(\mathrm{V})$, $\mathrm{J} = \mathscr{I}(\mathrm{W})$, et $\mathrm{K} = \mathscr{I}(\mathrm{V} \times \mathrm{W})$. Alors $k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}] = k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/\mathrm{K}$. Observons que $\mathrm{K} \cap k[\mathrm{X}] = \mathrm{I}$; en effet, si $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ s'annule sur $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$, alors pour tout $x \in \mathrm{V}, y \in \mathrm{W}$, on a $0 = \mathrm{P}(x, y) = \mathrm{P}(x)$, et donc $\mathrm{P} \in \mathrm{I}$. Par conséquent, l'inclusion naturelle $k[\mathrm{X}] \subset k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ permet d'identifier $k[\mathrm{V}]$ à une sous-algèbre de $k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}]$: si $f \in k[\mathrm{V}]$ et $(v, w) \in \mathrm{V} \times \mathrm{W}$, alors $f(v, w) = f(v)$. De même, $k[\mathrm{W}]$ s'identifie à une sous-algèbre de $k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}]$.

Alors, la multiplication

$$k[\mathrm{V}] \times k[\mathrm{W}] \longrightarrow k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}], \qquad (f, g) \mapsto fg,$$

est k-bilinéaire, donc induit une application k-linéaire

$$\phi : k[\mathrm{V}] \otimes_k k[\mathrm{W}] \longrightarrow k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}]$$

telle que $\phi(f \otimes g) = fg$, pour tout f, g. Alors,

$$\phi((f \otimes g) \cdot (f' \otimes g')) = \phi(ff' \otimes gg') = ff'gg' = fgf'g' = \phi(f \otimes g)\phi(f' \otimes g'),$$

et comme les tenseurs $f \otimes g$ engendrent $k[\mathrm{V}] \otimes_k k[\mathrm{W}]$ comme k-espace vectoriel, on en déduit que ϕ est un morphisme d'algèbres. De plus, ϕ est surjectif puisque $k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}]$ est engendré par les images des monômes $\mathrm{X}^\mu \mathrm{Y}^\nu$.

Théorème 23.27. — ϕ *est un isomorphisme de* k*-algèbres*

$$k[\mathrm{V}] \otimes_k k[\mathrm{W}] \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}].$$

Démonstration. — D'après ce qui a déjà été dit, il suffit de montrer que ϕ est injectif. Soit $\alpha \in \operatorname{Ker} \phi$.

Soit $\{e_i\}_{i \in \mathrm{B}}$, resp. $\{f_j\}_{j \in \mathrm{C}}$ une base de $k[\mathrm{V}]$, resp. $k[\mathrm{W}]$. Comme les $e_i \otimes f_j$ forment une base de $k[\mathrm{V}] \otimes k[\mathrm{W}]$, alors α peut s'écrire comme une somme finie

$$\alpha = \sum_i e_i \otimes \psi_i, \qquad \text{avec } \psi_i \in k[\mathrm{W}].$$

(On écrit $x = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes f_j$ et $\psi_i = \sum_j a_{ij} f_j$). Fixons $w_0 \in \mathrm{W}$. Pour tout $v \in \mathrm{V}$, on a

$$0 = \alpha(v, w_0) = \sum_i e_i(v) \psi_i(w_0),$$

et donc l'élément $\sum_i \psi_i(w_0) e_i$ est identiquement nul sur V. Comme les e_i sont linéairement indépendants dans $k[\mathrm{V}]$, ceci implique $\psi_i(w_0)$. Comme w_0 était arbitraire dans W, ceci montre que $\psi_i = 0$ pour tout i, et donc $\alpha = 0$. Ceci montre que ϕ est injectif. Le théorème est démontré. □

23.7. Produits et sommes directes. — Le but de ce paragraphe est d'introduire la notion de somme directe arbitraire (c.-à-d., pour un ensemble d'indices infini) et de montrer que le produit tensoriel « commute aux sommes directes » (Théorème 23.36). Ce paragraphe peut être omis en première lecture. (Seul le corollaire 23.35 est utilisé à la fin du chapitre, lors de la construction des algèbres symétriques et extérieures.)

Soit A un anneau commutatif et soit I un ensemble quelconque. On suppose donné un A-module M_i, pour tout $i \in \mathrm{I}$. On veut définir un A-module appelé la somme directe des M_i. Pour ceci, il est commode d'introduire d'abord le module produit des M_i.

Définition 23.28. — Le **produit** des M_i est le A-module, noté $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, dont les éléments sont les familles $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que $m_i \in \mathrm{M}_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. La structure de groupe abélien et de A-module est définie composante par composante, c.-à-d.,

$$(m_i)_{i\in\mathrm{I}} + a(m'_i)_{i\in\mathrm{I}} = (m_i + am'_i)_{i\in\mathrm{I}}.$$

Définition 23.29. — La **somme directe** des M_i, notée $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, est le sous-A-module de $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ formé des familles qui sont nulles presque partout, c.-à-d., les familles $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que $m_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Il est clair que ceci est bien un sous-A-module.

Remarque 23.30. — Si l'ensemble I est fini, on voit que

$$\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i = \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \qquad (\mathrm{I}\ \text{fini}).$$

Si I a n éléments $i_1, \ldots, i_n$ on écrira aussi

$$\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i = \mathrm{M}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_{i_n}.$$

Définition 23.31. — Pour tout i, soit

$$\pi_i : \prod_{j\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_j \longrightarrow \mathrm{M}_i$$

la projection sur la i-ème composante et soit

$$\tau_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_j$$

l'insertion à la i-ème place, c.-à-d., pour tout $m \in \mathrm{M}_i$, $\tau_i(m)$ est la famille $(m_j)_{j\in\mathrm{J}}$ telle que $m_i = m$ et $m_j = 0$ si $j \neq i$.

De plus, désignons par σ l'inclusion $\bigoplus_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_j \subseteq \prod_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_j$ et posons $p_i = \pi_i \circ \sigma$: c'est la projection de $\bigoplus_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_j$ sur M_i.

Proposition 23.32. — *π_i et τ_i sont des morphismes de* A*-modules. De plus, on a*

$$\pi_j \circ \sigma \circ \tau_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathrm{M}_i} & si\ j = i;\\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En particulier, τ_i est injectif et $\pi_i \circ \sigma$ et π_i sont surjectifs.

Démonstration. — C'est clair. □

Théorème 23.33. — **(Propriété universelle de la somme directe, et du produit)**

Soit N *un* A*-module.*

1) *Pour avoir un morphisme $\phi : \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \to \mathrm{N}$, il suffit d'avoir un morphisme $\phi_i : \mathrm{M}_i \to \mathrm{N}$ pour tout i. De façon plus précise, l'application*

$$\alpha : \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_i, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\left(\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i, \mathrm{N}\right), \quad (\phi_i)_{i\in \mathrm{I}} \mapsto \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \phi_i$$

est une bijection, dont l'inverse β est donnée par $\beta(\phi) = (\phi \circ \tau_i)_{i\in \mathrm{I}}$. De plus, si chaque ϕ_i est surjectif,

2) *Pour avoir un morphisme $\psi : \mathrm{N} \to \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i$, il suffit d'avoir un morphisme $\psi_i : \mathrm{N} \to \mathrm{M}_i$ pour tout i. De façon plus précise, l'application*

$$\gamma : \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{N}, \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i\right), \quad (\psi_i)_{i\in \mathrm{I}} \mapsto \prod_{i\in \mathrm{I}} \psi_i$$

est une bijection, dont l'inverse δ est donnée par $\delta(\psi) = (\pi_i \circ \phi)_{i\in \mathrm{I}}$.

Démonstration. — Il est clair que l'application $\beta : \phi \mapsto (\phi \circ \tau_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est bien définie. D'autre part, étant donné une famille $\underline{\phi} = (\phi_i)_{i\in \mathrm{I}}$, on définit

$$\alpha(\underline{\phi}) = \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \phi_i$$

par la formule suivante : pour tout $m = \sum_{i\in \mathrm{I}} m_i$,

$$(\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \phi_i)(m) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \phi_i(m_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \phi_i \pi_i(m).$$

Ceci fait sens, car seul un nombre fini de m_i sont $\neq 0$ et donc on peut former dans N la somme finie $\sum_{i\in \mathrm{I}} \phi_i(m_i)$. Ayant ainsi vu que α est bien définie, on obtient pour tout ϕ et tout m :

$$(\alpha \circ \beta)(\phi)(m) = \alpha\left((\phi\tau_i)_{i\in \mathrm{I}}\right)(m) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \phi\tau_i\pi_i(m) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \phi(m_i) = \phi(m).$$

Ceci prouve que $\alpha \circ \beta(\phi) = \phi$ pour tout ϕ.

Réciproquement, si $\underline{\phi} = (\phi_j)_{j\in \mathrm{J}}$ alors, pour tout $i \in \mathrm{I}$, la i-ème composante de la famille $(\beta \circ \alpha)(\underline{\phi})$ est l'application de M_i vers N qui à tout $m \in \mathrm{M}_i$ associe :

$$(*) \qquad (\alpha(\underline{\phi}) \circ \tau_i)(m) = \sum_{j\in \mathrm{I}} \phi_j \pi_j(\tau_i(m)) = \phi_i(m),$$

où dans la dernière égalité l'on a utilisé la proposition précédente. Alors, $(*)$ montre que $(\beta \circ \alpha)(\underline{\phi}) = \underline{\phi}$ pour toute famille $\underline{\phi} = (\phi_j)_{j\in \mathrm{J}}$. Ceci prouve l'assertion (1).

La preuve de l'assertion (2) est analogue (en fait, plus facile), et est laissée au lecteur. □

Le théorème ci-dessous et son corollaire seront utilisés à la fin de ce chapitre, dans la construction de l'algèbre symétrique ou extérieure d'un A-module.

Considérons, pour tout $i \in \mathrm{I}$, un morphisme de A-modules

$$f_i : \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{M}'_i,$$

et définissons $\tau'_i : \mathrm{M}'_i \to \bigoplus_{j\in \mathrm{I}} \mathrm{M}'_j$ comme précédemment.

Théorème 23.34. — 1) *Les morphismes $\tau'_i \circ f_i$ induisent un morphisme*

$$\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}'_i,$$

noté $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} f_i$. De plus, ce morphisme est surjectif (resp. injectif) si chacun des f_i l'est.

2) *Les morphismes $f_i \circ \pi_i$ induisent un morphisme*

$$\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{M}'_i,$$

noté $\prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$. De plus, ce morphisme est injectif (resp. surjectif) si chacun des f_i l'est.

Démonstration. — Dans les deux cas, l'existence du morphisme résulte du théorème précédent.

Supposons que chaque f_i soit injectif, et soit $\underline{m} = (m_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un élément de $\mathrm{Ker} \prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$. Alors

$$0 = \left(\prod_{i\in \mathrm{I}} f_i\right)(\underline{m}) = (f_i(m_i))_{i\in \mathrm{I}}.$$

Comme chaque f_i est supposé injectif, on obtient $m_i = 0$ pour tout i, et donc $\underline{m} = 0$. Ceci montre que $\prod_{i\in \mathrm{I}} f_i$ est injectif, et l'on obtient de même que $\bigoplus_{i\in \mathrm{I}} f_i$ l'est aussi.

Supposons maintenant chaque f_i surjectif. Comme $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ est engendré par ses sous-modules M_i, pour montrer que $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} f_i$ est surjectif il suffit de voir que chaque M_i est contenu dans l'image de $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} f_i$. Or ceci est clair puisque chaque f_i est surjectif.

Montrons que $f := \prod_{i\in\mathrm{I}} f_i$ est surjectif. Soit $\underline{m'} = (m'_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un élément du produit des M'_i. Comme chaque f_i est surjectif, il existe pour chaque i un élément $m_i \in \mathrm{M}_i$ tel que $f_i(m_i) = m'_i$. (Ici, on a utilisé l'axiome du choix.) Alors $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un élément du produit des M_i qui s'envoie par f sur $\underline{m'}$. Ceci prouve que f est surjective. Le théorème est démontré. □

Le point 1) du corollaire ci-dessous est déjà contenu dans le théorème précédent, mais on le répète en raison de son importance.

Corollaire 23.35. — *Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit N_i un sous-module de M_i. Alors,*

1) $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ *est un sous-module de* $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$*, et*

2)
$$\frac{\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i}{\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i} \cong \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \frac{\mathrm{M}_i}{\mathrm{N}_i}.$$

Démonstration. — 1) D'après le théorème précédent, les inclusions $\mathrm{N}_i \subseteq \mathrm{M}_i$ induisent un morphisme injectif
$$\eta : \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i,$$
qui permet d'identifier $\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i$ au sous-module :
$$\{(m_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \mid \forall\, i \in \mathrm{I}, \quad m_i \in \mathrm{N}_i\}.$$

2) Pour tout $i \in \mathrm{I}$, notons π_i la projection $\pi_i : \mathrm{M}_i \to \mathrm{M}_i/\mathrm{N}_i$. D'après le théorème précédent, les π_i induisent un morphisme surjectif
$$\pi : \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i/\mathrm{N}_i.$$
Le noyau de π est formé des familles presque partout nulles $\underline{m} = (m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telles que
$$0 = \pi(\underline{m}) = (\pi_i(m_i))_{i\in\mathrm{I}}.$$
Par conséquent, $\operatorname{Ker}\pi = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{N}_i$. Le corollaire découle alors du Théorème fondamental d'isomorphisme. □

***Théorème 23.36* (⊗ commute aux sommes directes)**. — *Soient N et M_i, $i \in \mathrm{I}$, des A-modules. On a un isomorphisme de A-modules :*
$$\left(\bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i\right) \otimes \mathrm{N} \cong \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} (\mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N})$$

Démonstration. — Posons $\mathrm{S} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ et notons τ_i l'inclusion $\mathrm{M}_i \to \mathrm{S}$, pour tout i.

D'après le théorème 23.14, chaque τ_i induit un A-morphisme

$$\tau_i \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{N}} : \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{S} \otimes \mathrm{N},$$

qui envoie chaque $m_i \otimes n$ sur $\tau_i(m_i) \otimes n$. D'après la propriété universelle de la somme directe, ces morphismes induisent un morphisme de A-modules

$$\psi : \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{S} \otimes \mathrm{N},$$

tel que $\psi(\sum_{i\in\mathrm{I}} m_i \otimes n) = (\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i)) \otimes n$.

D'autre part, tout élément de S s'écrit de façon unique comme une somme finie $\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i)$, avec $m_i \in \mathrm{M}_i$ et $m_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et l'application

$$\mathrm{S} \times \mathrm{N} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N}, \qquad \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i), n\right) \mapsto \sum_{i\in\mathrm{I}} m_i \otimes n,$$

est bien définie et A-bilinéaire, donc induit un morphisme de A-modules

$$\phi : \mathrm{S} \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i \otimes \mathrm{N},$$

tel que $\phi((\sum_{i\in\mathrm{I}} \tau_i(m_i)) \otimes n) = \sum_{i\in\mathrm{I}} m_i \otimes n$. Il est alors clair que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre. Ceci prouve le théorème. □

Remarque 23.37. — On obtient ainsi que le produit tensoriel des A-modules libres $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$ et $\mathrm{A}^{(\mathrm{J})}$ est le A-module libre de base $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$. En effet,

$$\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i, \qquad \mathrm{A}^{(\mathrm{J})} = \bigoplus_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{N}_j,$$

où $\mathrm{M}_i = \mathrm{A} = \mathrm{N}_j$ pour tout i, j. D'après le théorème précédent et le fait que $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A} = \mathrm{A}$, on obtient que

$$\mathrm{A}^{(\mathrm{I})} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}^{(\mathrm{J})} \cong \bigoplus_{\mathrm{I}\times\mathrm{J}} \mathrm{A} = \mathrm{A}^{(\mathrm{I}\times\mathrm{J})}.$$

24. Extension des scalaires et changement de base

24.1. Extension et restriction des scalaires. — Soit $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux commutatifs ; c.-à-d., B est une A-algèbre.

***Définition et proposition 24.1* (Extension des scalaires)**. — *Soit* M *un* A*-module. Alors sur le* A*-module* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$*, il existe une unique structure de* B*-module telle que*

$$(*) \qquad b \cdot (b' \otimes m) = bb' \otimes m, \qquad \forall\, b, b' \in \mathrm{B},\ m \in \mathrm{M}.$$

On l'appelle le module obtenu par extension des scalaires (ou changement de base) de A *à* B.

Démonstration. — Par hypothèse, B, M sont des A-modules, et l'on peut former le A-module $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, où l'action de A est définie par :

$$a \cdot (b \otimes m) = \phi(a)b \otimes m = b \otimes am.$$

Il faut voir que l'action $(*)$ de B est bien définie. Or, on voit facilement que l'application

$$\mathrm{B} \times \mathrm{B} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \qquad (b, b', m) \mapsto bb' \otimes m$$

est A-trilinéaire. Elle induit donc une application A-linéaire

$$\gamma : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$$

telle que $\gamma(b \otimes b' \otimes m) = bb'm$, puis une application A-bilinéaire $\mathrm{B} \times (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}) \to \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, telle que

$$b \cdot (b' \otimes m) = bb' \otimes m.$$

Comme tout élément w de $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est une somme de tenseurs $b' \otimes m$, on obtient facilement que $1 \cdot w = w$ et $b \cdot (c \cdot w) = bc \cdot w$, pour tout $w \in \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, $b, c \in \mathrm{B}$. Ceci montre que $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est un B-module. □

***Définition 24.2* (Restriction des scalaires).** — Soit N un B-module. On peut le considérer comme A-module via $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, en posant

$$a \cdot n := \phi(a)n, \qquad \forall\, a \in \mathrm{A},\ n \in \mathrm{N}.$$

On notera ${}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ ce A-module ; on dit que c'est le A-module obtenu à partir de N par restriction des scalaires.

***Théorème 24.3* (Propriété universelle des modules étendus)**

Soient M *un* A*-module et* N *un* B*-module. On a une bijection*

$$\theta(\mathrm{M}, \mathrm{N}) : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N})$$

défini par $\theta(\mathrm{M}, \mathrm{N})(f)(b \otimes m) = bf(m)$*, pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N})$ *et* $b \in \mathrm{B}$, $m \in \mathrm{M}$.

De plus, cette bijection est bifonctorielle, au sens suivant. Soient $\phi : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ *un* A*-morphisme et* $\psi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}'$ *un* B*-morphisme. Alors le diagramme* *suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}', {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) & \xrightarrow[\sim]{\theta(\mathrm{M}',\mathrm{N})} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}', \mathrm{N}) \\
{\scriptstyle \phi^*}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_{\mathrm{B}} \otimes \phi)^*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) & \xrightarrow[\sim]{\theta(\mathrm{M},\mathrm{N})} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}) \\
{\scriptstyle \psi_*}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}') & \xrightarrow[\sim]{\theta(\mathrm{M},\mathrm{N}')} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}'),
\end{array}$$

où $\phi^*(f) = f \circ \phi$ et $\psi_*(f) = \psi \circ f$, pour tout f.

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. L'application

$$\mathrm{B} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad (b, m) \mapsto bf(m)$$

est A-bilinéaire donc induit une application A-linéaire

$$\theta(f) : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad b \otimes m \mapsto bm.$$

Pour tout $b, b' \in \mathrm{B}$, $m \in \mathrm{M}$, on a

$$\theta(f)(b \cdot (b' \otimes m)) = \theta(f)(bb' \otimes m) = bb'm = b\theta(f)(b' \otimes m).$$

Comme tout $x \in \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est somme de tenseurs $b' \otimes m$, ceci montre que $\theta(f)$ est B-linéaire. Ceci montre qu'on a une l'application bien définie $\theta = \theta(\mathrm{M}, \mathrm{N})$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

D'autre part, pour tout $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N})$, notons $\gamma|_{\mathrm{M}}$ l'application

$$\mathrm{M} \longrightarrow {}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}, \qquad m \mapsto \gamma(1 \otimes m).$$

On voit facilement que $\gamma|_{\mathrm{M}}$ est A-linéaire, et que $\theta(f)|_{\mathrm{M}} = f$. De plus, pour tout $b \in \mathrm{B}$, $m \in \mathrm{M}$, on a

$$\theta(\gamma|_{\mathrm{M}})(b \otimes m) = b\gamma|_{\mathrm{M}}(m) = b\gamma(1 \otimes m) = \gamma(b \otimes m).$$

Ceci montre que $\theta(\gamma|_{\mathrm{M}}) = \gamma$. La bijection annoncée en découle.

La vérification de la bifonctorialité est facile et est laissée au lecteur. □

On peut alors définir le complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V comme étant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel obtenu par extension des scalaires :

$$\mathrm{V}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{V}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier, par exemple en utilisant la proposition précédente, que ceci coïncide avec les deux définitions données en 23.1.1.

24.2. Produit tensoriel par A/I. — Soit I un idéal de A. Un autre exemple important d'extension des scalaires est le changement de base par le morphisme $A \to A/I$. (Même si l'anneau quotient A/I est « plus petit » que A, on parle encore d'extension des scalaires). Soit M un A-module, et formons le A-module M/IM. On a vu en 12.33 (Chap. VI) que l'action de A sur M/IM, donnée par un morphisme d'anneaux

$$A \longrightarrow \mathrm{End}(M/IM),$$

se factorisait à travers A/I, munissant ainsi M/IM d'une structure de A/I-module.

Proposition 24.4. — *On a un isomorphisme de* A/I-*modules :* $(A/I) \otimes_A M \cong M/IM$.

Démonstration. — Notons π, resp. π_M, la projection $A \to A/I$, resp. $M \to M/IM$. On rappelle que la structure de A-module de A/I est donnée par

$$a \cdot \pi(b) = \pi(a)\pi(b) = \pi(ab),$$

pour tout $a, b \in A$. Alors, l'application

$$(A/I) \times M \longrightarrow M/IM, \qquad (a + I, m) \mapsto am + IM,$$

est bien définie et A-bilinéaire. Elle induit donc un morphisme de A-modules

$$\sigma : (A/I) \otimes M \longrightarrow M/IM,$$

tel que $\sigma(\pi(a) \otimes m) = \pi_M(am)$.

D'autre part, l'application $\tau : M \to (A/I) \otimes M$, $m \mapsto \pi(1) \otimes m$, est un morphisme de A-modules. Son noyau contient le sous-module IM ; en effet, pour tout $m \in M$ et $x \in I$, on a

$$\tau(xm) = \pi(1) \otimes xm = x\pi(1) \otimes m = p(x) \otimes m = 0.$$

Par conséquent, τ se factorise en un A-morphisme

$$\overline{\tau} : M/IM \longrightarrow (A/I) \otimes M,$$

tel que $\overline{\tau}(m+IM) = \pi(1) \otimes m$. Alors, on voit facilement que σ et $\overline{\tau}$ sont inverses l'un de l'autre. La proposition est démontrée. □

25. Algèbres tensorielles, symétriques, et extérieures

Un autre intérêt du produit tensoriel est qu'il permet de construire certaines algèbres associées à un k-espace vectoriel V ou, plus généralement, un A-module M. Dans la suite, A désignera un anneau **commutatif**.

25.1. A-algèbres non-commutatives. — On va être amené à considérer des morphismes d'anneaux $A \to B$, où B est un anneau non nécessairement commutatif. Ceci conduit aux définitions suivantes.

Définition 25.1 **(A-algèbres).** — Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, B n'étant pas nécessairement commutatif. Alors ϕ définit deux structures de A-module sur B :

$$a \cdot b = \phi(a)b, \qquad a * b = b\phi(a),$$

pour $a \in A$, $b \in B$. (On a $a' * (a * b) = (aa') * b = (a'a) * b$ car A est commutatif). On dit que B est une **A-algèbre** si ces deux structures de A-module coïncident, c.-à-d., si l'on a

$$\phi(a)b = b\phi(a), \qquad \forall\, a \in A,\ b \in B.$$

Définition 25.2 **(Centre d'un anneau).** — Soit B un anneau non nécessairement commutatif. On dit qu'un élément $b_0 \in B$ est **central** s'il commute à tout élément de B, c.-à-d., si $b_0 b = b b_0$ pour tout $b \in B$. On note Z(B) l'ensemble des éléments centraux de B ; il contient 1, et l'on voit facilement que c'est un sous-anneau de B. On l'appelle le **centre** de B.

Alors, un morphisme d'anneaux $A \to B$ fait de B une A-algèbre si et seulement si, $\phi(A) \subseteq Z(B)$.

25.2. Algèbre tensorielle d'un A-module. — Soit M un A-module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$T^n_A(M) = M^{\otimes n} = M \otimes_A M \otimes_A \cdots \otimes_A M$$

(n facteurs), avec la convention $T^0_A(M) = A$.

Théorème 25.3 **(L'algèbre tensorielle $T_A(M)$).** — *On pose*

$$T_A(M) = A \bigoplus M \bigoplus M^{\otimes 2} \bigoplus M^{\otimes 3} \bigoplus \cdots$$

C'est une A*-algèbre associative, non-commutative, pour la multiplication définie par :*

$$a \cdot w = aw = w \cdot a, \qquad \forall\, a \in A,\ w \in T_A(M), \tag{1}$$

et, pour $p, q \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \in M$,

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q. \tag{2}$$

De plus, $T_A(M)$ *vérifie la propriété universelle suivante : pour toute* A*-algèbre non nécessairement commutative* B*, et tout morphisme de* A*-modules* $\tau : M \to B$*, il existe un unique morphisme de* A*-algèbres* $\phi : T_A(M) \to B$ *tel que* $\phi(m) = \tau(m)$*, pour tout* $m \in M$*.*

Démonstration. — Soient $p, q \geqslant 1$. D'après le théorème 23.19, on a

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{p}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{q}(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{p+q}(\mathrm{M}) \\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) & \longmapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q. \end{array}$$

et ceci induit une application de multiplication A-bilinéaire

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{p}(\mathrm{M}) \times \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{q}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{p+q}(\mathrm{M})$$

vérifiant (2). On vérifie alors facilement que la multiplication est associative. Par définition, les éléments de A sont centraux, donc $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ est une A-algèbre.

Soient $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ une A-algèbre (non nécessairement commutative) et $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ un morphisme de A-modules. Pour tout $n \geqslant 1$, l'application

$$\mathrm{M}^n \longrightarrow \mathrm{B}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \tau(x_1) \cdots \tau(x_n)$$

(à droite, c'est le produit dans B), est A-multilinéaire donc induit une application A-linéaire $\phi_n = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$ telle que

$$(*) \qquad \phi_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \tau(x_1) \cdots \tau(x_n).$$

Alors, on vérifie facilement que l'application $\phi : \mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$, égale à f sur $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{0}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et à ϕ_n sur chaque $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M})$, est un morphisme de A-algèbres, vérifiant $\phi(m) = \tau(m)$ pour tout $m \in \mathrm{M}$. Enfin, un tel morphisme vérifie nécessairement $(*)$, ce qui prouve l'unicité de ϕ. Le théorème est démontré. □

Proposition 25.4. — *Si* M *est un* A*-module libre de base* $(v_1, \ldots, v_d)$*, alors chaque* $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M})$ *est un* A*-module libre de base les éléments*

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}, \qquad i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, d\}.$$

En particulier, $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M})$ *est libre de rang* d^n.

Démonstration. — Ceci résulte, par récurrence sur n, du théorème 23.25 (voir aussi la remarque 23.37). □

25.3. Modules et algèbres gradués. — Avant de définir l'algèbre symétrique de M, il est utile d'introduire la notion de A-module (resp. A-algèbre) gradué. Par définition, un A-module **gradué** est un A-module M somme directe de A-modules $(\mathrm{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{M}_n.$$

Dans ce cas, M_n s'appelle la composante de degré n de M. On dit qu'un élément $x \in \mathrm{M}$ est **homogène** s'il est non nul et appartient à l'une des composantes M_n ; dans ce cas, on dit que x est homogène de degré n, ou simplement **de degré** n.

Soit B une A-algèbre. Supposons que comme A-module B soit une somme directe $\mathrm{B} = \bigoplus_n \mathrm{B}_n$ et que la multiplication vérifie : $1 \in \mathrm{B}_0$ et

$$\mathrm{B}_p \cdot \mathrm{B}_q \subseteq \mathrm{B}_{p+q}, \forall\, p, q.$$

Dans ce cas, on dit que B est une **A-algèbre graduée**. En particulier, $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \bigoplus_n \mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ est une A-algèbre graduée.

***Définition 25.5* (Idéaux bilatères et anneaux quotients)**. — Soit B un anneau non commutatif. Un **idéal bilatère** de B est un sous-groupe I tel que $axb \in \mathrm{I}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $a, b \in \mathrm{B}$.

Dans ce cas, on vérifie facilement que le groupe abélien B/I est muni d'une structure d'anneau non-commutatif, définie par

$$(a + \mathrm{I})(b + \mathrm{I}) = ab + \mathrm{I}.$$

(La démonstration est analogue à celle du théorème 4.1.)

Définition et proposition 25.6. — *Soit* $\mathrm{B} = \bigoplus_n \mathrm{B}_n$ *une* A-*algèbre graduée et soit* I *un idéal bilatère de* B. *On dit que* I *est un* **idéal homogène** *s'il est engendré par des éléments homogènes de* B. *Dans ce cas, posant* $\mathrm{I}_n = \mathrm{I} \cap \mathrm{B}_n$ *pour tout* n*, on a*

$$(*) \qquad \mathrm{I} = \bigoplus_n (\mathrm{I} \cap \mathrm{B}_n),$$

et l'algèbre quotient B/I *est graduée :*

$$\mathrm{B/I} = \bigoplus_n (\mathrm{B/I})_n, \quad \textit{où} \quad (\mathrm{B/I})_n = \mathrm{B}_n/\mathrm{I}_n.$$

Démonstration. — Dans $(*)$, l'inclusion $\supseteq$ a toujours lieu, et il s'agit de montrer l'autre inclusion lorsque I est homogène. Soit (x_λ) un système de générateurs homogènes de I, chaque x_λ étant de degré d_λ. Tout élément de I est somme d'éléments de la forme $bx_\lambda c$, avec $b, c \in \mathrm{B}$. Écrivons

$$b = b_1 + \cdots + b_r, \qquad c = c_1 + \cdots + c_s,$$

avec chaque b_i, resp. c_j, homogène de degré p_i, resp. q_j. Alors

$$bx_\lambda c = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} b_i x_\lambda c_j,$$

et chaque $b_i x_\lambda c_j$ appartient à I et est homogène de degré $p_i + d_\lambda + q_j$, ou bien nul. Il en résulte que $\mathrm{I} = \bigoplus_n \mathrm{I}_n$.

Donc, $\mathrm{B/I} \cong \bigoplus_n (\mathrm{B}_n/\mathrm{I}_n)$, d'après le corollaire 23.35, et l'on vérifie alors facilement que la multiplication de B/I (induite par celle de B) fait de B/I une A-algèbre graduée. □

25.4. Algèbre symétrique d'un A-module. — Soit M un A-module.

***Définition et proposition 25.7* (L'algèbre symétrique $\mathrm{S_A(M)}$)**
Soit $\mathrm{S_A(M)}$ *le quotient de la* A*-algèbre* $\mathrm{T_A(M)}$ *par l'idéal homogène* I *engendré par les éléments de degré* 2 *:*

$$x \otimes y - y \otimes x, \qquad x, y \in \mathrm{M}.$$

On a $\mathrm{S_A(M)} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{S^n_A(M)}$*, avec* $\mathrm{S^0_A(M)} = \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{S^1_A(M)} = \mathrm{M}$*, et* $\mathrm{S_A(M)}$ *est une* A*-algèbre graduée* **commutative***, appelée l'algèbre symétrique du* A*-module* M*. Elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute* A*-algèbre commutative* B*, et tout morphisme de* A*-modules* $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$*, il existe un unique morphisme de* A*-algèbres* $\psi : \mathrm{S_A(M)} \to \mathrm{B}$ *tel que* $\psi(m) = \tau(m)$*, pour tout* $m \in \mathrm{M}$*.*

Démonstration. — Posant $\mathrm{I}_n = \mathrm{I} \cap \mathrm{T^n_A(M)}$ et $\mathrm{S^n_A(M)} = \mathrm{T^n_A(M)}/\mathrm{I}_n$, il résulte de la proposition précédente que

$$\mathrm{S_A(M)} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{S^n_A(M)}$$

est une A-algèbre graduée. De plus, comme I est engendré par des éléments de degré 2, on a $\mathrm{I}_0 = 0 = \mathrm{I}_1$ et donc $\mathrm{S^0_A(M)} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{S^1_A(M)} = \mathrm{M}$.

Pour $x, y \in \mathrm{M}$, leur produit $xy \in \mathrm{S^2_A(M)}$ est l'image dans $\mathrm{S^2_A(M)}$ de $x \otimes y$. Mais, comme $x \otimes y - y \otimes x \in \mathrm{I}_2$, on obtient que

$$(\dagger) \qquad xy = yx, \qquad \forall\, x, y \in \mathrm{M}$$

On en déduit que $\mathrm{S_A(M)}$ est commutative. En effet, tout élément de $\mathrm{S_A(M)}$ est une somme finie de monômes $x_1 \cdots x_p$, où $x_i \in \mathrm{M}$, et il résulte de (†) que deux tels monômes commutent.

Enfin, la propriété universelle de $\mathrm{S_A(M)}$ découle de celle de $\mathrm{T_A(M)}$: soient B une A-algèbre commutative et $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ un morphisme de A-modules. Alors, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\phi : \mathrm{T_A(M)} \to \mathrm{B}$ tel que

$$\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \tau(x_1) \cdots \tau(x_p)$$

pour tout $p \geqslant 1$, $x_i \in \mathrm{M}$. Comme B est commutative, on a $\phi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$ pour tout $x, y \in \mathrm{M}$, d'où $\phi(\mathrm{I}) = 0$. Donc ϕ passe au quotient et définit un morphisme de A-algèbres $\psi : \mathrm{S_A(M)} \to \mathrm{B}$ tel que

$$(*) \qquad \psi(x_1 \cdots x_p) = \tau(x_1) \cdots \tau(x_p)$$

pour tout $p \geqslant 1$ et $x_i \in \mathrm{M}$. Ceci prouve l'existence. Enfin, tout morphisme de A-algèbres $\psi : \mathrm{S_A(M)} \to \mathrm{B}$ tel que $\psi(m) = \tau(m)$ pour $m \in \mathrm{M}$, doit vérifier $(*)$, d'où l'unicité. □

Théorème 25.8 **(Algèbre symétrique de** A^r**).** — *Soit* M *un* A*-module libre de rang* r*. On a un isomorphisme de* A*-algèbres*

$$\mathrm{S_A(M)} \cong \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r].$$

En particulier, si $(v_1, \ldots, v_r)$ *est une* A*-base de* M *alors, pour tout* $n \geqslant 1$*, les monômes*

$$v_1^{t_1} \cdots v_r^{t_r}, \qquad t_i \geqslant 0, \quad t_1 + \cdots + t_r = n,$$

forment une A*-base de* $\mathrm{S}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *et celui-ci est un* A*-module libre de rang* $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Démonstration. — Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une A-base de M. Considérons le morphisme de A-modules $\tau : \mathrm{M} \to k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]$ défini par $\tau(v_i) = \mathrm{X}_i$. D'après la propriété universelle de $\mathrm{S_A(M)}$, il existe un unique morphisme de A-algèbres

$$\psi : \mathrm{S_A(M)} \longrightarrow \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]$$

tel que $\psi(v_i) = \mathrm{X}_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Réciproquement, d'après la propriété universelle de $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]$, il existe un unique morphisme de A-algèbres

$$\phi : \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r] \longrightarrow \mathrm{S_A(M)}$$

tel que $\phi(\mathrm{X}_i) = v_i$. Alors $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ puisque $\mathrm{S_A(M)}$ est engendrée comme A-algèbre par les v_i, et de même $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Donc ψ et ϕ sont des isomorphismes réciproques, et la deuxième assertion en découle.

Enfin, le calcul du rang s'effectue grâce à l'astuce suivante. Considérons une ligne formée de $n+r-1$ cases, numérotées de 1 à $n+r-1$ de gauche à droite, dans laquelle on veut noircir $r-1$ cases. Il y a

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

choix possibles. D'autre part, chaque choix consiste en une suite strictement croissante

$$0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} < k_r = n$$

formée des numéros des cases noircies. Ce choix correspond au monôme

$$v_1^{t_1} \cdots v_r^{t_r},$$

où l'on a posé $t_i = k_i - k_{i-1}$ (le nombre de cases blanches entre k_{i-1} et k_i). On a bien $t_i \geqslant 0$ et $\sum_i t_i = n$, et réciproquement la donnée de tels t_i détermine de façon unique une suite de k_i. Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

25.5. Algèbre extérieure et applications multilinéaires alternées. — Soit M un A-module.

Définition et proposition 25.9 **(L'algèbre extérieure $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$)**
Soit $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ le quotient de la A*-algèbre* $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *par l'idéal homogène* J *engendré par les éléments de degré* 2 *:*

$$x \otimes x, \qquad x \in \mathrm{M}.$$

On a $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$, avec $\bigwedge_{\mathrm{A}}^0(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et $\bigwedge_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, et $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ est une A*-algèbre graduée, appelée l'algèbre extérieure du* A*-module* M*. Elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute* A*-algèbre* B*, et tout morphisme de* A*-modules $\tau : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ tel que*

$$\tau(m)^2 = 0, \qquad \forall\, m \in \mathrm{M},$$

il existe un unique morphisme de A*-algèbres $\psi : \bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{B}$ tel que $\psi(m) = \tau(m)$, pour tout $m \in \mathrm{M}$.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{J}_n = \mathrm{J} \cap \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$ et $\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M}) = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})/\mathrm{J}_n$. Comme J est engendré par des éléments de degré 2, c'est un idéal homogène, et il résulte de la proposition 25.6 que

$$\bigwedge\nolimits_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigwedge\nolimits_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$$

est une A-algèbre graduée. De plus, $\mathrm{J}_0 = 0 = \mathrm{J}_1$, d'où $\bigwedge_{\mathrm{A}}^0(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et $\bigwedge_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

La propriété universelle de $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ découle de celle de $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, exactement comme dans le cas de l'algèbre symétrique. Ceci ne présente pas de difficulté et est laissé au lecteur. □

Notation 25.10. — Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{M} = \bigwedge_{\mathrm{A}}^1(\mathrm{M})$. On désigne par

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

leur produit dans l'algèbre $\bigwedge_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$. Par définition, c'est l'image dans $\bigwedge_{\mathrm{A}}^n(\mathrm{M})$ de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.

On rappelle que S_n désigne le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

Lemme 25.11. — 1) *Pour tout $x, y \in \mathrm{M}$, on a*

$$(*) \qquad x \wedge y = -y \wedge x.$$

2) *Plus généralement, pour tout $n \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{M}$ et $\tau \in \mathrm{S}_n$, on a*

$$(**) \qquad x_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\tau(n)} = \pm x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

3) *Pour tout* $n \geqslant 2$, *soit* J'_n *le sous-*A*-module de* $\mathrm{T}^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *engendré par les tenseurs* $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ *pour lesquels les* x_i *ne sont pas tous distincts (c.-à-d., il existe* $i \neq j$ *tel que* $x_i = x_j$*). Alors,* $\mathrm{J}'_n = \mathrm{J}_n$.

Démonstration. — Pour tout $x, y \in \mathrm{M}$, on a

$$(x+y) \otimes (x+y) = x \otimes x + y \otimes y + x \otimes y + y \otimes x,$$

d'où $x \otimes y + y \otimes x \in \mathrm{J}$, et donc $x \wedge y + y \wedge x = 0$. Ceci prouve 1).

Le point 2) en découle. En effet, si $1 = \tau(i)$, c.-à-d., si x_1 apparaît à la i-ème place dans le tenseur de gauche, alors on peut ramener x_1 à la 1ère place par $(i-1)$ applications de $(*)$, ce qui produit le signe $(-1)^{i-1}$. On procède ensuite de même avec x_2, etc.

3) Il est clair que $\mathrm{J}_n \subseteq \mathrm{J}'_n$; montrons la réciproque. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{M}$; on suppose qu'il existe $i < j$ tel que $x_i = x_j$. Il s'agit de montrer que

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{J}_n$$

ou, de façon équivalente, que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$. Or, en utilisant 1) de façon répétée, puis l'égalité $x_i = x_j$, on obtient

$$x_i \wedge \cdots \wedge x_j = (-1)^{j-1-i}\, x_i \wedge x_j \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_{j-1} = 0.$$

$\square$

Remarque 25.12. — On suppose connue la définition de la signature $\varepsilon(\tau)$ d'une permutation $\tau \in \mathrm{S}_n$. En utilisant le fait que S_n est engendré par les transpositions $(i, i+1)$ et que $\varepsilon : \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes, on peut montrer que le signe qui apparaît dans $(**)$ est la signature $\varepsilon(\tau)$.

Proposition 25.13. — *Supposons que* M *soit engendré comme* A*-module par des éléments* $v_1, \ldots, v_d$*. Alors, pour* $1 \leqslant n \leqslant d$, $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *est engendré comme* A*-module par les* $\binom{d}{n}$ *éléments*

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d,$$

et l'on a $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = 0$ *pour* $n > d$.

Démonstration. — Soit $n \geqslant 1$. Par multilinéarité, tout élément de $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ est combinaison linéaire des d^n éléments

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant d.$$

Or, d'après le point 1) du lemme précédent, cet élément est nul si deux indices i_j et i_k sont égaux. Ceci est forcément le cas si $n > d$, ce qui prouve déjà que $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = 0$ si $n > d$.

On peut donc supposer $n \leqslant d$ et les indices $i_1, \ldots, i_n$ deux à deux distincts. On peut de plus se ramener au cas où

$$i_1 < \cdots < i_n$$

puisque, d'après le point 2) du lemme précédent, effectuer des permutations ne fait que produire un changement de signe. Ceci prouve la proposition. □

Définition 25.14. — Soient M, N deux A-modules et $n \geqslant 1$. Une application A-multilinéaire $\phi : \mathrm{M}^n \to \mathrm{N}$ est dite **alternée** si elle vérifie, pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{M}$,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ s'il existe } i \neq j \text{ tel que } x_i = x_j.$$

On note $\mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ l'ensemble des applications A-multilinéaires alternées $\mathrm{M}^n \to \mathrm{N}$.

Théorème 25.15 **(Propriété universelle de $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$).** — *Pour tout morphisme de* A*-modules* $f : \bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{N}$*, l'application*

$$\theta(f) : \mathrm{M}^n \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$$

est alternée, et θ *définit une bijection*

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\textstyle\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}), \mathrm{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Démonstration. — $\theta(f)$ est évidemment A-multilinéaire. Comme f s'annule sur $\mathrm{J}_n = \mathrm{J}'_n$, alors $\theta(f)$ est alternée. On a donc une application

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\textstyle\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}), \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Réciproquement, soit $\phi \in \mathrm{Alt}_n(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. Comme ϕ est A-multilinéaire, il induit une application A-linéaire

$$\eta(\phi) : \mathrm{M}^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \phi(x_1, \dots, x_n).$$

Comme ϕ est alternée, alors $\eta(\phi)$ s'annule sur $\mathrm{J}'_n = \mathrm{J}_n$ donc passe au quotient et définit une application A-linéaire

$$\eta'(\phi) : \textstyle\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{N}, \qquad x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \phi(x_1, \dots, x_n).$$

On voit alors que θ et η' sont des bijections réciproques. Ceci prouve le théorème. □

Théorème 25.16 **(Algèbre extérieure de A^d).** — *Si* M *est un* A*-module libre de base* $(v_1, \dots, v_d)$ *alors* $\bigwedge^d_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = 0$ *pour* $n > d$ *et, pour* $n \leqslant d$*, les monômes*

$$(\dagger) \qquad v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d,$$

forment une A*-base de* $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ *; celui-ci est donc un* A*-module libre de rang* $\binom{d}{n}$*. En particulier,* $\bigwedge^d_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) \cong \mathrm{A}$.

Démonstration. — D'après la proposition 25.13, $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = 0$ pour $n > d$, et les éléments $(\dagger)$ engendrent $\bigwedge^n_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ comme A-module pour $n \leqslant d$. Il s'agit donc de montrer que les éléments $(\dagger)$ sont linéairement indépendants sur A.

Traitons d'abord le cas particulier $n = d$. Posons $\mathrm{C} = \bigwedge_{\mathrm{A}}^{d}(\mathrm{M})$; on sait que C est engendré comme A-module par l'élément

$$c := v_1 \wedge \cdots \wedge v_d.$$

Soit $\mathfrak{a}$ l'annulateur de c, c.-à-d., le noyau du morphisme surjectif $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$, $a \mapsto ac$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{a} = 0$. On va montrer plus bas qu'il existe un élément

$$(*) \qquad f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{A}) \text{ tel que } f(c) = 1.$$

Tenant ceci pour acquis, pour tout $a \in \mathfrak{a}$ on obtient $0 = f(ac) = af(c) = a$, d'où $\mathfrak{a} = 0$. Ceci montre que $\bigwedge_{\mathrm{A}}^{d}(\mathrm{M})$ est librement engendré par c.

Maintenant, pour $n < d$, notons $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, d\}$ ayant n éléments. Si I est une telle partie, et si l'on désigne par $i_1 < \cdots < i_n$ ses éléments, rangés par ordre croissant, on pose

$$v_{\mathrm{I}} := v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}.$$

Supposons qu'on ait une relation de dépendance linéaire

$$(\mathrm{E}) \qquad 0 = \sum_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_n} a_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}, \qquad a_{\mathrm{I}} \in \mathrm{A}.$$

Fixons $\mathrm{I}_0 \in \mathscr{P}_n$ et soit J_0 son complémentaire dans $\{1, \ldots, d\}$. Alors $\mathrm{J}_0 \in \mathscr{P}_{d-n}$ et, pour tout $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_n$, on a :

$$\mathrm{I} \neq \mathrm{I}_0 \Rightarrow \mathrm{I} \cap \mathrm{J}_0 \neq \varnothing.$$

Par conséquent, il résulte du lemme 25.11 qu'en multipliant (E) par v_{J_0}, on obtient

$$0 = a_{\mathrm{I}_0} v_{\mathrm{I}_0} \wedge v_{\mathrm{J}_0} = \pm a_{\mathrm{I}_0} c.$$

Comme C est librement engendré par c, ceci implique $a_{\mathrm{I}_0} = 0$. Ceci montre que les v_{I} sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\bigwedge_{\mathrm{A}}^{n}(\mathrm{M})$, qui est donc un A-module libre de rang $\binom{d}{n}$. Ceci achève la preuve du théorème, modulo la preuve de l'assertion $(*)$.

Or, d'après la propriété universelle 25.15, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\textstyle\bigwedge_{\mathrm{A}}^{d}(\mathrm{M}), \mathrm{A}) \cong \mathrm{Alt}_d(\mathrm{M}, \mathrm{A}).$$

Par conséquent, pour trouver un tel f, il suffit de trouver une application A-multilinéaire alternée $\phi : \mathrm{M}^d \to \mathrm{A}$ telle que $\phi(v_1, \ldots, v_d) = 1$. Considérons l'application ϕ définie comme suit. Pour tout d-uplet $(x_1, \ldots, x_d)$ d'éléments de M, on peut former la matrice

$$\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_d) = \mathrm{Mat}_{(v_1, \ldots, v_d)}(x_1, \ldots, x_d)$$

exprimant les x_j dans la base (v_i). C.-à-d., chaque x_j s'écrit de façon unique dans la base (v_i) :

$$x_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} v_i;$$

on forme alors la matrice $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_d) = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. On pose alors

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \text{dét}\, \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n).$$

Il résulte des propriétés des déterminants que ϕ est une application multilinéaire alternée. (Pour la construction et les propriétés des déterminants, on renvoie, par exemple, à [**BM**, Ch. IV] ou [**La**, XIII, § 4]). De plus, pour $(x_1, \ldots, x_d) = (v_1, \ldots, v_d)$, la matrice P est la matrice identité, de déterminant 1. On a donc bien $\phi(v_1, \ldots, v_d) = 1$. Ceci achève la preuve du théorème. □

26. Localisation

26.1. Anneaux et modules de fractions. — Les résultats de ce paragraphe généralisent ceux du paragraphe 9.7 sur le corps des fractions d'un *anneau intègre*. Soit A un anneau commutatif.

Définition 26.1. — Une **partie multiplicative** de A est un sous-ensemble S contenant 1, stable par multiplication et ne contenant pas 0.

Exemples 26.2. — 1) Si A est intègre, alors $\mathrm{A} \backslash \{0\}$ est une partie multiplicative. Plus généralement, si P est un idéal premier, son complémentaire $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathrm{P}$ est une partie multiplicative.

2) Un élément $x \in \mathrm{A}$ est dit *nilpotent* s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0$. Pour tout $f \in \mathrm{A}$ non nilpotent, l'ensemble $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (avec la convention $f^0 = 1$), est une partie multiplicative.

Soit M un A-module. On veut construire un A-module $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, formé de « fractions »

$$\frac{m}{s}, \qquad m \in \mathrm{M},\ s \in \mathrm{S},$$

et sur lequel l'action de tout $s \in \mathrm{S}$ soit inversible. On veut de plus que les règles usuelles d'addition et de multiplication des fractions soient vérifiées. En particulier, pour tout $x, y \in \mathrm{M}$ et $s, t, u \in \mathrm{S}$ on doit avoir :

$$(*) \qquad u(tx - sy) = 0 \Rightarrow \frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{u(tx - sy)}{ust} = 0.$$

Ceci conduit à définir $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ comme suit.

Sur l'ensemble $\mathrm{M} \times \mathrm{S}$ on considère la relation suivante. On pose :

$$(m, s) \sim (m', t) \Leftrightarrow \quad \text{il existe } u \in \mathrm{S} \text{ tel que } u(tm - sm') = 0.$$

Cette relation est clairement réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive. En effet, si

$$(x, s) \sim (y, t) \sim (z, u),$$

il existe $v, v' \in \mathrm{S}$ tels que $v(tx - sy) = 0 = v'(uy - tz)$. Alors

$$vv'utx = svv'uy = svv'tz, \qquad \text{d'où } vv't(ux - sz) = 0,$$

et $tvv' \in \mathrm{S}$ puisque S est stable par multiplication. Ceci montre que $(x, s) \sim (z, u)$ et donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

On note $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ l'ensemble des classes d'équivalence et, pour tout $(m, s) \in \mathrm{M} \times \mathrm{S}$, on désigne par m/s son image dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. On définit sur $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ une addition par la formule suivante :

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{tx + sy}{st}. \tag{1}$$

Il faut vérifier que cette formule fait sens. Supposons que x'/s' soit un autre représentant de la classe x/s, et montrons que

$$\frac{tx' + s'y}{s't} = \frac{tx + sy}{st}. \tag{$*$}$$

Par hypothèse, il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $us'x = usx'$, alors

$$u\big(st(tx' + s'y) - s't(tx + sy)\big) = t^2u(sx' - s'x) = 0$$

et donc l'égalité $(*)$ a lieu. Ceci montre que, dans (1), le terme de droite ne dépend que de la classe x/s (et non du couple (x, s)). De même, ce terme ne dépend que de la classe y/t. Ceci montre que l'addition (1) est bien définie.

On vérifie alors facilement qu'elle est associative et commutative, que $0/1$ est un élément 0, et que $-m/1$ est l'opposé de $m/1$. Donc, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ est un groupe abélien, et l'application

$$\tau_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}, \qquad m \mapsto m/1$$

est un morphisme de groupes abéliens.

De plus, lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{A}$, on définit sur $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ une multiplication par la formule suivante :

$$\frac{x}{s}\frac{y}{t} = \frac{xy}{st}. \tag{2}$$

À nouveau, il faut vérifier que cette formule fait sens, c.-à-d., que si x'/s' est un autre représentant de la classe x/s, on a :

$$\frac{x'y}{s't} = \frac{xy}{st}. \tag{$**$}$$

Par hypothèse, il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $us'x = usx'$, alors

$$u(s'txy - stx'y) = tyu(s'x - sx') = 0,$$

d'où (∗∗). Ceci montre que, dans (2), le terme de droite ne dépend que de la classe x/s ; de même, il ne dépend que de la classe y/t. Ceci montre que la multiplication (2) est bien définie. On vérifie alors facilement qu'elle est associative, distributive sur l'addition, et que $1/1$ est un élément unité. Donc, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est un anneau, et l'application

$$\tau_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}, \qquad a \mapsto a/1$$

est un morphisme d'anneaux.

Enfin, revenant à M arbitraire, on définit une action de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ sur $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ par la formule

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{x}{t} = \frac{ax}{st}. \tag{3}$$

On vérifie, comme précédemment, que ceci est bien défini et fait de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ un $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module.

En particulier, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ est un A-module par restriction des scalaires via $\tau_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, c.-à-d., pour $a \in \mathrm{A}$, $m \in \mathrm{M}$, on a

$$a \cdot \frac{m}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{am}{1}.$$

Ceci montre que l'application $\tau_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, $m \mapsto m/1$, est un morphisme de A-modules. Attention, ce morphisme n'est en général pas injectif ! Plus précisément, il résulte de la construction que

$$\operatorname{Ker} \tau_{\mathrm{M}} = \{m \in \mathrm{M} \mid \exists\, s \in \mathrm{S} \text{ tel que } sm = 0\}.$$

En résumé, on a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 26.3. — 1) $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est un anneau, et* $\tau_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*,* $a \mapsto a/1$ *est un morphisme d'anneaux ; son noyau est l'idéal*

$$\operatorname{Ker} \tau_{\mathrm{A}} = \{a \in \mathrm{A} \mid \exists\, s \in \mathrm{S} \textit{ tel que } sa = 0\}.$$

2) $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ *est un* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-module, et* $\tau_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$*,* $m \mapsto m/1$ *est un morphisme de* A*-modules. Son noyau est le sous-*A*-module*

$$\operatorname{Ker} \tau_{\mathrm{M}} = \{m \in \mathrm{M} \mid \exists\, s \in \mathrm{S} \textit{ tel que } sm = 0\}.$$

Remarque 26.4. — Lorsque A n'est pas intègre, l'application $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ n'est pas nécessairement injective. Voici deux exemples.

1) Soit $\mathrm{A} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et soit $\mathfrak{p} = (\overline{2}) = \{0, \overline{2}, \overline{4}\}$; c'est un idéal maximal de A, puisque $\mathrm{A}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps. Donc $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{p} = \{1, -1, \overline{3}\}$, est une partie multiplicative, ce qu'on vérifie directement puisque

$$\overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{9} = \overline{3}.$$

Comme $\overline{2}\,\overline{3} = 0$, alors le noyau de $\tau : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ contient $\overline{2}$, donc égale $\mathfrak{p}$. Donc τ se factorise en un morphisme d'anneaux injectif

$$\overline{\tau} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A},$$

et tout élément de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ s'écrit sous la forme $\overline{\tau}(s)^{-1}\,\overline{\tau}(a)$, avec $a \in \mathrm{A}$, $s \in \mathrm{S}$. Or, les trois éléments de S ont pour image 1 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; il en résulte que $\overline{\tau}$ est surjectif, donc un isomorphisme.

2) Soit $\mathrm{A} = \mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]/(\mathrm{XY})$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal de A engendré par l'image de Y ; c'est un idéal premier, puisque $\mathrm{A}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Donc $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative, qui contient X. Comme $\mathrm{XY} = 0$, le noyau I de $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ contient Y, donc $\mathfrak{p}$. On peut montrer que $\mathrm{I} = \mathfrak{p}$ et que l'on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}[\mathrm{X},\mathrm{X}^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}.$$

Théorème 26.5 **(Propriété universelle des localisés)**. —
1) *Soient* M *un* A*-module,* N *un* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-module et* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de* A*-modules. Alors, il existe un* **unique** *morphisme de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-modules* $g : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *tel que* $g \circ \tau_{\mathrm{M}} = f$.

2) *Soit* $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme d'anneaux, avec* B *non nécessairement commutatif. On suppose que* $\phi(s)$ *est inversible, pour tout* $s \in \mathrm{S}$. *Alors, il existe un* **unique** *morphisme d'anneaux* $\Phi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *tel que* $\Phi \circ \tau_{\mathrm{A}} = \phi$.

Démonstration. — 1) S'il existe un morphisme de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-modules $g : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ tel que $g \circ \tau_{\mathrm{M}} = f$, alors nécessairement, pour tout $m \in \mathrm{M}, s \in \mathrm{S}$, on doit avoir :

$$(*) \qquad g(\frac{m}{s}) = \frac{1}{s}\, f(m).$$

Il faut vérifier que ceci définit g sans ambiguité. Si $m'/t = m/s$, il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $umt = um's$, d'où

$$utf(m) = usf(m'),$$

et donc $(1/s)f(m) = (1/t)f(m')$. Ceci montre que g est bien définie, et alors on vérifie facilement que c'est un morphisme de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-modules. Ceci prouve le point 1).

2) Remarquons d'abord que, même si B n'est pas commutatif, $\phi(\mathrm{A})$ est un sous-anneau commutatif de B, puisque

$$\phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \phi(ba) = \phi(b)\phi(a).$$

De plus, prenant pour b un élément $s \in \mathrm{S}$, et multipliant l'égalité ci-dessus à gauche et à droite par $\phi(s)^{-1}$, on obtient

$$\phi(s)^{-1}\phi(a) = \phi(a)\phi(s)^{-1}.$$

Donc, le sous-anneau de B engendré par $\phi(\mathrm{A})$ et les $\phi(s)^{-1}$ est commutatif. En d'autres termes, on peut écrire les « dénominateurs » $\phi(s)^{-1}$ à gauche ou à droite, de façon indifférente.

Ceci étant dit, si Φ existe alors on a, pour tout $a \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$, $\Phi(a/1) = \phi(a)$ et

$$\phi(a) = \Phi(a/1) = \Phi(\frac{s}{1}\,\frac{a}{s}) = \phi(s)\Phi(\frac{a}{s}),$$

d'où

$$\Phi(\frac{a}{s}) = \phi(a)\phi(s)^{-1}. \tag{1}$$

Ceci montre que Φ, s'il existe, est nécessairement unique. Réciproquement, vérifions que la formule (1) définit Φ sans ambiguités. Si $a/s = b/t$, il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $(at - bs)u = 0$, d'où

$$\phi(a)\phi(t)\phi(u) = \phi(atu) = \phi(bsu) = \phi(b)\phi(s)\phi(u).$$

Comme $\phi(s), \phi(t)$ et $\phi(u)$ sont inversibles, on obtient $\phi(a)\phi(s)^{-1} = \phi(b)\phi(t)^{-1}$. Ceci montre que Φ est bien définie, et alors on voit facilement que c'est un morphisme d'anneaux. Le théorème est démontré. □

Un corollaire standard d'une propriété universelle comme ci-dessus est que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est unique à isomorphisme unique près. C.-à-d., on a le corollaire suivant.

Corollaire 26.6. — *Soit $\tau' : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ un morphisme d'anneaux tel que $\tau'(s)$ soit inversible pour tout $s \in \mathrm{S}$ et vérifiant la propriété universelle précédente. Alors il existe un* **unique** *morphisme d'anneaux*

$$\Phi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}',$$

tel que $\Phi \circ \tau_{\mathrm{A}} = \tau'$, et c'est un isomorphisme.

Démonstration. — Posons $\tau_{\mathrm{A}} = \tau$. Par la propriété universelle de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, il existe un unique morphisme $\Phi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ tel que $\Phi \circ \tau = \tau'$. De même, par la propriété universelle de A', il existe un unique morphisme $\Psi : \mathrm{A}' \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ tel que $\Psi \circ \tau' = \tau$.

Alors, $\Psi \circ \Phi \circ \tau = \Psi \circ \tau' = \tau$, donc, par la propriété universelle de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, appliquée à $\mathrm{B}' = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ et $\tau' = \tau$, on obtient que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}$. On obtient de même que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{A}'}$. Ceci prouve le corollaire. □

Proposition 26.7. — *Soient* A *un anneau commutatif et* S *une partie multiplicative. Un* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-module « est la même chose » qu'un* A*-module* M *tel que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, l'application*

$$\rho(s) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}, \qquad m \mapsto sm,$$

soit inversible. Plus précisément, si M *est un* A*-module vérifiant cette propriété, alors le morphisme*

$$\tau_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}, \qquad m \mapsto m/1$$

est bijectif et permet d'identifier M *à* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$.

Démonstration. — Si N est un $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module, c'est aussi, par restriction des scalaires via $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, un A-module, et tout $s \in \mathrm{S}$ agit bijectivement sur N, puisque s est inversible dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$.

Réciproquement, soit M un A-module vérifiant la propriété de l'énoncé. On va donner deux démonstrations du fait que M est un $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module.

1ère démonstration (directe). Le morphisme

$$\tau_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}, \qquad m \mapsto m/1$$

est injectif, car si $m/1 = 0$, il existe $s \in \mathrm{S}$ tel que $sm = 0$, et comme s agit bijectivement, $m = 0$. De plus, τ_{M} est surjectif. En effet, pour tout $m \in \mathrm{M}$ et $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\frac{m}{1} = \tau_{\mathrm{M}}(\rho(s)\rho(s)^{-1}m) = s\tau_{\mathrm{M}}(\rho(s)^{-1}m),$$

d'où $m/s = \tau_{\mathrm{M}}(\rho(s)^{-1}m)$. Ceci montre que τ_{M} est surjectif ; c'est donc un isomorphisme.

2ème démonstration. D'après la proposition 12.31, la donnée d'une structure de A-module sur M équivaut à la donnée d'un morphisme d'anneaux $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{End}(\mathrm{M})$. Par hypothèse, $\rho(s)$ est inversible, pour tout $s \in \mathrm{S}$. Donc, d'après le point 2) du théorème 26.5, ρ se factorise à travers $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, c.-à-d., il existe un (unique) morphisme d'anneaux $\rho' : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \to \mathrm{End}(\mathrm{M})$ tel que $\rho' \circ \tau_{\mathrm{A}} = \rho$. Donc M est un $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module. □

Remarque 26.8. — C'est précisément en vue de l'application ci-dessus qu'on a autorisé, dans le point 2) du théorème 26.5, l'anneau B à être éventuellement non commutatif.

26.2. La localisation est un foncteur additif exact.

— Soient A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A.

***Théorème 26.9* (Fonctorialité de la localisation)**. — 1) *Pour tout morphisme de* A*-modules* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$*, il existe un* **unique** *morphisme de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-modules* $\mathrm{S}^{-1}f : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ *rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M} & \xrightarrow{f} & \mathrm{N} \\ {\scriptstyle\tau_{\mathrm{M}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau_{\mathrm{N}}} \\ \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} & \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}f} & \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}, \end{array}$$

c.-à-d., tel que

$$(*)\qquad (\mathrm{S}^{-1}f)(m/s) = f(m)/s, \qquad \forall\, m \in \mathrm{M},\ s \in \mathrm{S}.$$

Si $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ *est un morphisme de* A*-modules, on a*

$$(1)\qquad \mathrm{S}^{-1}(g \circ f) = (\mathrm{S}^{-1}g) \circ (\mathrm{S}^{-1}f), \quad \textit{et} \quad \mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}}\,.$$

Par conséquent, la localisation en S *est* **fonctorielle**, *c.-à-d., respecte les morphismes. En particulier, si* f *est un isomorphisme, alors* $\mathrm{S}^{-1}f$ *aussi.*

2) *De plus, si* f' *est un second* A*-morphisme de* M *vers* N, *alors*

$$\mathrm{S}^{-1}(f + f') = (\mathrm{S}^{-1}f) + (\mathrm{S}^{-1}f');$$

par conséquent, la localisation en S *est un foncteur* **additif**.

Démonstration. — $\tau_{\mathrm{N}} \circ f$ est un A-morphisme de M vers le S^{-1}A-module S^{-1}N. Donc, d'après la propriété universelle de S^{-1}M (cf. théorème 26.5), il existe un unique morphisme de S^{-1}A-modules $\mathrm{S}^{-1}f : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ tel que $(\mathrm{S}^{-1}f) \circ \tau_{\mathrm{M}} = \tau_{\mathrm{N}} \circ f$, c.-à-d.,

$$(*)\qquad (\mathrm{S}^{-1}f)(m/s) = f(m)/s, \qquad \forall\, m \in \mathrm{M},\ s \in \mathrm{S}.$$

On déduit de cette formule que $\mathrm{S}^{-1}(g \circ f) = (\mathrm{S}^{-1}g) \circ (\mathrm{S}^{-1}f)$ et $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}}$. Ceci signifie que la transformation $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ est un **foncteur** (de la catégorie des A-modules vers celle des S^{-1}A-modules). Le point 1) en démontré.

D'autre part, si f' est un second A-morphisme de M vers N, alors l'application $f + f' : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, définie par $(f + f')(m) = f(m) + f'(m)$, est encore un morphisme de A-modules, et il résulte de la formule $(*)$ que l'on a

$$\mathrm{S}^{-1}(f + f') = (\mathrm{S}^{-1}f) + (\mathrm{S}^{-1}f').$$

Ceci signifie que le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ est un foncteur **additif**. Le théorème est démontré. □

Définition 26.10. — 1) On dit qu'un diagramme

$$\mathrm{N} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{M} \xrightarrow{\ g\ } \mathrm{P}$$

de morphismes de A-modules est **exact en** M si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

2) On dit qu'une suite de morphismes de A-modules

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathrm{M}_{n-1} \xrightarrow{f_n} \mathrm{M}_n \xrightarrow{f_{n+1}} \mathrm{M}_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

est un **complexe** si pour tout n on a

$$f_{n+1} \circ f_n = 0, \quad \text{c.-à-d.,} \quad \mathrm{Im}(f_n) \subseteq \mathrm{Ker}(f_{n+1}).$$

On dit que ce complexe est une **suite exacte** si le diagramme ci-dessus est exact en chaque M_n, c.-à-d., si pour tout n on a $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Ker}(f_{n+1})$.

3) On appelle **suite exacte courte** une suite exacte de la forme suivante :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{M} \xrightarrow{\ g\ } \mathrm{P} \longrightarrow 0.$$

Donc, dire qu'un diagramme $(*)$ est une suite exacte courte équivaut à dire que : f est injectif et g induit un isomorphisme $\mathrm{M}/f(\mathrm{N}) \cong \mathrm{P}$.

Donc, se donner une suite exacte courte $(*)$ équivaut à se donner : un sous-module N' de M, et deux isomorphismes $f : \mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}'$ et $g : \mathrm{M}/\mathrm{N}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}$. Ceci est plus souple que d'exiger que N soit égal à N', comme le montrent les deux exemples suivants.

Exemple 26.11. — On a une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 2\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

où le morphisme $\xrightarrow{2}$ est la multiplication par 2, et π est la projection canonique.

Exemple 26.12. — Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $\phi_\lambda : \mathbb{C}[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}$ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres défini par $\phi_\lambda(\mathrm{X}) = \lambda$. Alors on a une suite exacte de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[\mathrm{X}] \xrightarrow{\ \mathrm{X}-\lambda\ } \mathbb{C}[\mathrm{X}] \xrightarrow{\ \phi_\lambda\ } \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

où la seconde flèche désigne la multiplication par $\mathrm{X} - \lambda$.

Remarque 26.13. — Soit

$$\cdots \xrightarrow{\ f_{n-1}\ } \mathrm{M}_{n-1} \xrightarrow{\ f_n\ } \mathrm{M}_n \xrightarrow{\ f_{n+1}\ } \mathrm{M}_{n+1} \xrightarrow{\ f_{n+2}\ } \cdots$$

un complexe de A-modules. Pour tout n, posons $\mathrm{K}_n = \mathrm{Ker}(f_n)$ et $\mathrm{I}_n = \mathrm{Im}(f_n)$. Alors, on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_n \longrightarrow \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{I}_n \longrightarrow 0$$

et des complexes

$$(*_n) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{I}_{n-1} \longrightarrow \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathrm{I}_n \longrightarrow 0,$$

et le complexe est exact si, et seulement si, chaque $(*_n)$ est une suite exacte courte.

***Théorème 26.14* (La localisation est exacte)**. —

1) *Soient* N *un sous-module de* M, *et* $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{N}$. *Alors* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ *est un sous-module de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, *et* $\mathrm{S}^{-1}\pi$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^{-1}(\mathrm{M}/\mathrm{N}).$$

(Slogan à retenir : « la localisation commute au quotient »).

2) *Plus généralement, si on a une suite exacte courte* $0 \to \mathrm{K} \xrightarrow{f} \mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{Q} \to 0$, *alors la suite ci-dessous est exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{S}^{-1}\mathrm{K} \xrightarrow{\ \mathrm{S}^{-1}f\ } \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \xrightarrow{\ \mathrm{S}^{-1}g\ } \mathrm{S}^{-1}\mathrm{Q} \longrightarrow 0.$$

(« la localisation préserve les suites exactes ».)

3) *Soit* I *un idéal de* A*, et soit* $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}$*. Alors* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ *est un idéal de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*, et* $\mathrm{S}^{-1}\pi$ *induit un isomorphisme d'anneaux*

$$(\dagger) \qquad \phi : (\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A})/(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}) \cong \mathrm{S}^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I}), \qquad s^{-1}a + \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} \mapsto s^{-1}(a + \mathrm{I}).$$

Posons, de plus, $\overline{\mathrm{S}} = \pi(\mathrm{S})$*. C'est une partie multiplicative de* A/I *(sauf qu'on peut avoir* $0 \in \overline{\mathrm{S}}$*), et l'on a un isomorphisme d'anneaux*

$$(\ddagger) \qquad (\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A})/(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}) \cong \overline{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I}).$$

(à nouveau, le slogan est : « la localisation commute au quotient »).

4) *Soient* $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ *des* A*-modules. Alors*

$$\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{M}_1 \bigoplus \mathrm{M}_2) \cong \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_1 \bigoplus \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_2$$

(« la localisation commute à la somme directe »).

Démonstration. — 1) et 2). On va montrer le point 2), le point 1) en étant un cas particulier.

D'abord, $\mathrm{S}^{-1}f$ est injectif, car si $0 = (\mathrm{S}^{-1}f)(x/s) = f(x)/s$, il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $0 = uf(x) = f(ux)$. Comme f est injectif, il vient $ux = 0$, et donc $x/s = 0$ dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{K}$.

Soit $y = q/s$ un élément arbitraire de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{Q}$. Comme g est surjectif, il existe $m \in \mathrm{M}$ tel que $g(m) = q$, et donc $(\mathrm{S}^{-1}g)(m/s) = y$. Ceci montre que $\mathrm{S}^{-1}g$ est surjectif.

De plus, $(\mathrm{S}^{-1}g) \circ (\mathrm{S}^{-1}f) = \mathrm{S}^{-1}(g \circ f) = 0$, donc $\mathrm{Im}(\mathrm{S}^{-1}f) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{S}^{-1}g)$. Enfin, soit m/s un élément arbitraire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{S}^{-1}g)$. Alors $g(m)/s = 0$, donc il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $0 = ug(m) = g(um)$, c.-à-d., $um \in \mathrm{Ker}(g)$. Par hypothèse, il existe $x \in \mathrm{K}$ tel que $f(x) = um$. Alors $(\mathrm{S}^{-1}f)(x/us) = m/s$. Ceci prouve l'exactitude en $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. Le point 2) est démontré, et avec lui, le point 1).

3) D'après ce qui précède, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ est un idéal de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ et ϕ est un isomorphisme de A-modules. Et, d'après la formule (†), on voit facilement que c'est un morphisme d'anneaux. Ceci prouve la première assertion.

Il est clair que $\overline{\mathrm{S}}$ contient 1 et est stable par multiplication. Il peut arriver que $0 \in \overline{\mathrm{S}}$; c'est le cas si et seulement si $\mathrm{S} \cap \mathrm{I} \neq \varnothing$, dans ce cas $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ et les deux anneaux de (‡) sont l'anneau nul $\{0\}$. On peut donc supposer que $0 \notin \overline{\mathrm{S}}$, donc que $\overline{\mathrm{S}}$ est une partie multiplicative.

L'image de tout $s \in \mathrm{S}$ par le morphisme d'anneaux

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}/\mathrm{I} \longrightarrow \overline{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$$

est inversible, donc ce morphisme induit un morphisme d'anneaux

$$\phi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \longrightarrow \overline{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I}) \quad \text{tel que} \quad \phi(a/s) = \pi(s)^{-1}\pi(a), \quad \forall\, a \in \mathrm{A},\, s \in \mathrm{S}.$$

Ce morphisme est surjectif, puisque tout élément de $\overline{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$ est de la forme $\pi(s)^{-1}\pi(a)$ donc égal à $\phi(a/s)$. D'autre part, il est clair que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. Réciproquement, si $a/s \in \operatorname{Ker}\phi$, il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que

$$0 = \pi(u)\pi(a) = \pi(ua), \quad \text{d'où} \quad ua \in \mathrm{I}$$

et donc $a/1 \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ et $a/s \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$. Ceci montre que $\operatorname{Ker}\phi = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$, et donc ϕ induit un isomorphisme d'anneaux

$$\overline{\phi} : \frac{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I}), \qquad s^{-1}a + \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} \mapsto \pi(s)^{-1}\pi(a).$$

Ceci achève la preuve du point 3).

Pour démontrer le point 4), posons $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$ et introduisons l'inclusion $\tau_1 : \mathrm{M}_1 \hookrightarrow \mathrm{M}$, $x \mapsto (x, 0)$, et la projection $\pi_1 : \mathrm{M} \to \mathrm{M}_1$, $(x, y) \mapsto x$, et définissons de même τ_2 et π_2. Alors on a

$$\pi_1 \circ \tau_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_1}, \qquad \pi_2 \circ \tau_2 = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2}\,; \tag{1}$$

$$\pi_2 \circ \tau_1 = 0 = \pi_1 \circ \tau_2\,; \tag{2}$$

$$\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = \tau_1 \circ \pi_1 + \tau_2 \circ \pi_2\,. \tag{3}$$

Lemme 26.15. — *Ces égalités caractérisent la somme directe, c.-à-d., si* M_1, M_2*, et* M *sont des* A*-modules arbitraires et si l'on a des* A*-morphismes*

$$\mathrm{M}_1 \underset{\pi_1}{\overset{\tau_1}{\rightleftarrows}} \mathrm{M} \underset{\pi_2}{\overset{\tau_2}{\leftrightarrows}} \mathrm{M}_2$$

vérifiant ces égalités, alors $\mathrm{M}_i \cong \tau_i(\mathrm{M}_i)$ *pour* $i = 1, 2$ *et l'on a*

$$\mathrm{M} = \tau_1(\mathrm{M}_1) \bigoplus \tau_2(\mathrm{M}_2).$$

Démonstration. — Comme $\pi_i \circ \tau_i = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_i}$ alors chaque τ_i est injective, donc un isomorphisme de M_i sur $\tau_i(\mathrm{M}_i)$. De plus, (3) entraîne que

$$\mathrm{M} = \tau_1(\mathrm{M}_1) + \tau_2(\mathrm{M}_2).$$

Enfin, d'après (2), la somme est directe car si $m \in \tau_1(\mathrm{M}_1) \cap \tau_2(\mathrm{M}_2)$, alors

$$m = \tau_1(x_1) = \tau_2(x_2), \quad \text{avec} \quad x_i \in \mathrm{M}_i,$$

et d'après (2) l'on a $x_1 = \pi_1(m) = \pi_1(\tau_2(x_2)) = 0$, d'où $m = 0$. Ceci prouve le lemme. □

On peut maintenant achever la preuve du point 4). Comme la localisation est un foncteur additif (cf. théorème 26.9), les morphismes $\mathrm{S}^{-1}\tau_i$ et $\mathrm{S}^{-1}\pi_i$, pour $i = 1, 2$, vérifient les égalités (1)–(3), avec M_i et M remplacés par $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_i$ et $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$. Par conséquent, il résulte du lemme que

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \cong \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_1 \bigoplus \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}_2.$$

Le théorème est démontré. □

26.3. Idéaux premiers de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, anneaux locaux. — Réparons d'abord un oubli. La proposition suivante est extrêmement importante, et aurait dû être signalée juste après la définition des idéaux premiers, dans le paragraphe 5.4. On rappelle qu'on désigne par Spec(B) l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau B.

Proposition 26.16. — *Soit* $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme d'anneaux commutatifs, et soit* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(B)}$. *Alors* $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ *est un idéal premier de* A.

Démonstration. — Le noyau du morphisme $\mathrm{A} \xrightarrow{\phi} \mathrm{B} \to \mathrm{B}/\mathfrak{p}$ est l'idéal

$$\phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{a \in \mathrm{A} \mid \phi(a) \in \mathfrak{p}\}.$$

Donc ϕ induit un morphisme d'anneaux injectif

$$\mathrm{A}/\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathrm{B}/\mathfrak{p},$$

et comme $\mathrm{B}/\mathfrak{p}$ est intègre, $\mathrm{A}/\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ l'est aussi. Ceci montre que l'idéal $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ est premier. □

Remarque 26.17. — **Attention !** Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de B, alors $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ est premier mais pas nécessairement maximal ! Par exemple, soit ϕ l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$; alors (0) est un (le seul) idéal maximal de $\mathbb{Q}$, et son image inverse est l'idéal (0) de $\mathbb{Z}$ qui est premier mais pas maximal.

Soient A un anneau commutatif, S une partie multiplicative de A, et M un A-module. Soit τ_{M} le morphisme de A-modules $\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, $m \mapsto m/1$.

Pour tout sous-$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module $\mathscr{N}$ de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$, son image inverse

$$\tau_{\mathrm{M}}^{-1}(\mathscr{N}) = \{m \in \mathrm{M} \mid m/1 \in \mathscr{N}\}$$

est un sous-A-module de M ; par abus de notation, on le note $\mathscr{N} \cap \mathrm{M}$ et on l'appelle « l'intersection » de $\mathscr{N}$ avec M.

Proposition 26.18. — 1) *Pour tout sous-*$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-module* $\mathscr{N}$ *de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$*, on a*

$$\mathscr{N} = \mathrm{S}^{-1}(\mathscr{N} \cap \mathrm{A}).$$

(on dit que : « tout sous-module de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}$ est étendu »).

2) *Si* N *est un sous-module de* M*, on a*

$$\mathrm{M} \cap \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} = \{m \in \mathrm{M} \mid \text{ il existe } s \in \mathrm{S} \text{ tel que } sm \in \mathrm{N}\}.$$

En particulier, si I *est un idéal de* A*, on a* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{I} \cap \mathrm{S} \neq \varnothing$.

Démonstration. — 1) L'inclusion $\supseteq$ est claire. Réciproquement, soit $x \in \mathscr{N}$. Alors $x = m/s$, avec $m \in \mathrm{M}$ et $s \in \mathrm{S}$, et $\mathscr{N}$ contient $sx = m/1$. Donc $m \in \mathscr{N} \cap \mathrm{M}$ et $x = m/s$ appartient à $\mathrm{S}^{-1}(\mathscr{N} \cap \mathrm{M})$.

2) Soit $m \in \mathrm{M}$. S'il existe $s \in \mathrm{S}$ tel que $sm \in \mathrm{N}$, alors $m/1 = sm/s \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ et donc $m \in \mathrm{M} \cap \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$.

Réciproquement, supposons que $m/1 \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$. Alors il existe $y \in \mathrm{N}$ et $s \in \mathrm{S}$ tels que $m/1 = y/s$, donc il existe $u \in \mathrm{S}$ tel que $u(sm - y) = 0$. Par conséquent, $usm = uy$ appartient à N. Ceci prouve l'égalité voulue.

En particulier, si I est un idéal de A, on a

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \Leftrightarrow 1 \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{I} \cap \mathrm{S} \neq \varnothing.$$

La proposition est démontrée. □

Remarque 26.19. — Soit I un idéal de A ne rencontrant pas S. On n'a pas nécessairement l'égalité $\mathrm{I} = \mathrm{A} \cap \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$; mais on va voir ci-dessous que c'est le cas si I est premier.

Théorème 26.20 **(Idéaux premiers de** $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$**)**. — *Les idéaux premiers de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *sont exactement les* $\mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}$*, pour* $\mathfrak{p}$ *idéal premier de* A *ne rencontrant pas* S*.*

De façon plus précise, l'application

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}, \qquad \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \mid \mathfrak{p} \cap \mathrm{S} = \varnothing\} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}),$$

est une bijection, dont la bijection réciproque est $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} \cap \mathrm{A}$*.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{X} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \mid \mathfrak{p} \cap \mathrm{S} = \varnothing\}$, et soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{X}$. Il résulte du point 2) de la proposition précédente que

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}. \tag{1}$$

En effet, si $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}$, il existe $s \in \mathrm{S}$ tel que $sx \in \mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}$ est premier et $s \notin \mathfrak{p}$ (puisque $\mathrm{S} \cap \mathfrak{p} = \varnothing$), ceci entraîne $x \in \mathfrak{p}$.

En particulier, (1) montre que $\mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal propre de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. De plus, d'après le point 3) du théorème 26.14, on a

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p} \cong \overline{\mathrm{S}}^{-1}(\mathrm{A}/\mathfrak{p}),$$

et ceci est un anneau intègre puisque c'est un sous-anneau du corps des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$. Ceci montre que $\mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. De plus, (1) montre que l'application

$$\theta : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}), \qquad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}$$

est injective.

Elle est aussi surjective. En effet, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A})$. D'après la proposition 26.16, $\mathfrak{p} := \mathrm{P} \cap \mathrm{A}$ est un idéal premier et, d'après le point 1) de la proposition 26.18, l'on a $\mathrm{P} = \mathrm{S}^{-1}\mathfrak{p}$. Il en résulte que $\mathfrak{p} \cap \mathrm{S} = \varnothing$, et que θ est surjective. C'est donc une bijection, dont la réciproque est l'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} \cap \mathrm{A}$. Le théorème est démontré. □

Définition 26.21 **(Anneaux locaux)**. — Un anneau A est dit **local** s'il ne possède qu'un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$. Dans ce cas, on écrit parfois que $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ est un anneau local, et l'on dit que le corps $k = \mathrm{A}/\mathfrak{m}$ est le **corps résiduel** de A.

Définition 26.22. — Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ et soit M un A-module. On note $A_\mathfrak{p}$ et $M_\mathfrak{p}$ les localisés $S^{-1}A$ et $S^{-1}M$, où S est la partie multiplicative

$$A \setminus \mathfrak{p} = \{a \in A \mid a \notin \mathfrak{p}\}.$$

***Proposition 26.23* ($A_\mathfrak{p}$ est local)**. — *Soit* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. *Alors* $A_\mathfrak{p}$ *est un anneau local : son unique idéal maximal est l'idéal* $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

Le corps résiduel $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ *est noté* $\kappa(\mathfrak{p})$ *et est souvent appelé « corps résiduel de* $\mathfrak{p}$ *».*

Démonstration. — D'après le théorème 26.20, les idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ sont les idéaux $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{q}$ idéal premier de A ne rencontrant pas $S = A\setminus\mathfrak{p}$, c.-à-d., contenu dans $\mathfrak{p}$. Donc, tout idéal premier de $A_\mathfrak{p}$ est contenu dans $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$; celui-ci est donc l'unique idéal maximal de $A_\mathfrak{p}$ (car un idéal maximal est nécessairement premier). Ceci prouve la proposition. □

26.4. Produit tensoriel par $S^{-1}A$. — Soient A un anneau, S une partie multiplicative de A et soit M un A-module. On a construit (théorème 26.3) le $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$.

D'autre part, d'après la proposition 26.7, tout $S^{-1}A$-module N peut être vu, par restriction des scalaires via $A \to S^{-1}A$, comme un A-module noté ${}_AN$. Avec cette notation, la propriété universelle de $S^{-1}M$ énoncée dans le théorème 26.5, se reformule comme suit.

***Théorème 26.24* (Propriété universelle de $S^{-1}M$)**. — *Pour tout* $S^{-1}A$*-module* N, *l'application* $\gamma \mapsto \gamma|_M$ *est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN).$$

En d'autres termes, $S^{-1}M$ *vérifie la même propriété universelle que le module étendu* $S^{-1}A \otimes_A M$.

De ceci on déduit :

Théorème 26.25. — *Il existe un unique isomorphisme de* $S^{-1}A$*-modules*

$$\eta_M : S^{-1}M \xrightarrow{\sim} S^{-1}A \otimes_A M$$

tel que $\eta_M(m/1) = 1 \otimes m$, *pour tout* $m \in M$.

De plus, cet isomorphisme est fonctoriel en M, *c.-à-d., si* $f : M \to N$ *est un morphisme de* A*-modules, alors le diagramme ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \xrightarrow[\sim]{\eta_M} & S^{-1}A \otimes_A M \\ {\scriptstyle S^{-1}f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes f} \\ S^{-1}N & \xrightarrow[\sim]{\eta_N} & S^{-1}A \otimes_A N. \end{array}$$

Démonstration. — D'après la propriété universelle de $S^{-1}M$, il existe un unique $S^{-1}A$-morphisme $\phi : S^{-1}M \to S^{-1}A \otimes_A M$ tel que $\phi(m/1) = 1 \otimes m$, pour tout $m \in M$.

De même, d'après la propriété universelle de $S^{-1}A \otimes_A M$, il existe un unique $S^{-1}A$-morphisme $S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$ tel que $\psi(1 \otimes m) = m/1$, pour tout $m \in M$. Il en résulte que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Ceci prouve la première assertion. La vérification de la fonctorialité est facile et laissée au lecteur. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

VIII. Extensions normales, séparables, galoisiennes. Corps finis

IX. Groupes et polynômes symétriques, résolution d'équations

Bibliographie

[Art] E. Artin, Galois Theory, nouvelle édition, Dover, 1998.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.

[BAlg] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[BM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative (niveau M1), Ellipses, 2004.

[Ca] J.-C. Carrega, Théorie des corps – La règle et le compas, Hermann, 1981, 2ème édition 1989.

[ChL] A. Chambert-Loir, Algèbre corporelle, Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[Co] H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, 2nd edition, Wiley, 1969.

[De] R. Dedekind, Sur la théorie des nombres entiers algébriques, Gauthier--Villars, 1877 ; traduit en anglais avec une introduction de J. Stillwell dans : Theory of algebraic integers, Cambridge Univ. Press, 1996.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Dou] A. Douady, R. Douady, Algèbre et théories galoisiennes, Cedic Fernand Nathan, 1977, 2ème éd., Cassini, 2005.

[Elk] R. Elkik, Cours d'algèbre, Ellipses, 2002.

[Fu] W. Fulton, Algebraic Curves, Benjamin, 1969.

[Esc] J.-P. Escofier, Théorie de Galois, Dunod, 2000.

[Ja1] N. Jacobson, Basic algebra I, W. H. Freeman & Co., 1974.

[Ja2] N. Jacobson, Basic algebra II, W. H. Freeman & Co., 1980.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : Algèbre, Dunod, 2004.

[Ne04] J. Nekovář, Théorie de Galois, cours UPMC 2003/4, disponible à l'adresse : www.math.jussieu.fr/~nekovar/co/ln

[Pe1] D. Perrin, Cours d'algèbre, E.N.S.J.F. 1981, et 3ème édition, Ellipses, 1996.

[Pe2] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Re] M. Reid, Undergraduate commutative algebra, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Sa] P. Samuel, Théorie algébrique des nombres, Hermann, 1967.

[Se] J.-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, (3ème édition corrigée), Hermann, 1978.

[Ti] J.-P. Tignol, Galois' Theory of algebraic equations, World Scientific, 2001.

[vdW] B. L. van der Waerden, History of algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether, Springer Verlag, 1985.