CHAPITRE 2

ALGÈBRES DE LIE ET DIFFÉRENTIELLES

Version du 24 novembre 2005

Dans tout ce chapitre, le corps de base k est algébriquement clos, de caractéristique arbitraire. Sauf mention du contraire, « k-algèbre » signifie : k-algèbre commutative.

5. Espaces tangents et différentielles

5.1. Dérivations. —

Définition 5.1. — Soient A une k-algèbre et M un A-module. On pose

$$\mathrm{Der}_k(A, M) = \{D \in \mathrm{Hom}_k(A, M) \mid \forall a, b \in A, \quad D(ab) = aD(b) + bD(a)\};$$

c'est un sous-A-module de $\mathrm{Hom}_k(A, M)$ (l'action de $a \in A$ sur un morphisme $\phi : A \to M$ étant définie par $(a\phi)(b) = a\phi(b)$, pour tout $b \in A$). Notons que $D(1) = D(1\cdot 1) = D(1)+D(1)$, d'où $D(1) = 0$. On pose $\mathrm{Der}_k(A) = \mathrm{Der}_k(A, A)$.

Proposition 5.2. — 1. (Fonctorialité) *Soient $f : M \to M'$ un morphisme de A-modules, et $\varphi : B \to A$ un morphisme de k-algèbres. Alors on a un morphisme de B-modules* $\mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(B, M')$, $D \mapsto f \circ D \circ \varphi$.

2. (Localisation) *Soient S une partie multiplicative de A et N un $S^{-1}A$-module. Le morphisme $A \to S^{-1}A$ induit un isomorphisme* $\mathrm{Der}_k(S^{-1}A, N) \to \mathrm{Der}_k(A, N)$.

3. (Produits) *Soient A_1, A_2 deux k-algèbres, $A = A_1 \otimes A_2$, et M un A-module. Alors*

$$\mathrm{Der}_k(A, M) \cong \mathrm{Der}_k(A_1, M) \oplus \mathrm{Der}_k(A_2, M).$$

Démonstration. — 1. est immédiat et 2. laissé au lecteur. Voyons 3. Tout $D \in \mathrm{Der}_k(A, M)$ est déterminé par ses restrictions D_1 et D_2 à $A_1 \otimes k$ et $k \otimes A_2$, puisque $D(a \otimes b) = aD_2(b) + bD_1(a)$. Par conséquent, l'application naturelle $\sigma : \mathrm{Der}_k(A, M) \to \mathrm{Der}_k(A_1, M) \oplus \mathrm{Der}_k(A_2, M)$ est injective. C'est un isomorphisme, car étant donné $D_i \in \mathrm{Der}_k(A_i, M)$, l'application $D : a\otimes b \mapsto aD_2(b) + bD_1(a)$ est une dérivation $A \to M$ telle que $\sigma(D) = (D_1, D_2)$.

5.2. Espaces tangents. — Soient X une variété algébrique, $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local en un point $x \in X$, et $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal. On pose $k_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ et l'on note ε_x le morphisme d'algèbres $\mathcal{O}_{X,x} \to k_x$. C'est l'évaluation en x, c.-à-d., pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ on a : $\varepsilon_x(f) = f(x)$.

Définition 5.3. — On appelle « dérivations ponctuelles en x » les éléments de

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) = \{\delta \in \mathrm{Hom}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) \mid \delta(ab) = a(x)\delta(b) + b(x)\delta(a)\}.$$

Remarque 5.4. — Comme $\mathcal{O}_{X,x} = k1 \oplus \mathfrak{m}_x$, alors le dual $\mathfrak{m}_x^*$ de $\mathfrak{m}_x$ s'identifie au sous-espace des $f \in \mathcal{O}_{X_x}^*$ telles que $f(1) = 0$. Comme toute dérivation ponctuelle δ vérifie $\delta(1) = 0$, on a donc une inclusion

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) \subseteq \{f \in \mathcal{O}_{X,x}^* \mid f(1) = 0 = f(\mathfrak{m}_x^2)\} \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*.$$

De plus, cette inclusion est une égalité. En effet, pour tout $a, b \in \mathcal{O}_{X,x}$,

$$ab - a(x)b - b(x)a + a(x)b(x)1 = (a - a(x)1)(b - b(x)1)$$

appartient à $\mathfrak{m}_x^2$, donc si $f \in \mathcal{O}_{X_x}^*$ vérifie $f(1) = 0 = f(\mathfrak{m}_x^2)$, alors $f(ab) = a(x)f(b) + b(x)f(a)$.

***Définition et proposition 5.5* (Espaces tangents de Zariski)**

1) *On définit l'***espace tangent** *de Zariski à X en x par*

$$T_xX := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \cong \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x);$$

*l'***espace cotangent** *étant $T_x^*X := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.*

2) *De plus, pour tout ouvert affine U contenant x, on a*

$$T_xX \cong \mathrm{Der}_k(k[U], k_x) \cong (\mathfrak{m}_{U,x}/\mathfrak{m}_{U,x}^2)^*,$$

où $\mathfrak{m}_{U,x}$ désigne l'idéal maximal de $k[U]$ correspondant à x.

La définition donnée en 1) montre que l'espace tangent est défini de façon intrinsèque. Le point 2) résulte de 5.2.2. (voir aussi 5.19 plus loin) et montre que, pour calculer T_xX, on peut se placer dans le cas affine.

Définition 5.6. — Soient $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$. La **différentielle de** f au point x est l'application linéaire :

$$\mathrm{d}_xf : k^n \to k, \quad (\eta_1, \ldots, \eta_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\eta_i.$$

On peut donc voir $\mathrm{d}f$ comme une application polynomiale $k^n \times k^n \to k$,

$$(x,\eta) \mapsto \mathrm{d}_x f(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\eta_i.$$

Proposition 5.7. — *Soit V une sous-variété algébrique fermée de k^n, soit $I = I(V)$ son idéal, et soient $f_1,\dots,f_m$ des générateurs de I. Alors, pour tout $x \in V$, l'espace tangent T_xV est le sous-espace suivant de k^n :*

$$\bigcap_{\ell=1}^{m} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_x f_\ell = \{\eta \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}(x)\eta_i,\ \forall \ell = 1,\dots,n\}.$$

Sa dimension est $n - r(x)$, où $r(x)$ est le rang de la matrice jacobienne

$$J_x(f_1,\dots,f_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_\ell} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_\ell} \end{pmatrix}(x).$$

Par conséquent, il existe un ouvert non-vide U de V sur lequel cette dimension est **minimale**.

Si V est irréductible, de dimension d, alors $\dim_k T_xX = d$ pour tout $x \in U$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{m}_x = (X_1 - x_1,\dots,X_n - x_n)$ l'idéal de x dans $k[X_1,\dots,X_n]$ et soit $\overline{\mathfrak{m}}_x$ son image dans $k[V]$. D'une part, l'espace cotangent $T_x^*k^n = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ s'identifie à l'espace dual $(k^n)^*$, l'image de $X_i - x_i$ s'identifiant à l'élément ε_i^* de la base duale, qu'on désigne souvent par $\mathrm{d}x_i$ (ce n'est rien d'autre que la forme linéaire « i-ème coordonnée »).

D'autre part, $\overline{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_x/I$ et $\overline{\mathfrak{m}}_x^2 = (\mathfrak{m}_x^2 + I)/I$, et donc

$$T_x^*V = \overline{\mathfrak{m}}_x/\overline{\mathfrak{m}}_x^2 = \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x^2 + I)$$

est le quotient de $(k^n)^*$ par le sous-espace image de I, qui est le sous-espace vectoriel engendré par les images de $f_1,\dots,f_m$. D'après la formule de Taylor, pour tout $P \in k[X_1,\dots,X_n]$ on a

$$(*) \qquad P = P(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)(X_i - x_i) \mod \mathfrak{m}_x^2.$$

On en déduit que, pour $\ell = 1,\dots,m$, l'image de f_ℓ dans $(k^n)^*$ est la forme linéaire

$$\mathrm{d}_x f_\ell = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_\ell.$$

Par conséquent, l'espace dual T_xV s'identifie au sous-espace de k^n annulé par $\mathrm{d}_x f_1,\dots,\mathrm{d}_x f_m$. Ceci prouve la première assertion de la proposition, et la seconde en découle aussitôt.

Pour tout $d \geq 0$, l'ensemble $V(\leq d) = \{x \in V \mid r(x) \leq d\}$ est le lieu d'annulation de tous les mineurs d'ordre $d + 1$ de la matrice jacobienne J. Comme les coefficients de J sont des polynômes en x, il en est de même des mineurs, et donc $V(\leq d)$ est une sous-variété fermée. Par conséquent, le lieu des points $x \in V$ pour lesquels $r(x)$ est maximal, c.-à-d., $\dim T_x V$ **minimal**, est un ouvert non-vide de V.

Enfin, pour la dernière assertion, on renvoie à [**AM**, Chap.11] ou [**Eis**, Chap.16] ou [**Ku**, §VI.1].

Remarque 5.8. — Soient V une variété algébrique affine, $x \in V$, et $f \in k[V]$. Il résulte de $(*)$ ci-dessus que $\mathrm{d}_x f$ s'identifie à l'image de $f - f(x)$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^* V$. Par conséquent, pour tout $\xi \in T_x V$, on a

$$\xi(f) = \mathrm{d}_x f(\xi), \tag{$**$}$$

où, à gauche, ξ est vu comme élément de $\mathrm{Der}_k(k[V], k_x)$.

5.3. Différentielle d'un morphisme. —

Définition et proposition 5.9 **(Différentielle d'un morphisme en un point)**

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés. Alors, pour tout $x \in X$, f induit une application linéaire $\mathrm{d}_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$, **la différentielle de** f **en** x. *Elle est définie de l'une des façons suivantes.*

1) *Soient $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors f induit un morphisme $f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, qui envoie $\mathfrak{m}_y$ dans $\mathfrak{m}_x$, et donc $\mathfrak{m}_y^2$ dans $\mathfrak{m}_x^2$. Donc $f^\#$ induit un morphisme $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, qu'on notera encore $f^\#$, par abus de notation. Par définition, $\mathrm{d}_x f$ est le transposé de ce morphisme. On a donc $\mathrm{d}_x f(\delta) = \delta \circ f^\#$, pour tout $\delta \in (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.*

2) *Si on identifie $T_x X$ à $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$, et de même pour $T_y Y$, alors $\mathrm{d}_x f$ est définie par $\mathrm{d}_x f(\delta) = \delta \circ f^\#$, pour tout $\delta \in \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x)$.*

3) *Soient V un ouvert affine contenant y et U un ouvert affine de $f^{-1}(V)$ contenant x. Plongeant V (resp. U) dans un certain k^n (resp. k^m), on obtient que la restriction de f à U est donnée par un n-uplet $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $k[X_1, \ldots, X_m]$. Alors $\mathrm{d}_x f$ est la restriction à $T_x U \subseteq k^m$ de l'application linéaire $k^m \to k^n$ dont la i-ème composante est $\mathrm{d}_x f_i$, c.-à-d., dont la matrice est*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Démonstration. — Il est clair que les définitions 1) et 2) coïncident ; elles montrent que $\mathrm{d}_x f$ est défini de façon intrinsèque. Le calcul de 3) ne présente pas de difficultés et est laissé au lecteur.

Lemme 5.10. — *Soient X une variété algébrique affine et $f \in k[X]$. Alors f est un morphisme $X \to k$ et, pour tout $x \in X$, la différentielle $\mathrm{d}_x f$ au sens de la définition précédente s'identifie à l'image dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ de $f - f(x)$, et donc, d'après la remarque* 5.8*, à la différentielle de la fonction f, définie dans* 5.6.

Démonstration. — Il vaut mieux se convaincre que c'est évident, ou qu'il ne peut en être autrement, plutôt que d'écrire une démonstration, qui est nécessairement formelle et peu éclairante. Enfin, en voici une.

Il est clair que f est un morphisme. Son comorphisme est le morphisme d'algèbres $f^\# : k[T] \to k[X]$ (où T est une indéterminée) défini par $f^\#(T) = f$. Soient $x \in X$ et $y = f(x) \in k$. Le point est que l'image de $T - y$ est le générateur naturel de l'espace cotangent

$$T_y^* k = (T - y)/(T - y)^2,$$

et donc on identifie $T_y k \cong k$ via $\eta \mapsto \eta(T - y)$. En particulier, pour tout $\xi \in T_x X$, $\mathrm{d}_x f(\xi)$ est par définition le vecteur tangent $\xi \circ f^\# \in T_y k$; il s'identifie donc au scalaire

$$(\xi \circ f^\#)(T - y) = \langle \xi, f - f(x) \rangle.$$

Ceci montre que $\mathrm{d}_x f$ s'identifie à l'image de $f - f(x)$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^* X$. (Ouf...)

Il est clair, d'après la définition, que $\mathrm{d}_x \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{T_x X}$. De plus, on a la

Proposition 5.11 (Fonctorialité). — *Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de variétés algébriques. Pour tout $x \in X$ on a $\mathrm{d}_x(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(x)} g \circ \mathrm{d}_x f$.*

Démonstration. — Soient $x \in X$ et $y = f(x)$, $z = g(y)$. Alors $(g \circ f)^\# : \mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est la composée de $g^\# : \mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ et de $f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, et la proposition en résulte aussitôt, en utilisant l'une des définitions 1) ou 2).

Proposition 5.12. — *Soient X, Y, Z des variétés algébriques, $\phi : X \times Y \to Z$ un morphisme de variétés, et $x \in X$, $y \in Y$. Alors*

$$T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y.$$

De plus, si l'on fait cette identification, alors

$$\mathrm{d}_{(x,y)} \phi = \mathrm{d}_x \phi_y + \mathrm{d}_y \phi_x,$$

où $\phi_y : X \to Z$ et $\phi_x : Y \to Z$ sont les morphismes définis par $\phi_y(a) = \phi(a, y)$, $\phi_x(b) = \phi(x, b)$, pour $a \in X$, $b \in Y$.

Démonstration. — L'isomorphisme $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_xX \oplus T_yY$ résulte de la proposition 5.2.

Soit $(u,v) \in T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_xX \oplus T_yY$. Alors,

$$\mathrm{d}_{(x,y)}\phi(u,v) = \mathrm{d}_{(x,y)}\phi(u,0) + \mathrm{d}_{(x,y)}\phi(0,v).$$

Or, avec des notations évidentes, on a $\phi_y = \phi \circ \tau_y$, et $\mathrm{d}_x\tau_y(u) = (u,0)$ pour tout $u \in T_xX$. On en déduit que $\mathrm{d}_{(x,y)}\phi(u,0) = \mathrm{d}_x\phi_y(u)$ et, de même, $\mathrm{d}_{(x,y)}\phi(0,v) = \mathrm{d}_y\phi_x(v)$. Le résultat en découle.

À titre d'application, signalons le corollaire suivant. Soit G un groupe algébrique. Soient $\mu : G \times G \to G$ la multiplication, et $\iota : G \to G$ le passage à l'inverse. Désignons simplement par $\mathrm{d}\mu$, resp. $\mathrm{d}\iota$, leur différentielles au point (e,e), resp. e.

Corollaire 5.13. — *On a* $\mathrm{d}\mu(X,Y) = X + Y$ *et* $\mathrm{d}\iota(X) = -X$, *pour* $X, Y \in T_e(G)$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 5.12, car $\mu(e,\cdot) = \mathrm{id}_G = \mu(\cdot,e)$. D'autre part, $\mu \circ (\mathrm{id},\iota)$ est l'application constante $G \to \{e\}$. On en déduit que $0 = \mathrm{id}_{T_e(G)} + \mathrm{d}\iota$, d'où la seconde assertion.

5.4. Différentielle d'une immersion. — Soient $f : X \to Y$ un morphisme et $x \in X$. Il résulte des définitions que, si V est un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y, et si on note φ la restriction de f à $f^{-1}(V)$, alors $\mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_xf$. En particulier, si f est une immersion ouverte (c.-à-d., un isomorphisme de X sur un ouvert de Y), alors d_xf est un isomorphisme, pour tout $x \in X$.

D'autre part, on a vu que si X est une sous-variété fermée de k^n, alors chaque T_xX s'identifie à un sous-espace de k^n. Ceci se généralise comme suit au cas d'une immersion fermée quelconque.

Proposition 5.14. — *Si* $f : Y \to X$ *est une immersion fermée alors* d_yf *est injective, pour tout* $y \in Y$. *Par conséquent, si* Y *est une sous-variété fermée de* X *alors, pour tout* $y \in Y$, T_yY *s'identifie à un sous-espace de* T_yX.

Démonstration. — On peut supposer X et Y affines. Alors, on a $k[Y] \cong k[X]/I$. Pour $y \in Y$, notons $\mathfrak{m}_y$ et $\overline{\mathfrak{m}}_y$ les idéaux correspondants de $k[X]$ et $k[Y]$. Alors $\overline{\mathfrak{m}}_y = \mathfrak{m}_y/I$ et $\overline{\mathfrak{m}}_y^2 = (\mathfrak{m}_y^2 + I)/I$, et donc $\overline{\mathfrak{m}}_y/\overline{\mathfrak{m}}_y^2 = \mathfrak{m}_y/(\mathfrak{m}_y^2 + I)$ est un quotient de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$. La proposition en résulte.

5.5. Distributions à support dans un point. — Soient X une variété algébrique, $x \in X$, et $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Notons $\mathcal{O}_{X,x}^*$ l'espace vectoriel dual. Comme $\mathcal{O}_{X,x} = k1 \oplus \mathfrak{m}_x$, alors l'espace dual $\mathfrak{m}_x^*$ s'identifie au sous-espace des $\phi \in \mathcal{O}_{X,x}^*$ vérifiant $\phi(1) = 0$.

Définition 5.15. — Pour $n \geq 0$, on introduit les espaces vectoriels

$$\mathrm{Dist}_n(X,x) := \{\phi \in \mathcal{O}_{X,x}^* \mid \phi(\mathfrak{m}_x^{n+1}) = 0\} \cong (\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1})^*,$$

$$\mathrm{Dist}_n^+(X,x) := \{\phi \in \mathrm{Dist}_n(X,x) \mid \phi(1) = 0\} \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{n+1})^*,$$

et on pose

$$\mathrm{Dist}(X,x) := \bigcup_n \mathrm{Dist}_n(X,x), \quad \text{et} \quad \mathrm{Dist}^+(X,x) := \bigcup_n \mathrm{Dist}_n^+(X,x).$$

***Définition 5.16* (Différentielle d'un morphisme)**. — Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés, $y = f(x)$ et φ le comorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$, d'où $\varphi(\mathfrak{m}_y^n) \subseteq \mathfrak{m}_x^n$ pour tout n. On en déduit que la transposée ${}^t\varphi$ applique $\mathrm{Dist}_n(X,x)$ dans $\mathrm{Dist}_n(Y,y)$, et $\mathrm{Dist}_n^+(X,x)$ dans $\mathrm{Dist}_n^+(Y,y)$.

Pour $n = 1$, $\mathrm{Dist}_1^+(X,x) \cong T_xX$ et ${}^t\varphi$ n'est autre que la différentielle d_xf. Donc, on peut se permettre de noter d_xf l'application ${}^t\varphi : \mathrm{Dist}(X,x) \to \mathrm{Dist}(Y,y)$.

Alors on obtient facilement la proposition suivante, qui généralise la Proposition 5.11.

Proposition 5.17. — *Soient* $X \xrightarrow{f} Y$ *et* $Y \xrightarrow{g} Z$ *des morphismes de variétés,* $x \in X$*,* $y = f(x)$*, et* $\mathrm{d}_xf : \mathrm{Dist}(X,x) \to \mathrm{Dist}(Y,y)$, $\mathrm{d}_yg : \mathrm{Dist}(Y,y) \to \mathrm{Dist}(Z,z)$. *Alors* $\mathrm{d}_x(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(x)}g \circ \mathrm{d}_xf$.

Remarque 5.18. — Soit U un quelconque ouvert affine de X contenant le point X, et soient $A = k[U]$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal de x dans A. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$(*) \qquad A/\mathfrak{m}^n \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^n,$$

et donc $\mathrm{Dist}(U,x) = \mathrm{Dist}(X,x)$ et $T_xU = T_xX$. En effet, $\mathcal{O}_{X,x}$ est le localisé de A en la partie multiplicative $S = A \setminus \mathfrak{m}$, et donc $(*)$ résulte du lemme ci-dessous.

Lemme 5.19. — a) *Soient A un anneau, I un idéal et S une partie multiplicative de A. On note $B = A/I$ et $\overline{S}$ l'image de S dans B. Alors* $\overline{S}^{-1}B \cong S^{-1}A/S^{-1}I$.

b) *Soient* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de A, et $S = A \setminus \mathfrak{m}$. Si* $\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$*, pour un* $n \geq 1$*, alors* $A/I \cong S^{-1}A/S^{-1}I$.

Démonstration. — Pour a) voir, par exemple, [**AM**, Prop.3.5 et Ex.3.4]. Voyons b). D'abord, B est un anneau local, d'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$. En effet, comme $\overline{\mathfrak{m}}^{\,n} = 0$, tout idéal premier de B contient $\overline{\mathfrak{m}}$, d'où l'assertion puisque $\overline{\mathfrak{m}}$ est maximal. Par conséquent, tout élément t de $T := B \setminus \overline{\mathfrak{m}}$ est inversible, car $Bt = B$ puisque $Bt \not\subseteq \overline{\mathfrak{m}}$. D'autre part, puisque $I \subseteq \mathfrak{m}$, alors $\overline{S} = T$. Il en résulte que $\overline{S}^{-1}B = B$, d'où l'assertion b).

6. Algèbre de Lie d'un groupe algébrique

6.1. Algèbres de Lie. — Une k-algèbre de Lie est un k-espace vectoriel L muni d'une application bilinéaire alternée $L \times L \to L$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ vérifiant l'identité de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \quad \forall x, y, z \in L.$$

Ceci équivaut à : $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$. En d'autres termes, pour tout $x \in L$, l'application $D_x : y \mapsto [x, y]$ vérifie : $D_x([y, z]) = [D_x(y), z] + [y, D_x(z)]$, i.e. c'est une *dérivation* de L.

Exemples 6.1. — . Soit A une algèbre associative.

1) Le crochet $[a, b] := ab - ba$ munit A d'une structure d'algèbre de Lie.

2) On pose $\mathrm{Der}_k(A) = \{D \in \mathrm{End}_k(A) \mid D(ab) = aD(b) + D(a)b\}$. C'est une algèbre de Lie pour le crochet $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$. En effet, posons $D = D_1 D_2 - D_2 D_1$. Pour $a, b \in A$ on a $D(ab) = aD(b) + D(a)b$, car :

$$D_1 D_2(ab) = D_1(a)D_2(b) + aD_1 D_2(b) + D_1 D_2(a)b + D_2(a)D_1(b),$$

$$D_2 D_1(ab) = D_2(a)D_1(b) + aD_2 D_1(b) + D_2 D_1(a)b + D_1(a)D_2(b).$$

Définition 6.2. — Soit L une k-algèbre de Lie. Une **représentation** de L, ou L-**module**, est un k-espace vectoriel L muni d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : L \to \mathrm{End}_k(V)$ (c.-à-d., $\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$, pour $x, y \in L$).

6.2. Dérivations invariantes. — Soit G un groupe algébrique affine. On peut définir son algèbre de Lie de plusieurs manières. Commençons par la définition en termes de dérivations invariantes. On note $\varepsilon : \mathcal{O}_{G,e} \to k$, $\phi \mapsto \phi(e)$.

L'action de G sur lui-même par translation à gauche induit une action de G par automorphismes d'algèbres dans $k[G]$: $(\lambda(g)\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$. Alors G opère par automorphismes d'algèbres dans $\mathrm{End}_k(k[G])$ par $g{\cdot}D = \lambda(g) \circ D \circ \lambda(g^{-1})$, et cette action laisse stable $\mathrm{Der}_k(k[G])$. Il en résulte que les dérivations invariantes :

$$\mathrm{Der}_k(k[G])^{\lambda(G)} = \{D \in \mathrm{Der}_k(k[G]) \mid \lambda(g) \circ D \circ \lambda(g^{-1}) = D, \quad \forall g \in G\},$$

forment une sous-algèbre de Lie. On la note $L(G)$.

Proposition 6.3. — *L'application $D \mapsto \varepsilon \circ D$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $L(G) \xrightarrow{\sim} T_e G$.*

Démonstration. — Si $D \in \mathrm{Der}_k(k[G])$ alors $\varepsilon \circ D \in \mathrm{Der}_k(k[G], k_e) = T_e G$, donc l'application est bien définie. De plus, si $D \in L(G)$ alors

$$\forall \varphi \in k[G],\ g \in G, \quad (D\varphi)(g^{-1}) = (g{\cdot}D)(\lambda(g)\varphi)(e) = (\varepsilon \circ D)(\lambda(g)\varphi).$$

Par conséquent, l'application est injective. Montrons qu'elle est surjective. On a $T_eG \cong \mathrm{Der}_k(k[G], k_e)$. Pour $\delta \in \mathrm{Der}_k(k[G], k_e)$, définissons D_δ par

$$D_\delta = (\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta : k[G] \to k[G];$$

c.-à-d., si $\Delta(\phi) = \sum_i \eta_i \otimes \xi_i$, alors $D_\delta \phi = \sum_i \eta_i \delta(\xi_i)$. On vérifie facilement que D_δ est une dérivation. Pour montrer que $g \cdot D_\delta = D_\delta$, pour tout $g \in G$, le plus simple est sans doute d'écrire que, pour tout $\phi \in k[G]$,

$$D_\delta(\phi)(h) = \sum_i \eta_i(h)\delta(\xi_i) = \delta(\lambda(h^{-1})\phi),$$

et donc

$$(g \cdot D_\delta)(\phi) = \lambda(g)(D_\delta(\lambda(g^{-1})\phi))$$

est la fonction qui envoie tout $h \in G$ sur

$$D_\delta(\lambda(g^{-1})\varphi)(g^{-1}h) = \delta(\lambda(h^{-1}g)\lambda(g^{-1})\varphi) = \delta(\lambda(h^{-1})\varphi) = D_\delta(\varphi)(h).$$

Ceci montre que $g \cdot D_\delta = D_\delta$, et donc $D_\delta \in L(G)$. Enfin, il est clair que $\varepsilon \circ D_\delta = \delta$. Ceci démontre la proposition.

Remarque 6.4. — On peut aussi montrer que $g \cdot D_\delta = D_\delta$ en écrivant que $\lambda(g^{-1}) = (\varepsilon_g \otimes \mathrm{id})\Delta$, d'où

$$\lambda(g^{-1}) \circ D_\delta \circ \lambda(g) = (\varepsilon_g \otimes \varepsilon_{g^{-1}} \otimes \mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\Delta^2 \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta, \qquad (\dagger)$$

où l'on a noté $\Delta^2 = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$. Comme

$$(\varepsilon_g \otimes \varepsilon_{g^{-1}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^2 = \mathrm{id},$$

le terme de droite de (†) égale $(\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta = D_\delta$, ce qui prouve que $g \cdot D_\delta = D_\delta$.

Définition 6.5. — On munit T_eG de la structure d'algèbre de Lie déduite de l'isomorphisme $L(G) \xrightarrow{\sim} T_eG$, $D \mapsto \varepsilon \circ D$.

6.3. Algèbres enveloppantes. —

Définition 6.6. — Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. Son **algèbre enveloppante** est l'algèbre $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y],\ x, y \in \mathfrak{g}\rangle$.

Elle vérifie la propriété universelle suivante. On note τ l'application naturelle $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$.

Proposition 6.7. — *Soient A une algèbre associative (unitaire), et $\varphi : \mathfrak{g} \to A$ un morphisme d'algèbres de Lie. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\phi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $\phi \circ \tau = \varphi$. Par conséquent, on a une équivalence de catégories*

$$\{\textit{représentations de } \mathfrak{g}\} \cong \{U(\mathfrak{g})\textit{-modules}\}.$$

Pour simplifier, on suppose $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur k. On admet le théorème suivant (voir [**Dix**, Th. 2.1.11]).

***Théorème 6.8* (Poincaré-Birkhoff-Witt)**. —
Pour toute base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, les monômes ordonnés*

$$X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}, \qquad (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n,$$

forment une base de $U(\mathfrak{g})$*. En particulier, l'application* $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ *est injective.*

6.4. L'algèbre des distributions à l'origine. — Soient G un groupe algébrique affine, $k[G]$ son algèbre des fonctions, $\mathfrak{m}_e = \operatorname{Ker} \varepsilon$ l'idéal d'augmentation. On pose

$$\operatorname{Dist}(G) = \bigcup_{n \geq 0} \operatorname{Dist}_n(G) \quad \text{et} \quad \operatorname{Dist}^+(G) = \bigcup_{n \geq 0} \operatorname{Dist}_n^+(G),$$

où $\operatorname{Dist}_n(G) = \{\eta \in k[G]^* \mid \eta(\mathfrak{m}_e^{n+1}) = 0\}$ et $\operatorname{Dist}_n^+(G) = \{\eta \in \operatorname{Dist}_n(G) \mid \eta(1) = 0\}$.

On va voir que la structure d'algèbre de Hopf de $k[G]$ permet de munir $\operatorname{Dist}(G)$ d'une structure d'algèbre associative. Notons $\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G]$ la comultiplication. Comme $k[G] = k1 \oplus \mathfrak{m}_e$, alors

$$\begin{aligned} k[G] \otimes k[G] &= k1 \otimes 1 \oplus k1 \otimes \mathfrak{m}_e \oplus \mathfrak{m}_e \otimes k1 \oplus \mathfrak{m}_e \otimes \mathfrak{m}_e \\ &= k1 \otimes 1 \bigoplus (\mathfrak{m}_e \otimes k[G] + k[G] \otimes \mathfrak{m}_e). \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta$, alors $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\Delta(\phi) = \phi(e)$, pour tout $\phi \in k[G]$. Par conséquent,

$$\forall \phi \in \mathfrak{m}_e, \qquad \Delta(\phi) \in \mathfrak{m}_e \otimes k[G] + k[G] \otimes \mathfrak{m}_e.$$

Comme Δ est un morphisme d'algèbres, on obtient que

$$\Delta(\mathfrak{m}_e^2) \subseteq \mathfrak{m}_e^2 \otimes k[G] + \mathfrak{m}_e \otimes \mathfrak{m}_e + k[G] \otimes \mathfrak{m}_e^2,$$

et l'on montre par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\Delta(\mathfrak{m}_e^n) \subseteq \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} \mathfrak{m}_e^i \otimes \mathfrak{m}_e^j.$$

Par conséquent, Δ induit, pour tout $r, s \in \mathbb{N}$, un morphisme d'algèbres

$$\Delta_{r,s} : k[G]/\mathfrak{m}_e^{r+s+1} \to k[G]/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes k[G]/\mathfrak{m}_e^{s+1}.$$

Alors, pour tout $\eta \in \operatorname{Dist}_r(G)$, $\xi \in \operatorname{Dist}_s(G)$, on définit le produit $\eta\xi \in \operatorname{Dist}_{r+s}(G)$ par :

$$\eta\xi := (\eta \otimes \xi)\Delta_{r,s}.$$

Ceci ne dépend pas de r et s, car pour $t \geq r$, $u \geq s$, on le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k[G]/\mathfrak{m}_e^{t+u+1} & \xrightarrow{\Delta_{t,u}} & k[G]/\mathfrak{m}_e^{t+1} \otimes k[G]/\mathfrak{m}_e^{u+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[G]/\mathfrak{m}_e^{r+s+1} & \xrightarrow{\Delta_{r,s}} & k[G]/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes k[G]/\mathfrak{m}_e^{s+1}. \end{array}$$

De plus, en utilisant la co-associativité de Δ, on vérifie sans difficulté que le produit ainsi défini est associatif. Enfin, $\mathrm{Dist}_0(G) = k\varepsilon$, et les égalités

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta$$

entraînent que ε est l'élément unité pour la multiplication ainsi définie sur $\mathrm{Dist}(G)$. On a ainsi obtenu le

Théorème 6.9. — $\mathrm{Dist}(G) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Dist}_n(G)$ *est une algèbre associative filtrée, c.-à-d., telle que* $\mathrm{Dist}_r(G)\,\mathrm{Dist}_s(G) \subseteq \mathrm{Dist}_{r+s}(G)$*, pour tout* $r, s \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, comme toute k-algèbre associative, $\mathrm{Dist}(G)$ est munie de la structure d'algèbre de Lie définie par $[\eta, \xi] = \eta\xi - \xi\eta$, et il est clair que $\mathrm{Dist}^+(G)$ est une sous-algèbre de Lie.

Théorème 6.10. — $\mathrm{Dist}_1^+(G)$ *est stable pour le crochet* $[X, Y] = XY - YX$*, et est donc muni d'une structure d'algèbre de Lie.*

Démonstration. — Soient $\eta, \xi \in \mathrm{Dist}_1^+(G)$. Alors $\eta\xi$ et $\xi\eta$ appartiennent tous deux à $\mathrm{Dist}_2^+(G)$, et il s'agit de montrer que leur différence est nulle sur $\mathfrak{m}_e^2$.

Soient $\phi, \psi \in \mathfrak{m}_e$. On utilisant la décomposition (1) et les égalités $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta$, on obtient que

$$\Delta(\phi) - \phi \otimes 1 - 1 \otimes \phi \in \mathfrak{m}_e \otimes \mathfrak{m}_e,$$

et de même pour ψ. Comme

$$(\eta\xi)(\phi\psi) = (\eta \otimes \xi)\Delta(\phi\psi) = (\eta \otimes \xi)(\Delta(\phi)\Delta(\psi)),$$

et comme $\eta(\mathfrak{m}_e^2) = 0 = \xi(\mathfrak{m}_e^2)$, on en déduit que

$$(\eta\xi)(\phi\psi) = \eta(\phi)\xi(\psi) + \xi(\phi)\eta(\psi).$$

Ceci est symétrique en η et ξ, et égale donc $(\xi\eta)(\phi\psi)$. Il en résulte que $[\xi, \eta]$ est nul sur $\mathfrak{m}^2$, donc appartient à $\mathrm{Dist}_1^+(G)$. Le théorème est démontré.

6.5. Équivalence des deux constructions. —

Définition et proposition 6.11. — *L'application* $\mathrm{Dist}_1^+(G) \to L(G)$, $\delta \mapsto D_\delta$, *est un isomorphisme d'algèbres de Lie. On notera* $\mathrm{Lie}(G)$ *cette algèbre de Lie.*

Démonstration. — On sait déjà que $\delta \mapsto D_\delta$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, dont l'inverse est $D \mapsto \varepsilon \circ D$. Soient $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist}_1^+(G)$. Il faut voir que $D_{\gamma\delta-\delta\gamma} = D_\gamma D_\delta - D_\delta D_\gamma$. Pour cela, il suffit de voir que $\gamma\delta - \delta\gamma = \varepsilon \circ (D_\gamma D_\delta - D_\delta D_\gamma)$.

On a vu en 6.2 que $D_\delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\varepsilon \circ D_\gamma \circ D_\delta &= (\varepsilon \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1)(1 \otimes \delta)\Delta \\ &= (1 \otimes \gamma \otimes \delta)(\varepsilon \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta = (\gamma \otimes \delta)\Delta = \gamma\delta.\end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition.

Corollaire 6.12. — *On a un morphisme naturel* $U(\mathrm{Lie}(G)) \to \mathrm{Dist}(G)$ *; son image est la sous-algèbre de* $\mathrm{Dist}(G)$ *engendrée par* $\mathrm{Dist}_1^+(G)$.

Exemple 6.13. — Considérons $G = \mathbb{G}_a$. On a $k[G] = k[T]$. Pour $i \geq 0$, soit γ_i l'élément de $\mathrm{Dist}_i(G)$ défini par $\gamma_i(T^j) = \delta_{i,j}$. Alors les γ_i, $i \geq 0$, forment une base de $\mathrm{Dist}(G)$ et l'on a

$$\gamma_i\, \gamma_j = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}, \quad \forall i, j \geq 0.$$

On a $U(\mathrm{Lie}(G)) \cong k[\gamma_1]$, et l'application naturelle $k[\gamma_1] \to \mathrm{Dist}(G)$ envoie γ_1^n sur $n!\,\gamma_n$. C'est donc un isomorphisme si $\mathrm{car}(k) = 0$; si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ son image est la sous-algèbre de dimension p ayant pour base $\{\gamma_i, 0 \leq i < p\}$.

6.6. Fonctorialité. —

Proposition 6.14. — *Soit* $\phi : G \to H$ *un morphisme de groupes algébriques. Alors* $\mathrm{d}\phi : \mathrm{Dist}(G) \to \mathrm{Dist}(H)$ *est un morphisme d'algèbres. En particulier, il induit un morphisme d'algèbres de Lie* $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$.

Démonstration. — $\mathrm{d}\phi$ est donné par $\delta \mapsto \delta \circ \phi^*$, pour $\delta \in \mathrm{Dist}(G)$. Comme $\phi \circ m_G = m_H \circ \phi$, alors $\Delta_G \circ \phi^* = \phi^* \circ \Delta_H$. Donc, pour $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist}(G)$, on a

$$\mathrm{d}\phi(\gamma)\cdot\mathrm{d}\phi(\delta) = (\gamma \circ \phi^* \otimes \delta \circ \phi^*) \circ \Delta_H = (\gamma \otimes \delta) \circ \Delta_G \circ \phi^* = \gamma\delta \circ \phi^* = \mathrm{d}\phi(\gamma\delta).$$

La proposition est démontrée.

Corollaire 6.15. — *Si* G *est un sous-groupe fermé de* H, *alors* $\mathrm{Lie}(G)$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{Lie}(H)$.

Démonstration. — On combine la proposition précédente et la proposition 5.14.

Proposition 6.16. — *On a* $\mathrm{Dist}(G) = \mathrm{Dist}(G^0)$ *et* $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^0)$ *; c.-à-d.,* $\mathrm{Dist}(G)$ *et* $\mathrm{Lie}(G)$ *ne dépendent que de* G^0.

Démonstration. — D'après la proposition 6.14 et la remarque 5.18, $\mathrm{Dist}(G^0) \to \mathrm{Dist}(G)$ est un morphisme d'algèbres bijectif.

6.7. Exemple de GL_n et SL_n. — Soit $n \geq 1$. On rappelle que $\mathrm{SL}_n(k) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \mathrm{d\acute{e}t}(g) = 1\}$. On note $\mathfrak{gl}_n$ l'algèbre de Lie $M_n(k)$, munie du crochet $[X, Y] = XY - YX$, et $\mathfrak{sl}_n$ la sous-algèbre de Lie des matrices de trace nulle. Pour tout i, j, on désigne par E_{ij} la matrice élémentaire correspondante.

Proposition 6.17. — *On a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(k)) \cong \mathfrak{gl}_n$.

Démonstration. — Posons $G = \mathrm{GL}_n(k)$ et soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_e$ l'idéal maximal de e dans $k[G]$. On note C_{ij} les coefficients matriciels. Comme $k[G] = k[M_n(k)]_D$, où D est le déterminant, les images des C_{ij}, pour $j \neq i$, et des $C_{ii} - 1$ engendrent $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. On en déduit que T_eG admet pour base les dérivations ponctuelles $e_{ij} : k[G] \to k_e$ définies par $e_{ij}(C_{rs}) = \delta_{i,r}\delta_{j,s}$. Vérifions que l'application $e_{ij} \mapsto E_{ij}$ est un (iso)morphisme d'algèbres de Lie.

Pour tout i, j, i', j', on a

$$\begin{aligned}
[e_{ij}, e_{i'j'}]C_{rs} &= (e_{ij} \otimes e_{i'j'} - e_{i'j'} \otimes e_{ij})\Delta(C_{rs}) \\
&= \textstyle\sum_t (e_{ij}C_{rt} \otimes e_{i'j'}C_{ts} - e_{i'j'}C_{rt} \otimes e_{ij}C_{ts}) \\
&= \delta_{j,i'}\delta_{i,r}\delta_{j',s} - \delta_{j',i}\delta_{i',r}\delta_{j,s} \\
&= (\delta_{j,i'}e_{ij'} - \delta_{j',i}e_{i'j})C_{rs}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{j,i'}e_{ij'} - \delta_{j',i}e_{i'j}$. La proposition est démontrée.

Pour traiter le cas de SL_n, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 6.18. — *Soient G un groupe algébrique affine, H un sous-groupe fermé, et $f_1, \ldots, f_r$ des générateurs de l'idéal de H dans $k[G]$. Alors* $\mathrm{Lie}(H) = \{X \in \mathrm{Lie}(G) \mid \mathrm{d}f_1(X) = 0 = \cdots = \mathrm{d}f_r(X)\}$.

Démonstration. — Si on note $\mathfrak{m}_G$, resp. $\mathfrak{m}_H$, l'idéal de e dans $k[G]$, resp. $k[H]$, alors $\mathfrak{m}_H/\mathfrak{m}_H^2$ est le quotient de $\mathfrak{m}_G/\mathfrak{m}_G^2$ par le sous-espace engendré par les $\mathrm{d}f_i$. L'assertion en découle.

Proposition 6.19. — *Pour tout $X \in \mathfrak{gl}_n$, on a $X(\mathit{d\acute{e}t}) = \mathrm{Tr}(X)$. Par conséquent,* $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n(k)) \cong \mathfrak{sl}_n$.

Démonstration. — On vérifie sans difficulté que $\mathrm{d}_e\mathrm{d\acute{e}t} = \mathrm{Tr}$. Par conséquent, d'après la remarque 5.8, $X(\mathrm{d\acute{e}t}) = \mathrm{Tr}(X)$, pour tout $X \in \mathfrak{gl}_n$. La proposition découle alors du lemme précédent.

6.8. Action dérivée de $\mathrm{Dist}(G)$ sur une représentation de G. —

Proposition 6.20. — *Soient G un groupe algébrique affine et V un $k[G]$-comodule.*

a) *V est naturellement muni d'une structure de $\mathrm{Dist}(G)$-module, définie par $\delta v = (1 \otimes \delta)\Delta_V(v)$, pour $v \in V$, $\delta \in \mathrm{Dist}(G)$. En particulier, V est un $\mathrm{Lie}(G)$-module.*

b) *Si $\dim_k(V) < \infty$, l'application $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{End}(V) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V))$ ainsi obtenue est la différentielle du morphisme $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

Démonstration. — a) Soient $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist}(G)$ et $v \in V$. Alors $\varepsilon v = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_V(v) = v$, et

$$\begin{aligned}\gamma(\delta v) &= (1 \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta_V \otimes 1)(1 \otimes \delta)\Delta_V(v)\\ &= (1 \otimes \gamma \otimes \delta)(1 \otimes \Delta)\Delta_V(v)\\ &= (1 \otimes \gamma\delta)\Delta_V(v) = (\gamma\delta)v.\end{aligned}$$

Ceci prouve que V est un $\mathrm{Dist}(G)$-module.

Démontrons b). Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V et soient C_{ij} les coefficients matriciels associés ; ce sont par définition des formes linéaires sur $M_n(k)$. On désignera par C'_{ij} leur restriction à l'ouvert $\mathrm{GL}_n(k) \subset M_n(k)$; alors on a $\mathrm{d}_e C'_{ij} = C_{ij}$, et donc, d'après la remarque 5.8,

$$X(C'_{ij}) = \mathrm{d}_e C'_{ij}(X) = C_{ij}(X) = X_{ij},$$

pour tout $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) = M_n(k)$.

D'autre part, d'après la preuve du corollaire 2.11 (et le lemme 2.10), la structure de $k[G]$-comodule sur V est donnée, pour $j = 1, \dots, n$, par

$$\Delta_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \phi^{\#}(C'_{ij}),$$

où $\phi^{\#} : k[\mathrm{GL}(V)] \to k[G]$ est le comorphisme de ϕ.

Enfin, pour tout $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$, on a $\xi \circ \phi^{\#} = \mathrm{d}_e\phi(\xi)$. Par conséquent, on a, pour $j = 1, \dots, n$, et $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$:

$$\xi v_j = (\mathrm{id} \otimes \xi)\Delta_V(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_e\phi(\xi)(C'_{ij})v_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_e\phi(\xi)_{ij} v_i = \mathrm{d}_e\phi(\xi)v_j.$$

Ceci prouve b). La proposition est démontrée.

Soit X une variété algébrique affine sur laquelle G agit **à droite**, c.-à-d., on se donne un morphisme $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto xg$, tel que $xe = x$ et $x(gh) = (xg)h$, pour tout $x \in X$ et $g, h \in G$. Alors son comorphisme

$$\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$$

fait de $k[X]$ un G-comodule (à droite) au sens de notre définition 2.2, c.-à-d., $k[X]$ est un G-module (rationnel) **à gauche** pour l'action définie par $(g\phi)(x) = \phi(xg)$, pour tout $g \in G$, $\phi \in k[X]$, $x \in X$.

D'après la proposition précédente, $k[X]$ est un $\mathrm{Dist}(G)$-module à gauche. De plus, on a la proposition suivante.

Proposition 6.21. — 1) $\mathrm{Lie}(G)$ *agit sur* $k[X]$ *par dérivations.*

2) *Pour* $\phi \in k[X]$ *et* $x \in X$, *soit* $\phi_x = (\varepsilon_x \otimes \mathrm{id})\Delta \in k[G]$ *; c'est la fonction* $g \mapsto \phi(gx)$. *Alors, pour tout* $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$, *on a* $(\xi \cdot \phi)(x) = \mathrm{d}_e\phi_x(\xi)$.

3) *En particulier, si* $X = G$, *où* G *agit par translations à droite, alors l'action dérivée de* $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$ *sur* $k[G]$ *coïncide avec l'action de la dérivation* D_ξ, *invariante par translations à gauche, définie en* 6.3.

Démonstration. — Soit $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$ et soient $\alpha, \beta \in k[X]$. Posons

$$\Delta_X(\alpha) = \sum_i a_i \otimes \phi_i, \qquad \Delta_X(\beta) = \sum_j b_j \otimes \psi_j.$$

Alors $\xi(\alpha\beta) = (\mathrm{id} \otimes \xi)\Delta_X(ab)$ égale

$$\sum_{i,j} a_i b_j \xi(\phi_i\psi_j) = \sum_{i,j} a_i b_j(\varepsilon(\phi_i)\xi(\psi_j) + \varepsilon(\psi_j)\xi(\phi_i)) = \alpha\xi(\beta) + \beta\xi(\alpha).$$

Ceci prouve que ξ agit par dérivations sur $k[X]$. De plus, avec les notations précédentes, α_x égale $\sum_i a_i(x)\phi_i$ et donc, d'après la remarque 5.8, on obtient :

$$(\xi\alpha)(x) = \sum_i a_i(x)\xi(\phi_i) = \xi(\alpha_x) = \mathrm{d}_e\alpha_x.$$

Ceci prouve 2). Enfin, 3) résulte de 2) et de la définition $D_\xi = (\mathrm{id}\otimes\xi)\Delta$ donnée en 6.3.

(**Nota** Il faut rectifier le §3.2 : si G agit à gauche sur X via $\mu_X : G \times X \to X$, le comorphisme $\mu_X^* : k[X] \to k[G] \otimes k[X]$ munit $k[X]$ d'une structure de $k[G]$-comodule à gauche (définie en un sens évident) et de G-module rationnel à droite.)

Remarque 6.22. — **Attention** Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation fidèle (c.-à-d., injective), sa dérivée $\mathrm{d}\rho : \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ n'est pas nécessairement injective, si $\mathrm{car}(k) > 0$. On peut même avoir $\mathrm{d}\rho = 0$, comme le montre l'exemple ci-dessous.

La difficulté vient du fait qu'un morphisme bijectif de groupes algébriques n'est pas nécessairement un isomorphisme, en raison de phénomènes de non-séparabilité. C'est ce qui se passe pour le morphisme $f : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $z \mapsto z^p$, où $p = \mathrm{car}(k)$. Il est bijectif, mais sa différentielle est nulle.

Toutefois, on a la remarque suivante, qui sera utile dans l'étude de la décomposition de Jordan.

Remarque 6.23. — La représentation de $\mathrm{Lie}(G)$ dans $k[G]$ via l'identification de $\mathrm{Lie}(G)$ aux dérivations invariantes à gauche, est la dérivée de la représentation rationnelle ρ de G définie par $(\rho(g)\phi)(h) = \phi(hg)$. Par conséquent, $\mathrm{d}\rho$ est une représentation fidèle.

6.9. Stabilisateurs de l'idéal d'un sous-groupe fermé. — Soient G un groupe algébrique affine, H un sous-groupe fermé, et I l'idéal de H dans $k[G]$. Le lemme suivant sera utilisé de façon cruciale dans la suite, pour la décomposition de Jordan, puis pour la construction du quotient G/H.

On considère l'action de G dans $k[G]$ définie par $(g\phi)(h) = \phi(hg)$. On rappelle que $L(G)$, l'algèbre de Lie des dérivations $k[G]$, invariantes par translation à gauche, s'identifie à $\mathrm{Lie}(G)$ via $D \mapsto \varepsilon \circ D$.

Lemme 6.24. — a) $H = \{g \in G \mid gI = I\}$.
b) $\mathrm{Lie}(H) = \{\delta \in \mathrm{Lie}(G) \mid \delta(I) = 0\}$.
c) $L(H) = \{D \in L(G) \mid D(I) \subseteq I\}$.

Démonstration. — a) est facile et laissé au lecteur. D'après les définitions, $\mathrm{Lie}(H)$ égale

$$\mathrm{Der}_k(k[H], k_e) = \mathrm{Der}_k(k[G]/I, k_e) = \{\delta \in \mathrm{Der}_k(k[G], k_e) \mid \delta(I) = 0\},$$

d'où b). Voyons c). Comme H contient e alors $I \subseteq \mathfrak{m}_{G,e}$. Donc, si $D(I) \subseteq I$ alors $(\varepsilon \circ D)(I) = 0$ et donc $\varepsilon \circ D \in \mathrm{Lie}(H)$, d'où $D \in L(H)$. Réciproquement, soient $D \in L(H)$, $\phi \in I$ et $h \in H$. Alors $\lambda(h^{-1})\phi \in I$ et donc

$$(D\phi)(h) = \varepsilon(\lambda(h^{-1})D\phi) = (\varepsilon \circ D)(\lambda(h^{-1})\phi) = 0,$$

ce qui montre que $D(I) \subseteq I$. Le lemme est démontré.

6.10. Actions adjointes. — Soient G un groupe algébrique affine et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Pour $g \in G$, on note $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la différentielle de l'automorphisme $\mathrm{Int}(g) : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Alors $\mathrm{Ad}(g)$ est un automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathrm{Int}(gg') = \mathrm{Int}(g) \circ \mathrm{Int}(g')$, l'application $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ est un morphisme de groupes ; on va voir que c'est un morphisme de variétés, et calculer sa différentielle.

Remarque 6.25. — Soient $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $A_\eta = \mathrm{id} + \eta X$, $B_\eta = \mathrm{id} + \eta Y$, avec $\eta \in \mathbb{R}^+$ « assez petit ». On vérifie que

$$A_\eta B_\eta A_\eta^{-1} B_\eta^{-1} = \mathrm{id} + \eta^2(XY - YX) + O(\eta^3).$$

Donc, on peut voir le crochet de Lie $XY - YX$ comme une sorte de dérivée seconde du commutateur $A_\eta B_\eta A_\eta^{-1} B_\eta^{-1}$. On va donner un sens précis à cette assertion.

Théorème 6.26. — *L'application* $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$*,* $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ *est un morphisme de groupes algébriques. Sa différentielle est l'application* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$*, définie par* $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$*, pour* $X, Y \in \mathfrak{g}$*.*

Démonstration. — Voyons la 1ère assertion. On plonge G dans un $\mathrm{GL}(V)$. Il suffit de prouver l'assertion pour $\mathrm{GL}(V)$. En effet, soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base de $\mathfrak{gl}(V)$, telle que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ soit une base de $\mathfrak{g}$. Soient C_{ij}, $1 \leq i, j \leq r$ les coefficients matriciels sur $\mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$. Si on montre que $C_{ij} \circ \mathrm{Ad} \in k[\mathrm{GL}(V)]$, pour $i, j = 1, \ldots, r$, on aura a fortiori $(C_{ij} \circ \mathrm{Ad})_{|G} \in k[G]$, pour $i, j = 1, \ldots, m$, d'où l'assertion voulue.

De même, comme, pour $g \in G$, on a $\mathrm{Int}_G(g) = \mathrm{Int}_{\mathrm{GL}(V)}(g)_{|G}$, on en déduit que $\mathrm{dAd}_{\mathfrak{g}} = (\mathrm{dAd}_{\mathfrak{gl}(V)})_{|\mathfrak{g}}$. De plus, pour $X \in \mathfrak{g}$ on a $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(X)_{|\mathfrak{g}}$, puisque $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Donc il suffit également de montrer la 2ème assertion pour $\mathrm{GL}(V)$. Ceci montre que le théorème découle de la proposition suivante.

Proposition 6.27. — a) *Pour* $g \in \mathrm{GL}(V)$*,* $X \in \mathfrak{gl}(V)$*, on a* $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$*. Par conséquent,* $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}(V))$ *est un morphisme de groupes algébriques.*

b) *On a* $\mathrm{dAd} = \mathrm{ad}$.

Démonstration. — Posons $G = \mathrm{GL}(V)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$. Démontrons le point a). Soient $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$. Par définition, on a $\mathrm{Ad}(g)(X) = \mathrm{d}\,\mathrm{Int}(g)(X) = X \circ \mathrm{Int}(g)^{\#} = X \circ \rho(g^{-1})^{\#} \circ \lambda(g)^{\#}$, où $\rho(h)$ et $\lambda(h)$ désignent les translations à droite et à gauche par h.

Si $\phi \in k[G]$ et $\Delta(\phi) = \sum_i \eta_i \otimes \xi_i$, alors

$$\big(X \circ \rho(g^{-1})^{\#} \circ \lambda(g)^{\#}\big)(\phi) = \sum_i \eta_i(g)\,\big(X \circ \rho(g^{-1})^{\#}\big)(\xi_i),$$

et $\big(X \circ \rho(g^{-1})^{\#}\big)(\xi_i) = (X \otimes \varepsilon_{g^{-1}})\Delta(\xi_i)$. On en déduit que

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = (\varepsilon_g \otimes X \otimes \varepsilon_{g^{-1}})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta,$$

et donc, pour $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g)(X)(C_{i,j}) &= (\varepsilon_g \otimes X \otimes \varepsilon_{g^{-1}}) \sum_{\ell,m} C_{i,\ell} \otimes C_{\ell,m} \otimes C_{m,j} \\
&= \sum_{\ell,m} g_{i,\ell}\; X_{\ell,m}\; (g^{-1})_{m,j} \\
&= (gXg^{-1})_{i,j} = (gXg^{-1})(C_{i,j}).
\end{aligned}$$

Comme les C_{ij} engendrent $k[G]$, on en déduit que $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$. Enfin, on vérifie sans difficultés que l'application $\mathrm{GL}_n \times M_n(k) \to M_n(k)$, $(g, u) \mapsto gug^{-1}$ est un morphisme de variétés. Ceci prouve le point (a).

Remarque 6.28. — On peut aussi prouver la 1ère assertion de a) comme suit. Posons $T_{ij} = C_{ij} - \delta_{i,j}$, pour $i, j = 1, \dots, n$. Alors les images des T_{ij} forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; on peut les regarder comme des formes linéaires sur $\mathfrak{g} = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Par conséquent, pour $g \in G$ et $i, j = 1, \dots, n$ on a

$$\mathrm{d}(T_{ij} \circ \mathrm{Int}(g)) = T_{ij} \circ \mathrm{d}\,\mathrm{Int}(g) = T_{ij} \circ \mathrm{Ad}(g). \tag{$*$}$$

Or $T_{ij} \circ \mathrm{Int}(g)$ est l'application $\mathrm{GL}_n \to k$ qui à une matrice A associe le coefficient $(gAg^{-1})_{ij}$; on vérifie que sa dérivée est l'application $\mathfrak{gl}_n \to k$, $X \mapsto (gXg^{-1})_{ij}$. Il résulte alors de $(*)$ que $gXg^{-1} = \mathrm{Ad}(g)(X)$, pour tout $X \in \mathfrak{gl}(V)$.

Démontrons maintenant le point b) de la proposition. Soit $Y \in \mathfrak{gl}_n$. Considérons les morphismes $\mathrm{Ev}_Y : \mathrm{End}_k(\mathfrak{gl}_n) \to \mathfrak{gl}_n$, $u \mapsto u(Y)$, et $\theta_Y : G \to \mathfrak{gl}_n$, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)(Y) = gYg^{-1}$. Alors $\theta_Y = \mathrm{Ev}_Y \circ \mathrm{Ad}$, et on en déduit que $\mathrm{dAd}(X)(Y) = \mathrm{d}\theta_Y(X) = X \circ \phi_Y$, où $\phi_Y : k[\mathfrak{gl}_n] \to k[G]$ est le comorphisme de θ_Y.

On a $\phi_Y(C_{i,j})(g) = C_{i,j}(gYg^{-1}) = \sum_{\ell,m} C_{i,\ell}(g) Y_{\ell,m} \tau(C_{m,j})(g)$, et donc

$$\phi_Y(C_{i,j}) = \sum_{\ell,m} C_{i,\ell}\; Y_{\ell,m}\; \tau(C_{m,j}).$$

Appliquant $X \in \mathfrak{gl}_n \cong \mathrm{Der}_k(k[\mathrm{GL}_n], k_e)$ à cette égalité, on obtient

$$X(\phi_Y(C_{i,j})) = \sum_{\ell,m} X(C_{i,\ell})\; Y_{\ell,m}\; \tau(C_{m,j})(e) + \sum_{\ell,m} C_{i,\ell}(e)\; Y_{\ell,m}\; X(\tau(C_{m,j})).$$

Mais $X \circ \tau = \mathrm{d}\iota(X) = -X$, d'après le corollaire 5.13, et donc il vient

$$X \circ \phi_Y(C_{i,j}) = \sum_{\ell} X_{i,\ell} Y_{\ell,j} - \sum_{m} Y_{i,m} X_{m,j} = (XY - YX)(C_{i,j}).$$

On en déduit que $\mathrm{dAd}(X)(Y) = XY - YX = \mathrm{ad}(X)(Y)$. Ceci prouve le point b), et achève la preuve de la proposition 6.27 et du théorème 6.26.

TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Ho] G. P. Hochschild, Basic theory of algebriac groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Ja] J. C. Jantzen, Representation of algebraic groups, Academic Press, 1987, second edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkäuser, 1985.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Laf] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Las] Y. Laszlo, Introduction à la géométrie algébrique, cours de Master 2, 2004-2005.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin Cummings publishing company, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.