Patrick Polo

COURS DE M2 GROUPES ALGÉBRIQUES UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE 2005-2006

Patrick Polo
Université Paris VI, Institut de Mathématiques,,
175 rue du Chevaleret, 75013 Paris.
E-mail : polo@math.jussieu.fr

COURS DE M2
GROUPES ALGÉBRIQUES
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
2005-2006

Patrick Polo

CHAPITRE 1

GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES ET ALGÈBRES DE HOPF

Version du 9 novembre 2005

Dans tout ce chapitre, le corps de base k est algébriquement clos, de caractéristique arbitraire.

1. Groupes algébriques affines et représentations

1.1. Groupes algébriques affines. —

Définition 1.1. — 1) Un *groupe algébrique affine* sur k est une variété algébrique affine G sur k, munie d'une structure de groupe telle que les applications $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, et $\kappa : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ soient des morphismes de variétés.

2) Un *morphisme de groupes algébriques* $\phi : G \to G'$ est un morphisme de variétés algébriques qui est aussi un morphisme de groupes. C'est un isomorphisme s'il existe un morphisme $\psi : G' \to G$ tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_G$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{G'}$.

Remarque 1.2. — De façon plus générale, on peut introduire la notion de groupe algébrique sur k, non nécessairement affine. Dans ce cours, on se limitera exclusivement aux groupes algébriques affines.

Lemme 1.3. — *Soit G un groupe algébrique affine et H une sous-variété fermée de G qui est un sous-groupe. Alors H est un groupe algébrique affine. On dira simplement que H est un sous-groupe fermé de G.*

Démonstration. — Par hypothèse, H est une sous-variété fermée de G. La restriction μ_H de μ_G à H est un morphisme de $H \times H$ dans H. De même, la restriction κ_H de κ à H est un morphisme $H \to H$. Ceci montre que H

est un groupe algébrique, et l'inclusion $H \subseteq G$ est un morphisme de groupes algébriques.

1.2. Exemples de groupes algébriques affines. — 1) Le groupe additif $\mathbb{G}_a = (k, +)$. Il est clair que $\mu : (x, y) \mapsto x + y$ et $\kappa : x \mapsto -x$ sont des morphismes.

2) Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m = (k^*, \times)$. D'abord, la première projection $k^2 \to k$ induit un isomorphisme $k^* \cong \{(x, y) \in k^2 \mid xy = 1\}$, donc k^* s'identifie à une sous-variété fermée de k^2, et

$$k[\mathbb{G}_m] = k[X, T]/(XT - 1) = k[X, X^{-1}].$$

Les applications $\mu : (x, y) \mapsto xy$ et $\kappa : x \mapsto x^{-1}$ sont des morphismes (car $x \mapsto x^{-1}$ est une fonction régulière sur k^*).

3) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ s'identifie à :

$$\{(A, t) \in M_n(k) \times k \mid (\text{dét}\, A)t = 1\},$$

qui est une sous-variété fermée de k^{n^2+1}, et l'on a

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}, \text{dét}^{-1}].$$

La multiplication est un morphisme, car $(AB)_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} A_{i,m} B_{m,j}$; le passage à l'inverse aussi, car $A^{-1} = \text{dét}(A)^{-1} C(A)^t$, où $C(A)^t$ désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

4) Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid \text{dét}\, A = 1\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$.

5) Le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures : $B_n(k) = \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid A_{i,j} = 0,\ \text{pour } i > j\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$.

6) Le sous-groupe des matrices triangulaires unipotentes : $U_n(k) = \{A \in B_n(k) \mid A_{i,i} = 1,\ \text{pour } i = 1, \ldots, n\}$ est un sous-groupe fermé de $B_n(k)$.

7) Le sous-groupe $D_n(k)$ des matrices diagonales est un sous-groupe fermé de $B_n(k)$.

8) Tout groupe fini G est, de façon unique, un groupe algébrique. L'algèbre $k[G]$ est $\bigoplus_{g \in G} k\delta_g$ et $k[G \times G]$ s'identifie à $k[G] \otimes k[G]$. Le comorphisme de la multiplication $\mu : G \times G \to G$ est

$$\mu^* : k[G] \to k[G] \otimes k[G], \quad \delta_g \mapsto \sum_{h \in G} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h.$$

Le comorphisme de $\kappa : g \mapsto g^{-1}$ est $\kappa^* : k[G] \to k[G]$, $\delta_g \mapsto \delta_{g^{-1}}$.

9) Plus compliqué et plus intéressant est le cas de PGL_n. On peut définir PGL_n comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}(M_n(k))$ formé des automorphismes d'algèbres. On sait, d'après le théorème de Skolem-Noether, que tout automorphisme de $M_n(k)$ est intérieur, et est donc de déterminant 1. Par conséquent, PGL_n est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(M_n(k))$. Si $g = (g_{pq}^{ij})_{1\le i,j,p,q\le n}$ est un élément de $\mathrm{SL}(M_n(k))$, on vérifie que g est un automorphisme d'algèbres si et seulement si

$$g(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad g(E_{ij})g(E_{r\ell}) = \delta_{jr}q(E_{i\ell}),$$

et ceci équivaut aux équations suivantes :

$$(\dagger) \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{pq}^{ss} = \delta_{pq}, \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{ps}^{ij} g_{sq}^{r\ell} = \delta_{jr} g_{pq}^{i\ell},$$

pour tout p,q,i,j,r,ℓ. On peut montrer que l'idéal engendré par ces éléments est réduit (c.-à-d., égal à sa racine), et contient l'élément $\mathrm{dét} - 1$, où dét est le déterminant $\mathrm{GL}(M_n(k)) \to k^*$. (En effet, on vérifie que l'espace tangent en $\mathrm{id}_{M_n(k)}$ à la variété définie par (†) est de dimension $n^2 - 1$, ce qui entraîne l'assertion précédente). Par conséquent, PGL_n a pour algèbre de fonctions régulières :

$$k[\mathrm{PGL}_n] = k[X_{pq}^{ij} \mid 1 \le i,j,p,q \le n]/\text{relations } (\dagger).$$

D'autre part, l'application $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$, $g \mapsto \mathrm{Int}(g)$ (où $\mathrm{Int}(g)$ est l'automorphisme intérieur $X \mapsto gXg^{-1}$) est un morphisme de groupes algébriques. En effet, on vérifie que

$$X_{pq}^{ij}(\mathrm{Int}(g)) = \mathrm{dét}(g)^{-1} a_{pi}(g) C_{qj}(g),$$

où $a_{rs}(g)$, resp. $C_{rs}(g)$, désigne le coefficient d'indice (r,s) de g, resp. de sa matrice des cofacteurs.

De plus, la restriction de Ad à SL_n est surjective, et donc $k[\mathrm{PGL}_n]$ s'identife à la sous-algèbre de $k[\mathrm{SL}_n]$ engendrée par les éléments

$$(\ddagger) \qquad a_{pi}C_{qj}, \quad \text{pour } i,j,p,q = 1,\dots,n.$$

Ceci montre déjà que plusieurs points de vues sont nécessaires : on préfère considérer $\mathrm{PGL}_n(k)$ comme le quotient $\mathrm{GL}_n(k)/k^*$, plutôt que de considérer l'une des algèbres ci-dessus.

Indication L'espace tangent précité est l'ensemble des matrices $X = (X_{pq}^{ij}) \in M_n(k)$ telles que la matrice $\mathrm{id} + \varepsilon X \in M_n(k[\varepsilon])$ vérifie les équations (†). On trouve que $X_{pq}^{ij} = 0$ si $i \neq p$ et $j \neq q$; si $i = p$ et $j \neq q$ (resp., si $i \neq p$ et $j = q$) alors

$$E_{q,j} := X_{iq}^{ij}, \qquad \text{resp. } E'_{p,i} := X_{pj}^{ij}$$

est indépendant de i (resp. de j), et $E_{q,p}+E'_{p,q}=0$. Enfin, pour $i=p$ et $j=q$, posant $H_{i,j}=X^{ij}_{ij}$, on a les relations :

$$H_{i,j}+H_{j,\ell}=H_{i,\ell},$$

d'où l'on tire : $H_{i,i}=0$, puis $H_{j,i}=-H_{i,j}$, et enfin, pour tout $i<j$:

$$H_{i,j}=H_i+\cdots+H_{j-1},$$

où l'on a posé $H_i:=H_{i,i+1}$ pour $i=1,\ldots,n-1$. Ceci montre que l'espace tangent considéré est engendré par les $n(n-1)$ éléments $E_{i,j}$, pour $i\neq j$, et les $n-1$ éléments H_i, pour $i=1,\ldots,n-1$, donc est de dimension $\leq n^2-1$.

1.3. Algèbres de Hopf. — Soient G un groupe algébrique affine et $k[G]$ son algèbre des fonctions régulières. Alors $k[G]\otimes k[G]$ s'identifie à $k[G\times G]$ par le morphisme qui à tout $\phi\otimes\psi$ associe l'application $(g,g')\mapsto \phi(g)\psi(g')$. Donc, le comorphisme de la multiplication $\mu : G\times G\to G$ est un morphisme d'algèbres

$$\Delta=\mu^* : k[G]\longrightarrow k[G]\otimes k[G].$$

Pour tout $\phi\in k[G]$, $\Delta(\phi)$ est une somme finie $\sum_i \phi_i\otimes\psi_i$ et, pour tout $g,g'\in G$, l'on a

$$\phi(gg')=(\phi\circ\mu)(g,g')=\Delta(\phi)(g,g')=\sum_i \phi_i(g)\psi(g').$$

De même, le comorphisme de $\kappa : g\mapsto g^{-1}$ est le morphisme d'algèbres $\tau=\kappa^*$: $k[G]\to k[G]$ tel que $\tau(\phi)(g)=\phi(g^{-1})$ pour tout $g\in G$.

L'associativité de μ se traduit par $\mu\circ(\mu\times \mathrm{id}_G)=\mu\circ(\mathrm{id}_G\times\mu)$ (égalité de morphismes $G\times G\times G\to G$) ; ceci équivaut à l'égalité

(**Ass**) $$(\Delta\otimes \mathrm{id}_{k[G]})\circ\Delta=(\mathrm{id}_{k[G]}\otimes\Delta)\circ\Delta,$$

qui exprime la **coassociativité** de Δ.

Notons $\varepsilon=\varepsilon_e$, où e est l'élément neutre de G et désignons par u l'inclusion de k dans $k[G]$ et par $m : k[G]\otimes k[G]\to k[G]$ la multiplication dans $k[G]$. La propriété $eg=g=ge$ pour tout g se traduit par

(**Neutre**) $$(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_{k[G]})\circ\Delta=\mathrm{id}_{k[G]}=(\mathrm{id}_{k[G]}\otimes\varepsilon)\Delta.$$

(On fait les identifications $k\otimes k[G]=k[G]=k[G]\otimes k$.) Enfin, la propriété $gg^{-1}=e=g^{-1}g$ se traduit par

(**Inv**) $$m\circ(\tau\otimes \mathrm{id}_{k[G]})\circ\Delta=u\circ\varepsilon=m\circ(\mathrm{id}_{k[G]}\otimes\tau)\circ\Delta.$$

Ces propriétés constituent les axiomes définissant la notion **d'algèbre de Hopf** (commutative).

Définition 1.4. — 1) Soit A une k-algèbre commutative. On dit que A est une algèbre de Hopf si l'on s'est donné trois morphismes d'algèbres

$$\Delta : A \to A \otimes A, \quad \varepsilon : A \to k, \quad \tau : A \to A$$

vérifiant les axiomes ci-dessus. Dans ce cas, Δ s'appelle la comultiplication, ε l'augmentation (ou co-unité), et τ l'antipode.

2) Un morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres qui respecte la comultiplication, l'augmentation et l'antipode, c.-à-d., qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_B \circ \phi &= (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_A ; \\ \varepsilon_B \circ \phi &= \varepsilon_A ; \\ \tau_B \circ \phi &= \phi \circ \tau_A . \end{cases}$$

Remarque 1.5. — On renvoie à [**Abe**, Chap.2] ou [**Ho**, Chap.I] pour la définition d'une k-algèbre de Hopf arbitraire H, c.-à-d., non nécessairement commutative. On prendra garde que dans ce cas l'antipode n'est pas un morphisme d'algèbres, mais un anti-homomorphisme, c.-à-d., on a $\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$ pour tout $a, b \in H$.

Si G est un groupe algébrique affine, on a vu plus haut que son algèbre de fonctions $k[G]$ est une algèbre de Hopf commutative. Réciproquement, on a la proposition suivante. On note $m_k : k \otimes k \to k$ la multiplication ; c'est un isomorphisme de k-algèbres. Plus généralement, pour toute k-algèbre S on notera $m_S : S \otimes S \to S$ la multiplication, et u_S l'inclusion $k \to S$.

Proposition 1.6. — *Soit A une k-algèbre de Hopf commutative.*

1) $\chi(A) := \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(A, k)$ *est un groupe, pour la loi*

$$\chi \cdot \chi' = m_k \circ (\chi \otimes \chi') \circ \Delta.$$

L'élément neutre est l'augmentation ε, et pour tout $\chi \in \chi(A)$ son inverse est $\chi^{-1} = \chi \circ \tau$.

2) *Plus généralement, pour toute A-algèbre commutative S, l'ensemble* $G(S) := \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(A, S)$ *est un groupe, pour la loi*

$$\phi \cdot \psi = m_S \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta.$$

L'élément neutre est $u_S \circ \varepsilon$, et pour tout $\phi \in G(S)$, son inverse est $\phi^{-1} = \phi \circ \tau$.

Démonstration. — Démontrons 2), dont 1) est un cas particulier. On observe d'abord que la commutativité de S assure que $\phi \cdot \psi$ est un morphisme de k-algèbres de A vers S. Ce point est laissé au lecteur.

Montrons l'associativité. Soient $\phi, \psi, \eta \in G(S)$. On vérifie que $(\phi\psi)\eta$ est le morphisme

$$m_S \circ (m_S \otimes \mathrm{id}_S) \circ (\phi \otimes \psi \otimes \eta) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta,$$

de A dans S, tandis que $\phi(\psi\eta)$ égale

$$m_S \circ (\mathrm{id}_S \otimes m_S) \circ (\phi \otimes \psi \otimes \eta) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Or $m_S(\mathrm{id}_S \otimes m_S) = m_S(m_S \otimes \mathrm{id}_S)$, par associativité de m_S, et $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\Delta$ par coassociativité de Δ. Ceci prouve que $(\phi\psi)\eta = \phi(\psi\eta)$.

Soit $\phi \in G(S)$. On a

$$(u_S \circ \varepsilon) \cdot \phi = m_S \circ (u_S \otimes \phi) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta,$$

et comme $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A)\Delta : A \to k \otimes A = A$ est l'identité, on en déduit que $(u_S \circ \varepsilon) \cdot \phi = \phi$. On montre de même que $\phi \cdot (u_S \circ \varepsilon) = \phi$.

De plus, comme $\phi : A \to S$ est un morphisme d'algèbres, on a $m_S \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ m_A$, et $\phi \circ u \circ \varepsilon = u_S \circ \varepsilon$. Par conséquent, $(\phi\tau) \cdot \phi$ égale

$$m_S(\phi \otimes \phi)(\tau \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \phi m_A(\tau \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \phi u \varepsilon = u_S \varepsilon.$$

On montre de même que $\phi \cdot (\phi\tau) = u_S\varepsilon$. Ceci prouve la proposition.

Corollaire 1.7. — *Si A est une k-algèbre de Hopf commutative de type fini réduite, alors* $\mathrm{Max}(A) = \chi(A)$ *est un groupe algébrique affine.*

Démonstration. — L'égalité $\mathrm{Max}(A) = \chi(A)$ résulte du théorème des zéros de Hilbert. Posons $G = \chi(A)$. Alors Δ et τ induisent des morphismes de variétés algébriques affines :

$$\mu = \Delta^\sharp : G \times G \to G \quad \text{et} \quad \kappa = \tau^\sharp,$$

qui font de G un groupe, l'élément neutre étant $\varepsilon \in G$. Donc G est un groupe algébrique affine.

De plus, les comorphismes de μ et κ sont Δ et τ, respectivement.

Théorème 1.8. — *Se donner un morphisme de groupes algébriques affines $G \to G'$ équivaut à se donner un morphisme d'algèbres de Hopf $k[G'] \to k[G]$.*

Démonstration. — Se donner un morphisme de variétés $\phi : G \to G'$ équivaut à se donner le morphisme de k-algèbres $\phi^* : k[G'] \to k[G]$. De plus, ϕ est un morphisme de groupes si, et seulement si, il vérifie

$$\phi \circ \mu_G = \mu_{G'} \circ (\phi \times \phi), \quad \phi(1_G) = 1_{G'}, \quad \phi \circ \kappa_G = \kappa_{G'} \circ \phi,$$

où κ désigne le passage à l'inverse. (En fait, la 1ère condition implique les deux autres). Ceci équivaut à ce que ϕ^* vérifie

$$\Delta_G \circ \phi^* = (\phi^* \otimes \phi^*) \circ \Delta_{G'}, \quad \varepsilon_G \circ \phi^* = \varepsilon_{G'}, \quad \tau_G \circ \phi^* = \phi^* \circ \tau_{G'},$$

c.-à-d., soit un morphisme d'algèbres de Hopf.

1.4. Exemples du point de vue Hopf. — 1) Le groupe additif $\mathbb{G}_a$. On a $k[\mathbb{G}_a] = k[x]$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\tau(x) = -x$, $\varepsilon(x) = 0$.

2) Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On a $k[\mathbb{G}_m] = k[x, x^{-1}]$, $\Delta(x) = x \otimes x$, $\tau(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(x) = 1$.

3) Le groupe linéaire GL_n. On a

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[t, x_{1,1}, \dots, x_{n,n}]/(t \,\mathrm{dét}(x_{i,j}) - 1).$$

La comultiplication correspond à la règle qui exprime le produit de deux matrices, c.-à-d.,

$$\forall i, j, \qquad \Delta(x_{i,j}) = \sum_{r=1}^{n} x_{i,r} x_{r,j},$$

et, comme $\mathrm{dét}(AB) = \mathrm{dét}(A)\,\mathrm{dét}(B)$, l'on a $\Delta(t) = t \otimes t$. L'augmentation ε est le morphisme « évaluation sur la matrice identité », d'où $\varepsilon(x_{i,j}) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j, et $\varepsilon(t) = 1$. Enfin, l'antipode τ se déduit de la règle qui exprime l'inverse de A comme $1/\,\mathrm{dét}(A)$ fois la transposée de la matrice des cofacteurs, c.-à-d., on a

$$\forall i, j, \qquad \tau(x_{i,j}) = t(-1)^{i+j} \mathrm{dét}(x_{r,s})_{r \neq j,\, s \neq i}.$$

Enfin, comme $t(A) = \mathrm{dét}(A)^{-1}$, on a $\tau(t)(A) = \mathrm{dét}(A)$ pour tout A, d'où $\tau(t) = \mathrm{dét}(x_{i,j})$.

2. Représentations des groupes algébriques affines

Commençons par une section sur les comodules, plus détaillée que ce dont on aura besoin dans la suite.

2.1. Cogèbres et comodules. —

Définition 2.1. — Une k-**cogèbre** est un k-module C muni de deux applications k-linéaires $\Delta : C \to C \otimes C$ et $\varepsilon : C \to k$, vérifiant les deux axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id}_C \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_C)\Delta$,
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C)\Delta = \mathrm{id}_C = (\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon)\Delta$.

Δ, resp. ε s'appelle la comultiplication, resp. l'augmentation. L'axiome (1) exprime la coassociativité de la comultiplication, et on peut appeler (2) l'axiome de co-unité.

Un morphisme de k-cogèbres $\phi : C \to C'$ est une application k-linéaire vérifiant $\Delta_{C'} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_C$ et $\varepsilon_{C'} \circ \phi = \varepsilon_C$.

Définition 2.2. — Un C-**comodule** (à droite) est un k-module V, muni d'une *coaction* $\Delta_V : V \to V \otimes C$, c.-à-d., une application k-linéaire vérifiant les axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta_V = \mathrm{id}_V$,
(2) $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V = (\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C)\Delta_V$.

Un morphisme de C-comodules $f : V \to W$ est une application k-linéaire qui vérifie $\Delta_W \circ f = (f \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta_V$.

Il est clair que id_V est un morphisme, de même que la composée de deux morphismes. On obtient ainsi une catégorie, la catégorie $\underline{C\text{-comod}}$ des C-comodules.

Définition et proposition 2.3. — *On dit que W est un sous-C-comodule de V si l'on a $\Delta_V(W) \subseteq W \otimes C$. Dans ce cas, on vérifie facilement que V/W est un C-comodule, et que la projection $V \to W$ est un morphisme de C-comodules.*

Proposition 2.4. — *Soit $f : V \to W$ un morphisme de C-comodules. Alors* $\operatorname{Ker} f$*, resp* $\operatorname{Im} f$*, est un sous-comodule de V, resp. de W, et l'on a un isomorphisme de comodules $V/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$. Par conséquent, C-comod est une catégorie abélienne.*

Démonstration. — Laissée au lecteur.

Incluons ici le lemme suivant, analogue de la restriction des scalaires pour les modules, c.-à-d., du fait que si $A \to B$ est un morphisme de k-algèbres et M un B-module, alors M est aussi un A-module.

***Lemme 2.5* (Corestriction des scalaires)**. — *Soit $\phi : C \to C'$ un morphisme de k-cogèbres. Si V est un C-comodule, pour la coaction $\Delta_V : V \to V \otimes C$, alors c'est un C'-comodule, pour la coaction $\Delta'_V = (\mathrm{id}_V \otimes \phi)\Delta_V$.*

Démonstration. — Laissée au lecteur.

***Proposition 2.6* (Propriété de finitude des comodules)**. — *Soit C une k-cogèbre et soit V un C-comodule arbitraire, c.-à-d., pas nécessairement de dimension finie.*

1) *Tout sous-espace vectoriel E de dimension finie est contenu dans un sous-comodule de dimension finie. Par conséquent, V est réunion de ses sous-comodules de dimension finie.*

2) *Toute intersection de sous-comodules est un sous-comodule. En particulier, pour tout sous-espace E de V il existe un plus petit sous-comodule E' de V contenant E.*

Démonstration. — Soit $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de C. Alors, tout élément de $V \otimes C$ s'écrit de façon unique $\sum_\lambda v_\lambda \otimes c_\lambda$, pour des $v_\lambda \in V$ uniquement déterminés et nuls sauf pour un nombre fini de λ.

1) Soit E un sous-espace de V de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, écrivons

$$\Delta_V(e_i) = \sum_\lambda v_{i\lambda} \otimes c_\lambda.$$

Soit F le sous-espace de V engendré par les $v_{i\lambda}$, il est de dimension finie. De plus, F contient E puisque pour tout i on a $e_i = (\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta_V(e_i) = \sum_\lambda v_{i\lambda}\varepsilon(c_\lambda)$. Montrons que $\Delta_V(F) \subseteq F \otimes C$.

Pour tout i et tout λ, écrivons

$$\Delta_V(v_{i\lambda}) = \sum_\mu v_{i\lambda\mu} \otimes c_\mu. \tag{1}$$

Alors on a, d'une part,

$$(\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta_V(e_i) = \sum_{\lambda,\mu} v_{i\lambda\mu} \otimes c_\mu \otimes c_\lambda. \tag{2}$$

D'autre part, pour chaque $\nu \in \Lambda$, écrivons $\Delta(c_\nu) = \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\nu\lambda\mu}(\nu) c_\mu \otimes c_\lambda$, où les $\alpha_{\lambda\mu}(\nu) \in k$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Alors, on a, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$(\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta_V(e_i) = \sum_{\lambda,\mu} \left(\sum_\nu \alpha_{\lambda\mu}(\nu) v_{i\nu} \right) \otimes c_\mu \otimes c_\lambda. \tag{3}$$

Comme $(\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta_V = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta_V$, on en déduit, pour tout λ, μ, que $v_{i\lambda\mu}$ égale $\sum_\nu \alpha_{\lambda\mu}(\nu) v_{i\nu}$ donc appartient à F. D'après (1), ceci montre que $\Delta_V(F) \subseteq F \otimes C$, ce qui prouve le point 1).

2) Soit $(W_i)_{i\in I}$ une famille arbitraire de sous-comodules et soit $x \in W := \bigcap_{i\in I} W_i$. Écrivons

$$\Delta_V(x) = \sum_\lambda v_\lambda \otimes c_\lambda.$$

Fixons un indice λ. Comme $\Delta_V(x) \in W_i \otimes C$, on a $v_\lambda \in W_i$ pour tout i, d'où $v_\lambda \in W$. Ceci montre que W est un sous-comodule de V. La dernière assertion en résulte, en prenant E' égal à l'intersection de tous les sous-comodules contenant E. La proposition est démontrée.

2.2. Représentations rationnelles des groupes algébriques affines. —

Définition 2.7. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Une **représentation rationnelle** de G dans V est la donnée d'un morphisme de groupes algébriques $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

Ceci équivaut à se donner un morphisme de variétés $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto gv$ qui est une action linéaire, c.-à-d., qui est linéaire en V et vérifie $g(hv) = (gh)v$ et $ev = v$, où e est l'élément neutre de G. (On laisse au lecteur le soin de vérifier l'équivalence de ces deux définitions).

Lemme 2.8. — *Soient $n \geq 1$ et $\phi : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ un morphisme de groupes. On note $C_{ij} \in k[\mathrm{GL}_n(k)]$ les coefficients matriciels. Alors ϕ est un morphisme de variétés si et seulement si $C_{ij} \circ \phi \in k[G]$, pour $i, j = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. — La nécessité est claire. Réciproquement, si la condition est satisfaite alors on obtient un morphisme d'algèbres $\varphi : k[M_n(k)] \to k[G]$. Désignons par D l'élément $\mathrm{dét}(C_{i,j})$ de $k[M_n(k)]$, et observons que $\varphi(D)$ est un élément inversible de $k[G]$, car $\varphi(D)(g) = \mathrm{dét}(\phi(g))$, d'où $\varphi(D)^{-1}(g) = \mathrm{dét}(\phi(g^{-1}))$. D'après la propriété universelle de la localisation, φ s'étend en un morphisme d'algèbres de $k[M_n(k)][D^{-1}] = k[\mathrm{GL}_n(k)]$ vers $k[G]$. Ceci prouve le lemme.

Proposition 2.9. — *Soit V un $k[G]$-comodule arbitraire.*

a) *V est muni de l'action linéaire de G définie par $gv = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_g)\Delta_V(v)$; de plus, on a la propriété suivante :*

b) *Un sous-espace vectoriel W de V est G-stable ssi $\Delta_V(W) \subseteq W \otimes k[G]$, c.-à-d., ssi W est un sous-comodule.*

c) *Si $\dim V < \infty$, alors V est un G-module rationnel.*

Démonstration. — a) Il faut vérifier que $ev = v$ et $g(hv) = (gh)v$, pour tout $g, h \in G$, $v \in V$. Ceci résulte des axiomes de coaction (*cf.* 2.2) et est laissé au lecteur.

Prouvons b). Il est clair que si $\Delta_V(W) \subseteq W \otimes k[G]$ alors W est G-stable. Pour voir la réciproque, soit E un supplémentaire de W dans V. Soit $v \in W$

arbitraire. Écrivons

$$\Delta_V(v) = \sum_i w_i \otimes \phi_i + \sum_j e_j \otimes \psi_j,$$

avec $w_i \in W$, $\phi_i, \psi_j \in k[G]$, et les e_j linéairement indépendants dans E. Pour tout $g \in G$, l'hypothèse $gv \in W$ implique $0 = \sum_j \psi_j(g)e_j$ et ceci entraîne que $\psi_j = 0$, pour tout j. On a donc $\Delta_V(v) \in W \otimes k[G]$. Ceci prouve b).

c) Supposons maintenant que $\dim V = n$ et montrons que l'application abstraite $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ obtenue plus haut est un morphisme. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. D'après le lemme 2.8, il suffit de voir que les fonctions $C_{ij} \circ \rho : G \to k$ appartiennent à $k[G]$, pour tout i, j. Mais ceci est clair, car pour tout j l'on a

$$\Delta_V(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes c_{ij},$$

pour certains $c_{ij} \in k[G]$. Alors, $c_{ij}(g) = C_{ij}(\rho(g))$ pour tout $g \in G$, et donc $c_{ij} = C_{ij} \circ \rho$. La proposition est démontrée.

Lemme 2.10. — *Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de $V \cong k^n$. L'application*

$$\Delta_V : V \to V \otimes k[\mathrm{GL}_n(k)], \qquad v_j \mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes C_{ij}$$

munit V d'une structure de $k[\mathrm{GL}(V)]$-comodule.

De plus, cette application est canonique : elle ne dépend pas de la base de V choisie. La structure de $\mathrm{GL}(V)$-module rationnel sur V correspondante est l'action naturelle $\mathrm{GL}(V) \times V \to V$, qui correspond au morphisme identité $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$!

Démonstration. — Pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta_V(v_j) = \sum_i v_i\delta_{i,j} = v_j$ et

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta_V(v_j) = \sum_{i,\ell} v_i \otimes C_{i\ell} \otimes C_{\ell j} = (\Delta_V \otimes \mathrm{id})\Delta_V(v_j).$$

Ceci montre que Δ_V est une coaction. On voit facilement que la structure de $\mathrm{GL}(V)$-module rationnel sur V qui résulte du point a), correspond à l'action naturelle $\mathrm{GL}(V) \times V \to V$, et donc au morphisme identité $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$.

Voyons l'indépendance vis-à-vis de la base. Notons γ l'application naturelle

$$V^* \otimes V \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}(V)^* \subset k[\mathrm{End}(V)].$$

Alors $C_{ij} = \gamma(v_i^* \otimes v_j)$. On en déduit que, pour tout v, on a $\Delta_V(v) = (\mathrm{id}_V \otimes \gamma)(\sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^* \otimes v)$. L'indépendance cherchée en découle, soit par un calcul direct, soit en observant que via l'isomorphisme

$$\theta : \mathrm{End}(V) \otimes V \xrightarrow{\cong} V \otimes V^* \otimes V,$$

on a $\Delta_V(v) = (\mathrm{id}_V \otimes \gamma)(I_V \otimes v)$, où I_V désigne l'élément unité de $\mathrm{End}(V)$. Le lemme est démontré.

Corollaire 2.11. — *Soit V de dimension finie. Il est équivalent de se donner sur V une structure de $k[G]$-comodule ou de G-module rationnel.*

Démonstration. — Si V est un $k[G]$-comodule, on obtient une structure de G-module rationnel sur V, d'après la proposition précédente.

Réciproquement, d'après le lemme précédent, on a une structure de comodule $\Delta_V : V \to V \otimes k[\mathrm{GL}(V)]$. Par conséquent, si ρ est un morphisme $G \to \mathrm{GL}(V)$, son comorphisme $\rho^* : k[\mathrm{GL}(V)] \to k[G]$ est un morphisme d'algèbres de Hopf et donc, d'après le lemme 2.5, $(\mathrm{id}_V \otimes \rho^*)\Delta_V$ fait de V un $k[G]$-comodule.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la composée de ces deux opérations redonne sur V la structure initiale de $k[G]$-comodule, resp. de G-module rationnel. Ceci démontre le corollaire.

Proposition 2.12. — *Soit V un k-espace vectoriel arbitraire, c.-à-d., pas nécessairement de dimension finie. Il est équivalent de se donner :*

i) une structure de $k[G]$-comodule sur V, ou

ii) une action linéaire **localement finie** *de G sur V telle que, pour tout sous-espace G-stable W de dimension finie, l'application induite $G \to \mathrm{GL}(W)$ soit un morphisme de groupes algébriques.*

On dit que V est un G-module **rationnel** *s'il est muni de l'une de ces données. Dans ce cas, pour tout sous-espace W, on a :*

W est un sous-G-module $\Leftrightarrow$ W est un sous-comodule.

Démonstration. — Supposons que V soit un $k[G]$-comodule et soit W un sous-espace G-stable de dimension finie. L'application induite $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ est évidemment un morphisme de groupes. D'après la proposition 2.9, W est un sous-comodule et ρ est un morphisme de groupes algébriques.

De plus, d'après le résultat de finitude (Proposition 2.6), tout sous-espace E de dimension finie est contenu dans un sous-comodule (de façon équivalente, un G-module) de dimension finie. Ceci est la définition d'une action localement finie. Ceci montre que la condition ii) est vérifiée.

Réciproquement, supposons ii) vérifié. Si W est un sous-espace G-stable de dimension finie, on a un morphisme d'algèbres de Hopf $\pi_W : k[\mathrm{GL}(W)] \to k[G]$, et on en déduit que $(\mathrm{id} \otimes \pi_W) \circ \Delta_W : W \to W \otimes k[G]$ est une coaction, notée θ_W. De plus, si $W_1 \subseteq W_2$, on vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\theta_{W_1}} & W_1 \otimes k[G] \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ W_2 & \xrightarrow{\theta_{W_2}} & W_2 \otimes k[G] \end{array}$$

est commutatif. On en déduit, puisque $\otimes$ commute à la limite inductive, que ceci munit V d'une coaction θ_V, qui prolonge les θ_W.

Définition et proposition 2.13 **(Dual d'un G-module de dimension finie)**

1) *Soit V un G-module rationnel de dimension finie n. Alors l'espace dual est de façon naturelle un G-module, pour la représentation dite* contragrédiente*, définie par*

$$(g \cdot \phi)(v) = \phi(g^{-1}v), \qquad \forall g \in G, \phi \in V^*, v \in V.$$

2) *Pour exprimer la coaction correspondante, soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de V et $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ la base duale de V^*. Si on pose, pour tout $j = 1, \dots, n$,*

$$\Delta_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{ij},$$

avec $c_{ij} \in k[G]$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$, l'on a

$$\Delta_{V^*}(v_i^*) = \sum_{j=1}^{n} v_j^* \otimes \tau(c_{ij}),$$

où τ désigne l'antipode de $k[G]$. De façon plus intrinsèque, posant $C = k[G]$, Δ_{V^*} est l'image de Δ_V via

$$\mathrm{Hom}_k(V, V \otimes C) \cong V^* \otimes V \otimes C \xrightarrow{\text{volte} \otimes \tau} V \otimes V^* \otimes C \cong \mathrm{Hom}_k(V^*, V^* \otimes C).$$

Démonstration. — Pour 1), il suffit d'observer que le morphisme de groupes $\theta_V : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^*)$, $g \mapsto {}^t g^{-1}$, est un morphisme de groupes algébriques, ce qui se voit immédiatement en regardant les coefficients matriciels. Si on désigne par $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ le morphisme de groupes algébriques définissant la structure de G-module de V, alors le module dual V^* correspond au morphisme $\theta_V \circ \rho$. Ceci prouve le point 1). Le point 2) est laissé au lecteur.

2.3. Linéarité des groupes algébriques affines. — On dit qu'un groupe algébrique G est **linéaire** s'il est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe $\mathrm{GL}(V)$. Dans ce cas, G est évidemment un groupe algébrique affine. La réciproque est vraie :

Théorème 2.14. — *Tout groupe algébrique affine est linéaire.*

Démonstration. — Soit G un groupe algébrique affine. Alors la comultiplication $\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G]$ fait de $k[G]$ un $k[G]$-comodule et donc un G-module rationnel. Pour $\phi \in k[G]$, $g, h \in G$, on a $(g\phi)(h) = \phi(hg)$.

Soient $x_1, \ldots, x_s$ des générateurs de $k[G]$ comme algèbre, et soit V le sous-G-module (de dimension finie !) qu'ils engendrent. D'après la proposition 2.9, l'on a $\Delta(V) \subseteq V \otimes k[G]$ et l'on obtient un morphisme de groupes algébriques $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de V ; il existe des $c_{ij} \in k[G]$ tels que, pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$(*) \qquad \rho(g) f_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(g) f_i, \quad \forall g \in G.$$

Pour montrer que ρ est une immersion fermée, il reste à voir que le comorphisme $\rho^* : k[\mathrm{GL}(V)] \to k[G]$ est surjectif. Mais ceci résulte de $(*)$. En effet, $c_{ij} = C_{ij} \circ \rho = \rho^*(C_{ij})$, et pour $j = 1, \ldots, n$, on a

$$\forall g \in G, \qquad f_j(g) = (\rho(g) f_j)(e) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(g) f_i(e),$$

d'où $f_j = \rho^*(\sum_{i=1}^{n} f_i(e) C_{ij})$. Comme les f_j engendrent $k[G]$, ceci prouve que ρ^* est surjective.

3. Action d'un groupe algébrique sur une variété

Soit G un groupe algébrique affine.

3.1. Action par automorphismes sur une k-algèbre. —

Définition et proposition 3.1. — *Soit A une k-algèbre. On dit que G agit (rationnellemnent) par automorphismes sur A si l'on s'est donné une structure de G-module rationnel sur A telle que, pour tout $g \in G$, l'application $a \mapsto ga$ soit un automorphisme d'algèbre.*

Ceci équivaut à dire que la coaction correspondante $\Delta_A : A \to A \otimes k[G]$ est multiplicative, c.-à-d., est un morphisme de k-algèbres.

Démonstration. — Laissée au lecteur.

3.2. Action sur une variété affine. —

Définition et proposition 3.2. — *Soit X une variété algébrique affine. Une* action *de G sur X est un morphisme de variétés $\mu_X : G \times X \to X$ vérifiant les axiomes d'une action, c.-à-d.,*
(1) $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X) = \mu_X \circ (\mathrm{id}_G \times \mu_X)$,
(2) $\mu_X \circ (e \times \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$,
où μ, resp. e, désigne la multiplication, resp. l'élément neutre, de G.

Notant $\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$ le comorphisme de μ_X (qui est un morphisme de k-algèbres), ceci équivaut à dire que Δ_X est, de plus, une coaction. Réciproquement, toute coaction $\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$ qui est multiplicative, c.-à-d., un morphisme de k-algèbres, induit un morphisme $\mu_X : G \times X \to X$ qui vérifie (1) et (2).

Par conséquent, se donner une action de G sur X équivaut à se donner une coaction multiplicative $\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$. Dans ce cas, on dira aussi que X est une G-variété.

Démonstration. — Laissée au lecteur.

Définition et proposition 3.3. — *Soient X, Y deux G-variétés algébriques affines. Un G-morphisme $\phi : X \to Y$ est un morphisme de variétés qui commute à l'action de G, c.-à-d., tel que $\phi(gx) = g\phi(x)$ pour tout $g \in G$, $x \in X$. En termes de morphismes, ceci signifie que $\phi \circ \mu_X = \mu_Y \circ (\mathrm{id}_G \times \phi)$, et ceci équivaut à dire que $\phi^* : k[X] \to k[Y]$ est un morphisme (d'algèbres et) de comodules.*

Démonstration. — Laissée au lecteur.

3.3. Linéarisation des actions affines. —

Proposition 3.4. — *Soit X une G-variété affine. Alors il existe une immersion fermée G-équivariante de X dans un G-module rationnel de dimension finie.*

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de la linéarité de G. Soit $x_1, \dots, x_s$ des générateurs de $k[X]$ comme algèbre, et soit V le sous-G-module de dimension finie de $k[X]$ qu'ils engendrent.

D'après la propriété universelle de l'algèbre symétrique $S(V)$, on obtient, d'une part, que G agit rationnellement, par automorphismes d'algèbre sur $S(V)$. D'autre part, on obtient un morphisme d'algèbres G-équivariant $\phi : S(V) \to k[X]$. Ce morphisme est surjectif, puisque V engendre $k[X]$. Par conséquent, le morphisme associé $\phi^\sharp : X \to V^*$ est une immersion fermée G-équivariante.

4. Premiers résultats sur les groupes linéaires : composante neutre, théorème de l'image fermée et lemme de l'orbite fermée

Le but de cette section est d'énoncer et démontrer les résultats du titre. Commençons par des rappels de géométrie algébrique.

4.1. Espaces noethériens et composantes irréductibles. — Soit X un espace topologique non vide. On rappelle que X est connexe s'il n'est pas réunion disjointe de deux fermés propres (c.-à-d., distincts de X). Ceci équivaut à dire que toute partie à la fois ouverte et fermée est soit vide soit égale à X.

Définition 4.1. — On dit que X est **irréductible** s'il n'est pas réunion de deux fermés propres de X. Ceci équivaut à dire que l'intersection de deux ouverts non vides de X est un ouvert non vide, ou encore, que tout ouvert non vide est dense.

Ceci implique que tout ouvert non vide de X est également irréductible.

Lemme 4.2. — 1) *L'image par une application continue d'un espace irréductible, resp. connexe, est irréductible, resp. connexe.*

2) *Soient Y un sous-espace de X et $\overline{Y}$ son adhérence. Si Y est irréductible, resp. connexe, $\overline{Y}$ l'est aussi. De plus, si $\overline{Y}$ est irréductible, Y l'est aussi.*

Définition 4.3. — On dit qu'un espace topologique X est **quasi-compact** si de tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i\in J} U_i$, où $J \subset I$ est une partie finie. Ceci équivaut à dire que si une intersection de fermés $\bigcap_{i\in I} Z_i$ est vide, alors déjà une intersection finie $\bigcap_{i\in J} Z_i$ est vide.

Définition et proposition 4.4. — *Soit X un espace topologique. On dit que X est* **noethérien** *s'il vérifie l'une des conditions équivalentes ci-dessous :*

1) *Toute suite décroissante de fermés, resp. toute suite croissante d'ouverts, est stationnaire.*

2) *Toute famille non vide de fermés, resp. d'ouverts, possède un élément minimal, resp. maximal.*

3) *Tout ouvert de X est quasi-compact.*

Proposition 4.5. — *Soient A une k-algèbre de type fini réduite et $X = \mathrm{Max}(A)$ la variété algébrique affine associée, munie de la topologie de Zariski.*

1) *X est un espace topologique noethérien.*

2) *X est connexe ssi A ne contient pas d'idempotent autre que 0 et 1.*

3) *X est irréductible ssi A est intègre.*

Définition 4.6. — Un sous-espace de X qui est irréductible (resp. connexe) et maximal pour cette propriété s'appelle une **composante irréductible** (resp. **connexe**) de X.

D'après le point 2. du lemme 4.2, une telle composante est une partie fermée de X.

Remarque 4.7. — 1) Si Y, Z sont deux parties connexes de X ayant un point en commun, $Y \cup Z$ est connexe. On en déduit que la relation $x \sim x'$ s'il existe une partie connexe contenant x et x' est une relation d'équivalence sur X, et les composantes connexes sont les classes d'équivalence.

2) Pour un espace topologique arbitraire, l'existence de parties irréductibles maximales résulte du lemme de Zorn, voir [**Die**, (T, 6)]. Toutefois, pour un espace noethérien, on a la proposition suivante.

Proposition 4.8. — *Soit X un espace topologique noethérien. Alors les composantes irréductibles de X sont en nombre fini et recouvrent X.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble $\mathcal{Y}$ des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Si $\mathcal{Y}$ était non vide, alors d'après la propriété de noethérianité il contiendrait un élément minimal Z, nécessairement non-irréductible. Donc Z est réunion de deux fermés propres Z_1 et Z_2. Mais d'après la minimalité de Z, Z_1 et Z_2 sont réunions finies de fermés irréductibles, et donc aussi Z. Contradiction ! Donc $\mathcal{Y} = \emptyset$ et X est réunion finie de fermés irréductibles.

Considérons alors une décomposition $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, avec n minimal. Si Y est un sous-espace irréductible de X, l'égalité $Y = \cup_{i=1}^{n} (Y \cap X_i)$ entraîne que $Y \subseteq X_i$ pour un certain i. Par conséquent, tout sous-espace irréductible maximal de X est égal à l'un des X_i. Comme de plus $X_i \not\subseteq X_j$ pour $j \neq i$, puisqu'on a choisi n minimal, on obtient que les X_i sont exactement les composantes irréductibles de X.

4.2. Dimension. —

Définition 4.9 **(Dimension d'un espace topologique noethérien)**
Soient X un espace topologique noethérien, et $x \in X$.

a) On note $\dim_x X$ le supremum des longueurs des suites strictement décroissantes de fermés irréductibles de X contenant x (la longueur d'une suite $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n$ étant n). C'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

b) On pose $\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$; c'est encore un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour tout sous-espace $Y \subseteq X$, on a $\dim Y \leq X$. De plus, si $X_1, \ldots, X_n$ sont les composantes irréductibles de X, on a $\dim X = \mathrm{Max}_i \dim X_i$.

Définition 4.10 **(Dimension d'un anneau noethérien)**. — Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{p}$ un idéal premier.

a) On note $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ le supremum des longueurs des suites strictement croissantes d'idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{p}$, où, comme précédemment, la longueur d'une suite $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ est n, c.à.d. le nombre de signes d'inclusion. On peut montrer que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < +\infty$, voir [**AM**, Chap. 11].

b) On note $\dim A$ le supremum des $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, pour $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$, c'est a priori un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour tout idéal I, on a $\dim(A/I) \leq \dim A$.

Lemme 4.11. — *Soient A un anneau noethérien, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Alors $\dim_{\mathfrak{p}} X = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.*

Démonstration. — Laissée au lecteur.

Remarque 4.12. — 1) Nagata a construit un exemple d'anneau noethérien A tel que $\dim A = +\infty$, voir [**AM**], Exercice 11.4.

2) Évidemment, la dimension est une notion plus intéressante lorsqu'elle est finie. À cet égard, on la proposition suivante.

Proposition 4.13. — *Soient k un corps et $X_1, \ldots, X_n$ des indéterminées. On a $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$, et $\dim k[X_1, \ldots, X_n]/I < n$ pour tout idéal non nul I.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Ma1**], §(14.A), Thm. 22.

Corollaire 4.14. — *Soit k algébriquement clos. Toute variété algébrique affine $X \subseteq k^n$ est de dimension $\leq n$, avec égalité ssi $X = k^n$.*

4.3. Corps des fonctions rationnelles et dimension. — Soit X une variété irréductible. Si U, V sont des ouverts non-vides, $U \cap V$ est un ouvert non-vide et l'application de restriction $k[U] \to k[U \cap V]$ est injective (car $U \cap V$ est dense). On note $k(X)$ la limite injective des $k[U]$, pour U ouvert non-vide.

En d'autres termes, $k(X)$ s'identifie à l'ensemble des couples (U, f) où U est un ouvert non-vide et $f \in k[U]$, modulo la relation d'équivalence : $(U, f) \sim (V, g)$ si f et g coïncident sur un ouvert non-vide $W \subseteq U \cap V$ (dans ce cas, $f = g$ sur $U \cap V$). C'est un corps, car si f est non-nulle et appartient à $k[U]$ alors $1/f$ appartient à $k[U \cap D(f)]$, où l'on rappelle que $D(f)$ désigne l'ouvert : $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Proposition 4.15. — *Soit X irréductible. Alors $k(X) = \mathrm{Frac}(k[U])$, pour tout ouvert affine U.*

Démonstration. — D'abord, il résulte de la définition que $k(X) = k(U)$ pour tout ouvert non-vide U. Donc il suffit de montrer que si X est affine alors $k(X) = \mathrm{Frac}(k[X])$. Il est clair que $k[X] \subseteq k(X)$. Réciproquement, soit $f \in k(X)$. Alors $f \in k[V]$ pour un ouvert non-vide V, et il existe $g \in k[X]$ tel $D(g) \subseteq k[V]$. Alors $f \in k[D(g)] = k[X]_g \subseteq k(X)$.

Pour tout corps K extension de type fini de k, on notera $\deg.\mathrm{tr}._k K$ son degré de transcendance sur k. On admettra le résultat suivant ; voir, par exemple, [Hu, 3.2, 3.4.A].

Théorème 4.16. — *Soit X irréductible. Pour tout $x \in X$, on a $\dim_x X = \deg.\mathrm{tr}._k k(X)$. En particulier, $\dim X = \deg.\mathrm{tr}._k k(X)$.*

4.4. Image et fibres d'un morphisme, théorème de Chevalley. —

Définition 4.17. — Soient X, Y deux variétés algébriques affines et $f : X \to Y$ un morphisme. On dit que f est **dominant** si $f(X)$ est dense dans Y, c.-à-d., si $\overline{f(X)} = Y$. Ceci équivaut à ce que le comorphisme $f^* : k[Y] \to k[X]$ soit injectif.

On admet le théorème suivant (voir [**Die**, §4]), qui est une variante (ou une conséquence) du théorème de constructibilité de Chevalley, *cf.* le cours de Laszlo [**Las**, §6.11] ou [**Laf**, Chap.7, §3.2] ou [**Ma1**, (6.E)].

Théorème 4.18. — *Soient X, Y irréductibles et $f : X \to Y$ un morphisme dominant.*

a) *Il existe un ouvert dense V de Y, contenu dans $f(X)$, tel que, pour tout $v \in V$, toute composante irréductible de $f^{-1}(v)$ soit de dimension* $\dim X - \dim Y \geq 0$.

b) *Pour tout $y \in f(X)$ et toute composante irréductible Z de $f^{-1}(v)$, on a* $\dim Z \geq \dim X - \dim Y$.

b′) *La fonction* $X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ *est semi-continue supérieurement, c.à.d., pour tout* n, *l'ensemble des* $x \in X$ *tels qu'il existe une composante* Z *de* $f^{-1}(f(x))$ *contenant* x *et de dimension* $\geq n$, *est fermé.*

Corollaire 4.19. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés. Alors* $f(X)$ *contient un ouvert dense de* $\overline{f(X)}$.

Démonstration. — Remplaçant si nécessaire Y par $\overline{f(X)}$, on peut supposer que f est dominant. On se ramène alors au cas irréductible comme suit.

Notons $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X et posons $Y_i = \overline{f(X_i)}$. Alors, d'une part, $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ égale Y, car c'est un fermé contenant $f(X)$. D'autre part, chaque Y_i est irréductible donc, d'après le théorème précédent, $f(X_i)$ contient un ouvert dense U_i de Y_i. Alors $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ est un ouvert dense de Y contenu dans $f(X)$.

4.5. Composante neutre. —

Proposition 4.20. — *Soit* G *un groupe algébrique.*
(a) *Les composantes connexes de* G *coïncident avec les composantes irréductibles.*
(b) *Soit* G^0 *la composante connexe de l'identité. Alors* G^0 *est un sous-groupe fermé distingué d'indice fini. Tout sous-groupe fermé connexe est contenu dans* G^0.
(c) *Tout sous-groupe fermé d'indice fini contient* G^0.

Démonstration. — Soient $X_1, \ldots, X_m$ les composantes irréductibles de G contenant e. Notons $Y = X_1 \cdots X_m$ l'image de $X_1 \times \cdots X_m$ par le morphisme $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_1 \cdots x_m$. Alors Y est une partie irréductible de G contenant e et est donc contenue dans un certain X_i, disons X_1. Comme chaque X_i est contenu dans Y, il en résulte $m = 1$. Donc e est contenu dans une unique composante irréductible ; notons-la G^0. C'est un fermé de G, stable par multiplication d'après ce qui précède.

Pour tout $g \in G$, $g^{-1}G^0$ est une composante irréductible de G, car image de G^0 par un automorphisme de G. De plus, si $g \in G^0$ alors $g^{-1}G^0$ contient e et est donc égal à G^0. Ceci prouve que G^0 est un sous-groupe fermé. De même, pour tout $g \in G$, gG^0g^{-1} est une composante irréductible de G contenant e, et donc $gG^0g^{-1} = G^0$. Par conséquent, G^0 est un sous-groupe normal.

Comme chaque classe gG^0 est une composante irréductible de G, la proposition 4.8 entraîne que $[G : G^0] < \infty$. Les classes gG^0, étant en nombre fini, sont aussi ouvertes, et sont donc les composantes connexes de G.

Enfin, si H est un sous-groupe fermé connexe, alors $H \cap G^0$ est ouvert et fermé et non-vide (il contient e), donc égal à H, d'où $H \subseteq G^0$. Ceci prouve (a) et (b).

Prouvons (c). Si H est un sous-groupe fermé d'indice fini, il est aussi ouvert, et est donc une réunion de composantes connexes de G. Comme $e \in H$, alors H contient G^0.

Remarque 4.21. — Les groupes algébriques non-connexes se rencontrent naturellement. Par exemple, soient T le sous-groupe des matrices diagonales dans SL_2 et N son *normalisateur* dans SL_2 (c.à.d. $N = \{g \in \mathrm{SL}_2 \mid gTg^{-1} = T\}$). Alors $N^0 = T$ et on a une suite exacte $1 \to T \to N \to \{\pm 1\} \to 1$; mais N n'est pas un *produit semi-direct* de $\{\pm 1\}$ par T (exercice !).

4.6. Lemme des deux ouverts et sous-groupes. — On aura besoin des résultats suivants.

Lemme 4.22. — *Soient G un groupe algébrique, U un ouvert et Γ une partie dense. Alors $G = U\Gamma = \Gamma U$.*

Démonstration. — Soit $g \in G$. L'ouvert gU rencontre Γ, et donc $g \in \Gamma U$. En considérant Ug, on obtient de même que $G = U\Gamma$.

Proposition 4.23. — *Soient G un groupe algébrique et H un sous-groupe abstrait de G.*
(a) *$\overline{H}$ est un sous-groupe fermé de G.*
(b) *Si H contient un ouvert non-vide de $\overline{H}$, alors $H = \overline{H}$. En particulier, tout sous-groupe ouvert est fermé.*

Démonstration. — Prouvons (a). Pour $g \in G$, notons λ_g la translation à gauche $g' \mapsto gg'$ et δ_g la translation à droite $g' \mapsto g'g$. Soit $h \in H$. L'image inverse du fermé $\overline{H}$ par l'application continue λ_h est un fermé contenant H et donc $\overline{H}$. Par conséquent, $H{\cdot}\overline{H} \subseteq \overline{H}$.

Soit maintenant $y \in \overline{H}$. L'image inverse du fermé $\overline{H}$ par l'application continue δ_y est un fermé contenant H et donc $\overline{H}$. Par conséquent, $\overline{H}{\cdot}\overline{H} \subseteq \overline{H}$. Enfin, notons τ le morphisme $g \mapsto g^{-1}$. Alors le fermé $\tau^{-1}(\overline{H})$ contient H et donc $\overline{H}$, d'où $\tau(\overline{H}) \subseteq \overline{H}$. Ceci prouve (a).

Prouvons (b). Soit U un ouvert non-vide contenu dans H. Alors H est égal à $\bigcup_{h \in H} hU$, et est donc ouvert dans $\overline{H}$. Il y est aussi dense, et donc d'après le lemme on a $\overline{H} = H{\cdot}H = H$.

4.7. Morphismes de groupes algébriques. — Soit G un groupe algébrique. Comme les composantes connexes de G sont des translatées de G^0, elles ont toutes la même dimension. Par conséquent, $\dim G = \dim G^0$.

Théorème 4.24. — *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques.*
(a) $\operatorname{Ker}\phi$ *est un sous-groupe fermé de G.*
(b) $\operatorname{Im}\phi$ *est un sous-groupe fermé de G'.*
(c) *On a* $\dim\phi(G) = \dim G - \dim\operatorname{Ker}\phi$.
(d) $\phi(G^0) = \phi(G)^0$.

Démonstration. — (a) est clair. D'autre part, $\operatorname{Im}\phi$ est un sous-groupe de G' et contient, d'après le corollaire 4.19, un ouvert dense de $\overline{\operatorname{Im}\phi}$. On a donc $\operatorname{Im}\phi = \overline{\operatorname{Im}\phi}$, d'après la proposition 4.23. Ceci prouve (b).

De plus, $\phi(G^0)$ est un sous-groupe fermé de $\phi(G)$, connexe et d'indice fini. Donc $\phi(G^0) = \phi(G)^0$, ce qui prouve (d).

Enfin, appliquons l'assertion a) du théorème 4.18 au morphisme $\phi : G^0 \to \phi(G^0)$. Chaque fibre étant un translaté de $\operatorname{Ker}\phi$, et donc de dimension $\dim\operatorname{Ker}\phi$, on obtient (c).

Remarque 4.25. — **Attention !** En caractéristique $p > 0$, un morphisme bijectif de groupes algébriques n'est pas nécessairement un isomorphisme. Par exemple, le morphisme surjectif $\mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n$ a pour noyau le sous-groupe $\{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\}$. Si $n = p$, ce sous-groupe égale $\{I_n\}$ et donc $\mathrm{SL}_p \to \mathrm{PGL}_p$ est un morphisme de groupes algébriques bijectif. Mais ce n'est pas un isomorphisme, car son comorphisme est l'inclusion (‡) de 1.2.9), qui est une inclusion stricte.

De plus, on peut montrer, en considérant leurs algèbres de Lie, que SL_p et PGL_p ne sont pas isomorphes commes groupes algébriques.

Un autre exemple, plus simple, est le suivant. Considérons le morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$, $x \mapsto x^p$. Alors ϕ est bijectif. Son comorphisme est le morphisme de k-algèbres $k[T] \to k[T]$, $T \mapsto T^p$; ce n'est pas un isomorphisme.

4.8. Action sur une variété, stabilisateurs et orbites.— Soient G un groupe algébrique et X une G-variété. Pour des sous-espaces Y, Z de X, on pose

$$\mathrm{Tran}_G(Y,Z) = \{g \in G \mid gY \subseteq Z\}, \quad \mathrm{Stab}_G(Y) = \mathrm{Tran}_G(Y,Y).$$

Si Y est un singleton $\{x\}$, on note $\mathrm{Stab}_G(\{x\}) = G_x$.

Lemme 4.26. — a) *Si Z est un fermé de X, alors* $\mathit{Tran}_G(Y,Z)$ *est un fermé de G. Par conséquent, pour tout $x \in X$, G_x est un sous-groupe fermé.*

b) *Si Y est localement fermé, alors* $\mathrm{Stab}_G(Y)$ *égale $\{g \in G \mid gY = Y\}$, et est un sous-groupe fermé.*

Démonstration. — Pour $x \in X$, notons μ_x l'application $g \mapsto gx$. C'est un morphisme de variétés.

a) Pour tout $y \in Y$, $\mathrm{Tran}_G(\{y\}, Z) = \mu_y^{-1}(Z)$ est un fermé de G. Il en est donc de même de $\mathrm{Tran}_G(Y,Z) = \bigcap_{y \in Y} \mathrm{Tran}_G(\{y\}, Z)$. L'assertion a) en découle.

b) Soit $g \in \mathrm{Stab}_G(Y)$. Notons d'abord que $g\overline{Y} \subseteq \overline{Y}$. Par conséquent, on a une suite décroissante de fermés $\overline{Y} \supseteq g\overline{Y} \supseteq g^2\overline{Y} \supseteq \cdots$. Cette suite étant stationnaire, on en déduit que $\overline{Y} = g\overline{Y}$. Donc $\overline{Y}$ est stable par g et g^{-1}. Comme Y est ouvert dans $\overline{Y}$, la suite $Y \subseteq g^{-1}Y \subseteq g^{-2}Y \subseteq \cdots$ est une suite croissante d'ouverts de $\overline{Y}$ et est donc stationnaire. On en déduit que $Y = g^{-1}Y$, d'où $gY = Y$. Ceci prouve que $\mathrm{Stab}_G(Y)$ est un sous-groupe. De plus, on déduit de ce qui précède que $\mathrm{Stab}_G(Y)$ égale

$$\left\{g \in G \mid g\overline{Y} = \overline{Y} \text{ et } g(\overline{Y} \setminus Y) = \overline{Y} \setminus Y\right\} = \mathrm{Stab}_G(\overline{Y}) \cap \mathrm{Stab}_G(\overline{Y} \setminus Y).$$

D'après le point a), on conclut que $\mathrm{Stab}_G(Y)$ est un sous-groupe fermé de G.

Théorème 4.27. — *Pour tout $x \in X$, l'orbite Gx est ouverte et dense dans $\overline{Gx}$. En particulier, Gx est une sous-variété localement fermée de X.*

Démonstration. — Gx est l'image du morphisme μ_x donc contient, d'après le corollaire 4.19, un ouvert dense U de $\overline{Gx}$. Mais alors Gx est la réunion des ouverts gU et est donc ouvert (et dense) dans $\overline{Gx}$.

Corollaire 4.28. — *Tout fermé G-stable $F \subseteq X$ contient au moins une orbite fermée.*

Démonstration. — L'ensemble des fermés non-vides et G-stables de F est non-vide (il contient F) donc admet au moins un élément minimal Z. Soit $z \in Z$. Par minimalité, on a $Z = \overline{Gz}$. Alors, d'après la proposition, $Z \setminus Gz$ est un fermé G-stable strictement contenu dans Z et est donc vide. Donc $Gz = Z$ est une orbite fermée.

Remarque 4.29. — **Attention !** En caractéristique $p > 0$, le fait que $G_x = \{1\}$ n'entraîne pas que $\mu_x : G \to Gx$ soit un isomorphisme, même si Gx est fermée ; voir la remarque 4.25.

TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Ho] G. P. Hochschild, Basic theory of algebriac groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Ja] J. C. Jantzen, Representation of algebraic groups, Academic Press, 1987, second edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[Laf] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Las] Y. Laszlo, Introduction à la géométrie algébrique, cours de Master 2, 2004-2005.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin Cummings publishing company, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.