Université Pierre et Marie Curie **2005-2006**

MM002 Algèbre et théorie de Galois

Contrôle continu du 7 décembre 2005 (durée 3h)

Le barême indiqué (sur **30**) peut éventuellement être modifié légèrement.

Exercice 1 (7 pts) Soit K/k une extension de corps de degré 2, séparable. Montrer que l'extension K/k est galoisienne.

Exercice 2 (5 pts) Montrer que le polynôme $X^4 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Donner un exemple de corps $k \subset K \subset L$ tels que les extensions K/k et L/K soient galoisiennes, mais L/k ne le soit pas.

Problème (18 pts) Soient k un corps et T, X deux indéterminées.

1) Soit $u \in k(T) \setminus k$; on écrit $u = P/Q$, avec $P, Q \in k[T] \setminus \{0\}$ premiers entre eux et Q unitaire.

a) Montrer que T est algébrique sur le sous-corps $k(u)$, puis que u est transcendant sur k.

b) Montrer que le polynôme $I(u, X) = uQ(X) - P(X)$ est irréductible dans $k[u, X]$, puis qu'il est irréductible dans $k(u)[X]$.

c) Montrer que le polynôme minimal de T sur $k(u)$ égale $\alpha I(u, X)$, avec $\alpha \in k(u) \setminus \{0\}$. Déterminer $\deg_{k(u)}(T)$.

2) Soit K un sous-corps de $k(T)$, tel que $k \subset K$ et $k \neq K$.

a) Montrer que T est algébrique sur K. Soit

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (a_i \in K)$$

son polynôme minimal sur K. Montrer qu'il existe i_0 tel que $a_{i_0} \notin k$. On écrit $u = a_{i_0} = P/Q$, avec $P, Q \in k[T] \setminus \{0\}$ premiers entre eux et Q unitaire, et l'on pose $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$. Montrer que

$$m = [k(T) : k(u)] \geq [k(T) : K] = n.$$

b) Montrer qu'il existe des polynômes $N_0(T), \ldots, N_n(T) \in k[T]$, premiers entre eux, tels que

$$(1) \qquad N_0(T) f(X) = N_0(T) X^n + N_1(T) X^{n-1} + \cdots + N_n(T).$$

Montrer que $\deg N_0 \geq \deg Q$ et $\deg N_{i_0} \geq \deg P$. On pose $F(T, X) = N_0(T) f(X)$. Montrer que le degré en T de $F(T, X)$ est $\geq m$ et que $F(T, X)$, considéré comme élément de $A[X]$, où $A = k[T]$, est de contenu égal à 1.

c) Montrer qu'il existe $D \in K[X]$, non nul, tel que

$$P(X) - uQ(X) = f(X)D(X). \tag{2}$$

Montrer qu'il existe $h(T) \in k[T]$ et $\widetilde{G}(T,X) \in k[T,X]$, non nuls, tels que

$$F(T,X)\widetilde{G}(T,X) = (P(X)Q(T) - P(T)Q(X))h(T).$$

En utilisant le lemme des contenus dans l'anneau $A[X]$, où $A = k[T]$, montrer qu'il existe $G(T,X) \in k[T,X]$, non nul, tel que

$$P(X)Q(T) - P(T)Q(X) = F(T,X)G(T,X) \tag{3}$$

d) Déduire de (3) que $G(T,X)$ est de degré 0 en T, c.-à-d., est un polynôme $G(X) \in k[X]$.

Montrer que $F(T,X)G(X)$, considéré comme élément de $A[X]$, où $A = k[T]$, est de contenu égal à 1.

e) Montrer que le polynôme $P(X)Q(T) - Q(X)P(T)$, considéré comme élément de $B[T]$, où $B = k[X]$, est de contenu 1. En déduire que $G \in k^\times$, puis que $n = m$. Montrer que $K = k(u)$.