CHAPITRE 4

DIFFÉRENTIELLES, LISSITÉ, SÉPARABILITÉ, QUOTIENTS G/H

Version du 8 janvier 2006

13. Différentielles, lissité et séparabilité

13.1. Module des différentielles. — Dans ce paragraphe, k désigne un **anneau commutatif arbitraire**. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur k.

Soit A une k-algèbre commutative et soit I le noyau du morphisme d'algèbres $A \otimes A \to A$. Dans ce qui suit, on considère $A \otimes A$ comme un A-module pour l'action de A sur le facteur de gauche, c.-à-d.,

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c = (a \otimes 1)(b \otimes c).$$

Alors I est un sous-A-module (puisque c'est un idéal de $A \otimes A$).

Définition 13.1. — On note $\Omega_{A/k} = I/I^2$ et d l'application linéaire $A \to \Omega_A$ qui associe à un élément a la classe dans I/I^2 de $1 \otimes a - a \otimes 1$.

$\Omega_{A/k}$ s'appelle le **module des différentielles** (de Kähler) **de** A **sur** k.

Lemme 13.2. — i) *I, resp. $\Omega_{A/k}$, est engendré comme A-module par les éléments $1 \otimes a - a \otimes 1$, resp. par leurs images* $\mathrm{d}a$.

ii) $\mathrm{d} : A \to \Omega_{A/k}$ *est une k-dérivation.*

iii) *Si $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ est une k-algèbre de type fini, alors $\Omega_{A/k} = A\mathrm{d}x_1 + \cdots + A\mathrm{d}x_n$ est un A-module de type fini.*

iv) *Le A-module $\Omega_{A/k}$ représente le foncteur $\mathrm{Der}_k(A, -)$, qui à tout A-module M associe $\mathrm{Der}_k(A, M)$; c.-à-d., pour tout M, on a un isomorphisme :*

$$\theta_M : \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M), \qquad \phi \mapsto \phi \circ \mathrm{d},$$

et cet isomorphisme est fonctoriel en M, c.-à-d., si $\psi : M \to M'$ est un morphisme de A-modules, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) & \xrightarrow{\theta_M} & \mathrm{Der}_k(A, M) \\
{\scriptstyle \phi \mapsto \psi\circ\phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle D \mapsto \psi\circ D} \\
\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M') & \xrightarrow{\theta_{M'}} & \mathrm{Der}_k(A, M').
\end{array}$$

Démonstration. — i) Soit $x = \sum_i a_i \otimes b_i$ un élément de I. Alors $\sum a_i b_i = 0$ et donc $x = x - \sum_i a_i b_i \otimes 1 = \sum_i a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$, d'où i).

b) Notons π la projection $I \to I/I^2$. Il est clair que d est k-linéaire, et pour $a, b \in A$ on a

$$1 \otimes ab - ab \otimes 1 = a(1 \otimes b - b \otimes 1) + (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b).$$

Comme $(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \in I^2$, on obtient que

$$\mathrm{d}(ab) = a\mathrm{d}(b) + b\mathrm{d}(a).$$

Ceci prouve ii).

iii) Supposons $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Alors tout $a \in A$ est combinaison k-linéaire des monômes

$$x^\nu := x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}, \quad \text{pour } \nu \in \mathbb{N}^n,$$

et donc $\Omega_{A/k}$ est engendré comme k-module par les $\mathrm{d}(x^\nu)$. Or, comme d est une dérivation, on obtient que

$$(*) \qquad \mathrm{d}(x^\nu) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x^{\nu - \varepsilon_i} \mathrm{d}(x_i),$$

où l'on désigne par ε_i le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ème qui vaut 1. Il résulte alors de $(*)$ que $\Omega_{A/k}$ est engendré comme A-module par $\mathrm{d}(x_1), \dots, \mathrm{d}(x_n)$. Ceci prouve iii).

iv) Soit $\phi : \Omega_{A/k} \to M$ un morphisme de A-modules. Comme d est une k-dérivation, il en est de même de $\phi \circ \mathrm{d}$. De plus, comme $\Omega_{A/k}$ est engendré comme A-module par les $\mathrm{d}(a)$, pour $a \in A$, alors θ_M est injective. Montrons qu'elle est surjective.

Soit $D \in \mathrm{Der}_k(A, M)$. On peut étendre D en une application A-linéaire $\varphi : A \otimes A \to M$, définie par $\varphi(a \otimes b) = aD(b)$. Un calcul facile montre que φ s'annule sur tout élément $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)$ et donc sur I^2. Donc φ induit un morphisme de A-modules

$$\phi : I/I^2 \to M,$$

tel que $\phi(\mathrm{d}(a)) = \varphi(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a)$. Ceci prouve que θ_M est un isomorphisme. Enfin, la commutativité du diagramme est claire, car les deux composées sont $\phi \mapsto \psi \circ \phi \circ \mathrm{d}$. Le lemme est démontré. □

13.2. Lemme de Yoneda. —

***Proposition 13.3* (Lemme de Yoneda).** — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X, Y deux objets de $\mathcal{C}$. Supposons qu'il existe un* **isomorphisme de foncteurs**

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -),$$

c.-à-d., qu'on ait pour tout $M \in \mathcal{C}$ une bijection

$$\theta_M : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$$

de sorte que pour tout morphisme $f : N \to M$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, N) & \xrightarrow[\theta_N]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, N) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) & \xrightarrow[\sim]{\theta_M} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M),
\end{array}$$

(c.-à-d., $\theta_M(f \circ g) = f \circ \theta_N(g)$ pour tout $g : Y \to N$). Alors, $X \cong Y$.

Démonstration. — Posons $\phi = \theta_Y(\mathrm{id}_Y)$; c'est un morphisme $X \to Y$, et il induit un morphisme de foncteurs

$$\phi^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -), \quad f \mapsto f \circ \phi.$$

L'astuce est de voir que $\phi^* = \theta$. En effet, soient M un objet de $\mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M)$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y) & \xrightarrow[\sim]{\theta_Y} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) & \xrightarrow[\theta_M]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M),
\end{array}$$

qui donne

$$\theta_M(f) = \theta_M(f \circ \mathrm{id}_Y) = f \circ \theta_Y(\mathrm{id}_Y) = f \circ \phi.$$

Comme $\theta_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ est bijective, soit $\psi = \theta_X^{-1}(\mathrm{id}_X)$; c'est l'unique morphisme $\psi : Y \to X$ tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_X$. Alors,

$$\theta_Y(\phi \circ \psi) = \phi \circ \psi \circ \phi = \phi = \theta_Y(\mathrm{id}_Y),$$

et la bijectivité de θ_Y entraîne $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Donc ϕ et ψ sont des isomorphismes réciproques ; la proposition est démontrée. □

13.3. Retour aux différentielles. —

Proposition 13.4. — *Si* $A = k[X_1, \dots, X_n]$ *est une algèbre de polynômes, alors* $\Omega_{A/k}$ *est un* A*-module libre de base* $(\mathrm{d}X_1, \dots, \mathrm{d}X_n)$ *:*

$$\Omega_{A/k} = A\mathrm{d}X_1 \oplus \cdots \oplus A\mathrm{d}X_n$$

Démonstration. — D'après le lemme 13.2, iii), $\Omega_{A/k}$ est engendré comme A-module par $\mathrm{d}X_1, \dots, \mathrm{d}X_n$, donc on a un morphisme surjectif de A-modules

$$\pi : A^n \to \Omega_{A/k}, \quad e_i \mapsto \mathrm{d}X_i,$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de A^n. Pour montrer que π est un isomorphisme il suffit, d'après le lemme de Yoneda, de montrer que pour tout A-module M le morphisme induit :

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Der}_k(A, M) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_A(A^n, M) \cong M^n \\ D & \mapsto & (D(X_1), \dots, D(X_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme. Puisque les monômes X^ν ($\nu \in \mathbb{N}^n$) forment une k-base de $A = k[X_1, \dots, X_n]$, on peut définir pour tout n-uplet $(m_1, \dots, m_n)$ d'éléments de M, une (unique) application k-linéaire $D : A \to M$, par

$$D(X^\nu) = \sum_{i=1}^{r} X^{\nu - \varepsilon_i} m_i,$$

et ceci est un élément de $\mathrm{Der}_k(A, M)$. Il en résulte que $(*)$ est un isomorphisme, et la proposition est démontrée. □

Exemples 13.5. — Soient k un corps et $K = k[x]$ une extension monogène. On va voir plus bas que si x est algébrique séparable sur k, alors $\Omega_{K/k} = \{0\}$. Tandis que si x est transcendant ou si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et

$$K = k[X]/(X^p - a), \quad \text{où} \quad a \notin k^p,$$

alors $\Omega_{K/k} = K\mathrm{d}x$.

Lemme 13.6. — *Soient* A *un anneau et* $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ *des morphismes de* A*-modules, tels que* $v \circ u = 0$. *Si, pour tout* A*-module* T*, la suite*

$$\mathrm{Hom}_A(P, T) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_A(N, T) \xrightarrow{u^*} P$$

est exacte, alors $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$.

Démonstration. — On a $\mathrm{Ker}(u_T^*) = \{\psi : N \to T \mid \psi(\mathrm{Im}(u)) = 0\}$, et $\mathrm{Im}(v_T^*)$ s'identifie à

$$\{\psi : N \to T \mid \psi(\mathrm{Ker}(v)) = 0\}.$$

Supposons $\mathrm{Im}(v_T^*) = \mathrm{Ker}(u_T^*)$ pour tout T. Appliquant ceci à $T = N/\mathrm{Im}(u)$, on obtient que $\pi : N \to N/\mathrm{Im}(u)$ est nul sur $\mathrm{Ker}(v)$, d'où $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$. Ceci prouve le lemme. □

***Proposition 13.7* (Fonctorialité).** — *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de k-algèbres.*

a) *ϕ induit un morphisme de B-modules $\varphi_* : B \otimes_A \Omega_A \to \Omega_B$, tel que $\varphi_*(1 \otimes \mathrm{d}_A a) = \mathrm{d}_B \varphi(a)$, pour tout $a \in A$, et l'on une suite exacte*

$$B \otimes_A \Omega_{A/k} \xrightarrow{\phi_*} \Omega_{B/k} \longrightarrow \Omega_{B/A} \to 0. \tag{1}$$

b) *Si φ est surjectif, φ_* l'est aussi et, posant $\mathfrak{m} = \operatorname{Ker} \varphi$, on a une suite exacte*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to B \otimes_A \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k} \to 0. \tag{2}$$

c) *Si S est une partie multiplicative de A, le morphisme $S^{-1}A \otimes_A \Omega_{A/k} \to \Omega_{S^{-1}A/k}$ est bijectif.*

Démonstration. — a) $\mathrm{d}_B \circ \varphi$ est une dérivation $A \to \Omega_{B/k}$ et donc induit, d'après la propriété universelle, un (unique) A-morphisme $\varphi' : \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k}$ tel que $\varphi' \circ \mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B \circ \varphi$, c.-à-d.$\varphi'(\mathrm{d}_A a) = \mathrm{d}_B \phi(a)$, pour tout $a \in A$. On étend φ' par B-linéarité à $B \otimes_A \Omega_{A/k}$ pour obtenir $\mathrm{d}\varphi$.

D'après le lemme 13.6, pour montrer que (1) est exacte, il suffit de montrer que pour tout B-module M, la suite

$$0 \to \operatorname{Der}_A(B, M) \to \operatorname{Der}_k(B, M) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Der}_k(A, M),$$

obtenue en appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_B(-, M)$, est exacte. Il est clair que la seconde flèche est une inclusion, et le noyau de φ^* est formé des k-dérivations $D : B \to M$ qui sont nulles sur A, c.-à-d., A-linéaires, d'où $\operatorname{Ker} \varphi^* = \operatorname{Der}_A(B, M)$. Ceci prouve a).

b) Supposons φ surjectif, de noyau $\mathfrak{m}$, de sorte que $B \cong A/\mathfrak{m}$. Alors, φ_* est surjectif, puisque $\Omega_{B/k}$ est engendré comme B-module par les $\mathrm{d}_B \varphi(a) = \varphi_*(\mathrm{d}_A a)$, pour $a \in A$.

D'autre part, pour tout B-module T et tout $D \in \operatorname{Der}_k(A, T)$, la restriction $D' = D|_{\mathfrak{m}}$ est A-linéaire, puisque

$$D'(ax) = aD'(x) + xD(a) = aD'(x), \qquad \forall x \in \mathfrak{m},\ a \in A.$$

En particulier, considérons la dérivation

$$D_0 : A \to B \otimes_A \Omega_{A/k}, \quad a \mapsto 1 \otimes \mathrm{d}_A a.$$

et soit D_0' sa restriction à $\mathfrak{m}$. Elle est A-linéaire et nulle sur $\mathfrak{m}^2$, donc induit une application B-linéaire $\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to B \otimes_A \Omega_{A/k}$ telle que

$$\delta(x + \mathfrak{m}^2) = 1 \otimes \mathrm{d}_A x,$$

et l'on a $\varphi_* \circ \delta = 0$, d'où un complexe de B-modules

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to B \otimes_A \Omega_{A/k} \to \Omega_{B/k} \tag{2}$$

Pour montrer qu'il est exact, il suffit de montrer que pour tout B-module T, la suite obtenue en appliquant $\mathrm{Hom}_B(-,T)$ est exacte. Or, pour tout B-module T, on a

$$\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, T) = \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, T)$$

et alors, via l'identification $\mathrm{Der}_k(A,T) = \mathrm{Hom}_B(B\otimes_A \Omega_{A/k}, T)$ dans laquelle toute dérivation D correspond à un B-morphisme ϕ tel que $D(x) = \phi(1\otimes \mathrm{d}_A x)$ pour tout $x \in A$, on obtient que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$(2')\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, T) & \to & \mathrm{Hom}_B(B\otimes_A \Omega_{A/k}, T) & \xrightarrow{\delta^*} & \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, T) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{Der}_k(B,T) & \to & \mathrm{Der}_k(A,T) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, T). \end{array}$$

(On a vu plus haut que la restriction à $\mathfrak{m}$ d'une k-dérivation $A \to T$ est A-linéaire). Or $\mathrm{Der}_k(B,T)$ s'identifie au sous-k-module des k-dérivations $A \to T$ nulles sur $\mathfrak{m}$, c.-à-d., au noyau de res. Ceci montre que $(2')$, et donc (2), est exact. Le point b) est démontré.

c) Notons K et C le noyau et le conoyau de $\Omega_{A/k}\otimes_A S^{-1}A \to \Omega_{S^{-1}A/k}$. Pour montrer que $K = 0 = C$, il suffit de montrer que pour tout $S^{-1}A$-module N, l'application $\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{S^{-1}A/k}, N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\Omega_{A/k}\otimes_A S^{-1}A, N)$ est bijective. D'après la propriété universelle, ceci revient à voir que l'application naturelle $\theta : \mathrm{Der}_k(S^{-1}A, N) \to \mathrm{Der}_k(A,N)$ est bijective. Or, si D est une dérivation $S^{-1}A \to N$, alors, pour $a \in A$, $s \in S$, on a $D(as^{-1}) = D(a)s^{-1} - aD(s)s^{-2}$.

Ceci montre que θ est injective. Réciproquement, pour tout $D \in \mathrm{Der}_k(A,N)$, on vérifie que la formule ci-dessus définit une dérivation $S^{-1}A \to N$ qui prolonge D. Donc θ est surjective. $\square$

Corollaire 13.8. — *Si $A = k[X_1,\dots,X_n]$ et $B = A/(f_1,\dots,f_r)$, alors*

$$\Omega_{B/k} \cong (B\mathrm{d}X_1 \oplus\cdots\oplus B\mathrm{d}X_n)\Big/\sum_{i=1}^r B\mathrm{d}f_i.$$

Démonstration. — Posons $\mathfrak{m} = (f_1,\dots,f_r)$. D'après le point b) de la proposition précédente, on a une suite exacte

$$\mathfrak{m} \xrightarrow{1\otimes \mathrm{d}} B\otimes_A \bigoplus_{i=1}^n A\,\mathrm{d}X_i \to \Omega_{B/k} \to 0$$

et l'image de $1\otimes \mathrm{d}$ est le sous-B-module engendré par les éléments $1\otimes \mathrm{d}f_j$, pour $j = 1,\dots,r$. Ceci prouve le corollaire. $\square$

Lemme 13.9. — *Soit B un anneau. Un morphisme de B-modules $u : M \to N$ admet un inverse à gauche (on dit aussi : une rétraction) $v : N \to M$ tel que*

$v \circ u = \mathrm{id}_M$ *si et seulement si pour tout* B*-module* T*, l'application*

$$u_T^* : \mathrm{Hom}_B(N,T) \to \mathrm{Hom}_B(M,T), \quad f \mapsto f \circ u,$$

est surjective.

Démonstration. — Si $vu = \mathrm{id}_M$ alors pour tout B-morphisme $f : M \to T$ on a $f = fvu = u_T^*(fv)$, donc u_T^* est surjective. Réciproquement, si u_M^* est surjective, il existe $v \in \mathrm{Hom}_B(N,M)$ tel que $\mathrm{id}_M = u_M^*(v) = v \circ u$. □

On peut maintenant généraliser la proposition 13.4 et le corollaire 13.8 comme suit. Soient A une k-algèbre et $B = A[X_1, \dots, X_n]$. On s'intéresse à $\Omega_{B/k}$. Notant τ l'inclusion $A \hookrightarrow B$, on a la suite exacte

$$(\dagger) \qquad B \otimes_A \Omega_{A/k} \xrightarrow{\tau_*} \Omega_{B/k} \twoheadrightarrow \Omega_{B/A} = B\mathrm{d}X_1 \oplus \cdots \oplus B\mathrm{d}X_n.$$

Comme $\tau_*(1 \otimes \mathrm{d}_A a) = \mathrm{d}_B a$, pour tout $a \in A$, le diagramme ci-dessous est commutatif, pour tout B-module T :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, T) & \xrightarrow{(\tau_*)^*} & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, T) \\ \cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong \\ \mathrm{Der}_k(B,T) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Der}_k(A,T) \end{array} .$$

Or, on peut prolonger toute k-dérivation $D : A \to T$ en une k-dérivation $\widetilde{D} : B \to T$ définie par

$$\widetilde{D}\Big(\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu\Big) = \sum_\nu X^\nu D(a_\nu).$$

(On vérifie facilement que c'est une dérivation.) Par conséquent, l'application res est surjective, et donc τ_* possède un inverse à gauche, d'après le lemme précédent. On a donc un isomorphisme de B-modules

$$(1) \qquad \Omega_{B/k} \cong (B \otimes_A \Omega_{A/k}) \oplus B\mathrm{d}X_1 \oplus \cdots \oplus B\mathrm{d}X_n.$$

De plus, via cet isomorphisme, $\mathrm{d}_{B/k}$ s'identifie à

$$(2) \qquad \widetilde{\mathrm{d}_{A/k}} + \mathrm{d}_{B/A} = \widetilde{\mathrm{d}_{A/k}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i},$$

c.-à-d., pour tout $P = \sum_\nu a_\nu X^\nu$ dans B,

$$(3) \qquad \mathrm{d}_{B/k}(P) = \sum_\nu \mathrm{d}_{A/k}(a_\nu) X^\nu + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_i} \mathrm{d}X_i.$$

Soient maintenant $\mathfrak{m}$ un idéal de B et $C = B/\mathfrak{m}$. D'après la proposition 13.7, on a une suite exacte de C-modules :

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} C \otimes_B \Omega_{B/k} \to \Omega_{C/k} \to 0,$$

où $\delta(P+\mathfrak{m}^2) = 1\otimes \mathrm{d}_{B/k}P$ pour tout $P\in\mathfrak{m}$. Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante.

Proposition 13.10. — *Soient A une k-algèbre, $B = A[X_1,\dots,X_n]$, $\mathfrak{m}$ un idéal de B, et $C = B/\mathfrak{m}$. Soit $(P_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de B dont les images engendrent $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ comme C-module. Alors, on a un isomorphisme de C-modules :*

$$\Omega_{C/k} \cong \frac{C\otimes_A \Omega_{A/k}\oplus C\mathrm{d}X_1\oplus\cdots\oplus C\mathrm{d}X_n}{\bigoplus_{j\in J} C\delta(P_j)}$$

13.4. Application géométrique : différentielles et espaces cotangents. — Dans ce paragraphe, k désigne un corps algébriquement clos. Soit X une variété algébrique affine sur k. On note $\Omega_{X/k} = \Omega_{k[X]/k}$. Soit $x\in X$, soit $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal correspondant de $k[X]$ et soit $k_x = k[X]/\mathfrak{m}_x$.

Proposition 13.11. — a) *On a $\Omega_X\otimes_{k[X]} k_x \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, et pour tout $f\in k[X]$, l'image de $\mathrm{d}f\in\Omega_X$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*X$ coïncide avec l'image de $f-f(x)$, c.-à-d., d'après le lemme* 5.10, *avec la différentielle $\mathrm{d}_xf\in T_x^*X$.*

b) *Soit $u: X\to Y$ un morphisme de variétés affines et soit $\phi: k[Y]\to k[X]$ son comorphisme. Considérons le morphisme de $k[X]$-modules :*

$$\phi_*: \Omega_{Y/k}\otimes_{k[Y]} k[X]\to\Omega_{X/k}.$$

Alors le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} \Omega_Y\otimes_{k[Y]} k_x \arrow[r, "\phi_*\otimes 1"] \arrow[d, "\cong"'] & \Omega_X\otimes_{k[X]} k_x \arrow[d, "\cong"'] \\ \mathfrak{m}_{u(x)}/\mathfrak{m}_{u(x)}^2 \arrow[r, "{}^t(\mathrm{d}_xu)"] & \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \end{tikzcd} .$$

Démonstration. — a) Posons $k[X] = A$. Alors $A = \mathfrak{m}_x\oplus k1$, et la projection $A\to\mathfrak{m}_x$ est donnée par $f\mapsto f-f(x)$. Composant ceci avec l'application $\mathfrak{m}_x\to\Omega_{A/k}\otimes k_x$ de 13.7, et tenant compte du fait que $\Omega_{k_x/k} = \{0\}$, on obtient une application k-linéaire surjective

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} \Omega_{A/k}\otimes k_x,$$

telle que $\delta(\overline{f-f(x)}) = \mathrm{d}f\otimes 1$ pour tout $f\in A$. Réciproquement, l'application

$$\pi: A\to\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2,\quad f\mapsto\overline{f-f(x)}$$

est une k-dérivation de A dans le k_x-module $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, puisque

$$\overline{fg-fg(x))} = f\pi(g)+g(x)\pi(f) = f\pi(g)+g\pi(f).$$

Il lui correspond donc un élément τ de

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k},\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = \mathrm{Hom}_{k_x}(\Omega_{A/k}\otimes_A k_x,\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$$

tel que $\tau(\mathrm{d}f) = \overline{f - f(x)}$. Par conséquent, τ et δ sont des isomorphismes réciproques, et l'on a bien dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*X$ l'égalité

$$\tau(\mathrm{d}f) = \overline{f - f(x)} = \mathrm{d}_x f.$$

Ceci prouve a).

L'assertion b) en résulte. En effet, posons $y = u(x)$ et soit $f \in k[Y]$. L'image de $\mathrm{d}f \otimes 1$ dans $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ est $\overline{f - f(u(x))}$ et, par définition, ${}^t(\mathrm{d}_x u)$ est l'application induite par le comorphisme $\phi : g \mapsto g \circ u$. Par conséquent, l'image de $\mathrm{d}f \otimes 1$ par la composée du bas est

$$\overline{f \circ u - f \circ u(x)}$$

qui est l'image dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ de

$$\mathrm{d}(f \circ u) \otimes 1 = \phi_*(\mathrm{d}f \otimes 1).$$

Comme $\Omega_{Y/k} \otimes_{k[Y]} k_x$ est engendré par les $\mathrm{d}f \otimes 1$, pour $f \in k[Y]$, ceci prouve la commutativité du diagramme. La proposition est démontrée. □

Définition 13.12. — On notera u^* le morphisme $\phi_* : \Omega_{Y/k} \otimes_{k[Y]} k[X] \to \Omega_{X/k}$. La proposition précédente montre que u^* est un analogue global des applications linéaires ${}^t(\mathrm{d}_x u)$, pour $x \in X$.

Dans le cas où X et Y sont irréductibles et u dominant, on va étudier u^* au niveau des corps de fractions $k(Y)$ et $k(X)$.

13.5. Extensions séparables de corps I. — Suivant l'usage, on note L/K une extension de corps $K \subseteq L$. Son degré est $[L : K] := \dim_K L$, c'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 13.13. — Soit $P \in K[X]$ un polynôme **irréductible** (donc de degré ≥ 1). On dit que P est **séparable** s'il est sans facteur commun avec son polynôme dérivé P', ce qui est le cas si et seulement si $P' \neq 0$. Par conséquent, P est non séparable si et seulement si $\mathrm{car}(K) = p > 0$ et $P \in K[X^p]$.

Définition et proposition 13.14. — *Soit L/K une extension* **algébrique**.

1) *Un élément $x \in L$ est dit* **séparable sur** K *si son polynôme minimal $M_K(x)$ est séparable.*

2) *On dit que L est* **séparable sur** K *si tous ses éléments le sont.*

3)**(Transitivité)** *Si $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ et si chaque x_i est séparable sur K, alors L/K est séparable. De plus, si L/L' et L'/K sont séparables, alors L/K l'est aussi.*

Démonstration. — Le point 3) résulte de la théorie de Galois, voir par exemple [**Po**, Chap.6], Cor. 26.1.9 ou 25.3.4. □

Remarque 13.15. — On s'intéresse aux extensions séparables pour une raison géométrique qui apparaîtra dans le paragraphe suivant.

Définition 13.16. — Une extension de corps L/K est dite **séparablement engendrée** s'il existe une base de transcendance B de L sur K telle que l'extension (algébrique) $L/K(B)$ soit séparable. Dans ce cas, on dit que B est une base de transcendance séparante.

En particulier, une extension transcendante pure ou bien algébrique séparable est séparablement engendrée.

Remarque 13.17. — Soit T une indéterminée. L'extension $K \subset K(T)$ est séparablement engendrée. Mais, si $\mathrm{car}(K) = p > 0$, alors T^p est une base de transcendance de $K(T)$ sur K qui est non séparante.

Proposition 13.18. — *Soit L/K une extension de type fini. Alors $\dim_L \Omega_{L/K} \geq \deg.\mathrm{tr}_K L$. De plus, on a l'égalité si L/K est séparablement engendrée.*

Afin de démontrer ceci en se ramenant au cas où l'extension L/K est monogène (c.-à-d., $L = K(x)$ pour un $x \in L$), il est commode de démontrer la proposition un peu plus générale suivante.

Proposition 13.19. — *Soient $k \subseteq K \subseteq L$ des corps, avec L/K de type fini. Alors*

$$(*) \qquad \dim_L \Omega_{L/k} \geq \dim_K \Omega_{K/k} + \deg.\mathrm{tr}_K L.$$

De plus, on a l'égalité si L/K est séparablement engendrée.

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer l'inégalité dans le cas où L/K est monogène. En effet, supposons la proposition établie dans ce cas, et écrivons $L = K(x_1, \dots, x_m)$. Posant $K_0 = K$ et $K_i = K_{i-1}(x_i)$ pour $i = 1, \dots, m$, on obtient alors, pour tout $i = m, \dots, 1$:

$$\dim_{K_i} \Omega_{K_i/k} \geq \dim_{K_{i-1}} \Omega_{K_{i-1}/k} + \deg.\mathrm{tr}_{K_{i-1}} K_i.$$

Sommant ces égalités, et utilisant le fait que $\sum_{i=1}^m \deg.\mathrm{tr}_{K_{i-1}} K_i = \deg.\mathrm{tr}_K L$, on obtient que

$$\dim_L \Omega_{L/k} \geq \dim_K \Omega_{K/k} + \deg.\mathrm{tr}_K L.$$

Montrons maintenant la proposition lorsque $L = K(x)$. Si x est transcendant, on a, d'après 13.7 c) et 13.10,

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_{K[x]} \Omega_{K[x]/k} \cong L \otimes_K \Omega_{K/k} \oplus L\mathrm{d}x,$$

d'où

$$(1) \qquad \dim_L \Omega_{L/k} = \dim_K \Omega_{K/k} + 1 = \dim_K \Omega_{K/k} + \deg.\mathrm{tr}_K L,$$

c.-à-d., on a l'égalité dans $(*)$ dans ce cas.

Si x est algébrique sur K soit P désigne son polynôme minimal. Alors $L = K[x] \cong K[X]/(P)$ d'où, d'après 13.10, un isomorphisme

$$\Omega_{L/k} \cong \frac{(L \otimes_K \Omega_{K/k}) \oplus L\mathrm{d}X}{L\delta(P)}.$$

On a donc $\dim_L \Omega_{L/k} \geq \dim_K \Omega_{K/k}$, avec l'égalité si et seulement si $\delta(P) \neq 0$. Ceci prouve déjà l'inégalité $(*)$.

De plus, si $P = X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d$, avec $a_i \in K$,

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^{d} x^{d-i}\mathrm{d}_{K/k}(a_i) + (\sum_{i=1}^{d} ia_i x^{i-1})\mathrm{d}X = (\widetilde{\mathrm{d}_{K/k}}P)(x) + P'(x)\mathrm{d}X.$$

Comme $(\widetilde{\mathrm{d}_{K/k}}P)(x) \in L \otimes_K \Omega_{K/k}$, on a

$$(\dagger) \qquad \delta(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \text{ et } \mathrm{d}_{K/k}(a_i) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, d.$$

En particulier, si P est séparable, alors $P'(x) \neq 0$ et donc $\delta(P) \neq 0$, d'où l'égalité dans $(*)$ dans ce cas.

Supposons maintenant L/K séparablement engendrée et soit $B = (X_1, \ldots, X_r)$ une base de transcendance de L sur K. Posons $K' = K(B)$. Par application répétées de (1), on obtient que

$$(2) \qquad \dim_{K'} \Omega_{K'/k} = \dim_K \Omega_{K/k} + r = \dim_K \Omega_{K/k} + \deg.\mathrm{tr}_K K'.$$

D'autre part, comme l'extension L/K' est algébrique séparable et de type fini, alors, d'après le théorème de l'élément primitif (voir, par exemple, [**Po**, Chap.6], 26.7.3 ou 25.4.2), il existe $\xi \in L$, algébrique séparable sur K', tel que $L = K'[\xi]$. Donc, d'après la discussion précédente, l'on a

$$\dim_L \Omega_{L/K'} = \dim_{K'} \Omega_{K'/k}.$$

Combiné avec (2), ceci donne $\dim_L \Omega_{L/k} = \dim_K \Omega_{K/k} + \deg.\mathrm{tr}_K L$, c.-à-d., on a l'égalité dans $(*)$. La proposition est démontrée. □

Proposition 13.20. — *Réciproquement, soit L/K une extension de type fini telle que $\dim_L \Omega_{L/k} = \deg.\mathrm{tr}_K L$. Alors L/K est séparablement engendrée.*

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où L/K est algébrique, auquel cas l'hypothèse entraîne $\Omega_{L/K} = \{0\}$. Soit $x \in L$ et soit P son polynôme minimal sur K. Il résulte de l'inégalité $(*)$ dans la proposition précédente que $\Omega_{K[x]/K} = 0$, d'où $\delta(P) \neq 0$. Mais, ici $\delta(P) = P'(x)$, puisque $\mathrm{d}_{K/K} = 0$. Donc $P'(x) \neq 0$ et x est séparable. Ceci prouve la proposition dans le cas où L/K est algébrique.

Supposons maintenant $\dim_L \Omega_{L/k} = \deg.\mathrm{tr}_K L = r > 0$ et soient $x_1, \ldots, x_r \in L$ tels que $B = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r)$ soit une base de $\Omega_{L/k}$. Posons $K' = K(B)$. Alors, dans la suite exacte

$$L \otimes_{K'} \Omega_{K'/k} \to \Omega_{L/K} \to \Omega_{L/K'} \to 0,$$

la première flèche est surjective, puisque son image contient la base B de $\Omega_{L/K}$. Par conséquent, $\Omega_{L/K'} = 0$. Donc L/K' est algébrique, d'après l'inégalité $(*)$, et séparable, d'après le cas traité plus haut. Donc L' est algébrique séparable sur $K' = K(x_1, \ldots, x_r)$. Comme $r = \deg.\mathrm{tr}_K L$, les x_i sont nécessairement algébriquement indépendants, et donc B B est une base de transcendance séparante de L/K, et L/K est séparablement engendrée. □

Définition 13.21. — On dit qu'un corps k est **parfait** si $\mathrm{car}(k) = 0$ ou bien si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et si le morphisme de corps $k \to k$, $x \mapsto x^p$ est surjectif (et donc bijectif). En particulier, tout corps algbériquement clos (et aussi tout corps fini) est parfait.

Proposition 13.22. — *Soit k un corps parfait. Toute extension K/k de type fini est séparablement engendrée. Plus précisément, si $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ et $\deg.\mathrm{tr}_k K = r$, il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)})$ soit une base de transcendance séparante.*

Démonstration. — Si $\mathrm{car}(k) = 0$, toute base de transcendance est séparante, donc on suppose $\mathrm{car}(k) = p > 0$. On procède par récurrence sur n. Si $r = 0$ ou $r = n$, il n'y a rien à montrer. On peut donc supposer que $1 \leq r < n$ et, quitte à renuméroter les x_i, que $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de transcendance. Alors $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$ sont algébriquement indépendants, donc il existe un polynôme $P \in k[X_1, \ldots, X_{r+1}]$ tel que $P(x_1, \ldots, x_{r+1}) = 0$, et de degré total minimum. Alors, P est irréductible, disons de degré $d \geq 1$. De plus, $P \notin k[X_1^p, \ldots, X_{r+1}^p]$ car sinon, comme k est parfait, on pourrait former le polynôme $P^{1/p}$, de degré d/p, qui s'annulerait aussi en $(x_1, \ldots, x_{r+1})$, contredisant la minimalité de d. Il existe donc au moins un indice $i \in \{1, \ldots, r+1\}$ tel que P ne soit pas un polynôme en x_i^p.

Alors, x_i est algébrique sur $B = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \setminus \{x_i\}$, et il en résulte que B est une base de transcendance de L/k. Par conséquent,

$$k[B][X] \cong k[X_1, \ldots, X_{r+1}]$$

et donc le polynôme $P(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{r+1})[X]$ est irréductible, et n'appartient pas à $k(B)[X^p]$. Il en résulte que x_i est algébrique **séparable** sur $k(B)$, et donc a fortiori sur $K' = k(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-ensemble $\{i_1 < \cdots < i_r\}$ de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ tel que K' est algébrique séparable sur $K_0 = k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Comme x_i est algébrique séparable sur K', il l'est aussi sur K_0, par transitivité. Il en résulte que $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ est une base de transcendance séparante de L/K. La proposition est démontrée. □

Remarque 13.23. — La démonstration ci-dessus est tirée de la preuve de [**Jac**, Thm. 8.37]. Pour une autre démonstration, qui utilise la proposition 13.20, voir [**Sp**, Prop. 4.2.10].

Corollaire 13.24. — *Soit k un corps parfait. Pour toute extension de type fini L/k, on a*

$$\dim_L \Omega_{L/k} = \dim_k \mathrm{Der}_k(L, L) = \mathrm{deg.\,tr}_k\, L.$$

Démonstration. — Ceci résulte de la proposition précédente et de 13.18. □

13.6. Localisation de modules et de morphismes. — Dans ce paragraphe, k est un corps algébriquement clos et X une variété algébrique sur k, affine et irréductible. On pose $A = k[X]$ et $K = k(X)$. Soit M un A-module non nul de type fini. Pour $x \in X$ ou $f \in A$, on note $M_x = M \otimes_A A_{\mathfrak{m}_x}$ et $M_f = M \otimes_A A_f$. Soient $M_K = M \otimes_A K$ et $r = \dim_K M_K$.

Proposition 13.25. — a) *Il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que M_f soit un A_f-module libre de rang r.*

b) *Pour tout $x \in X$, on a $\dim_k M_x/\mathfrak{m}_x M_x \geq r$. L'égalité a lieu ssi M_x est libre, et l'ensemble des tels x est un ouvert non-vide de X.*

Démonstration. — Soit $\{m_1, \ldots, m_n\}$ un système de générateurs de M. Traitons d'abord le cas où $r = 0$, c.-à-d., $M_K = \{0\}$. Dans ce cas, il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que $fm_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, et l'on a $M_f = \{0\}$ et $M_x = \{0\}$ pour tout $x \in D(f)$. Ceci prouve que

$$U = \{x \in X \mid M_x = (0)\}$$

contient l'ouvert non-vide $D(f)$. Réciproquement, si $x \in U$ alors pour $i = 1, \ldots, n$ il existe $g_i \in A \setminus \mathfrak{m}_x$ tel que $g_i m_i = 0$; posons $g = g_1 \cdots g_n$. Alors $x \in D(g) \subseteq U$. Ceci prouve que U est un ouvert dense.

Supposons maintenant que $r \geq 1$. Quitte à renuméroter les m_i, on peut supposer que les $m_i \otimes 1$, pour $i \leq r$, forment une base de M_K. Alors, $m_1, \ldots, m_r$ sont linéairement indépendants sur A donc forment une A-base du sous-A-module N qu'ils engendrent. Le module quotient M/N vérifie $(M/N)_K = \{0\}$ donc d'après le premier cas, il existe $f \in A \setminus \{0\}$ tel que $M_f = N_f$ soit librement engendré comme A_f-module par $m_1, \ldots, m_r$. Alors, pour tout $x \in D(f)$, $M_x = (M_f)_x$ est libre de rang r sur $A_{\mathfrak{m}_x}$, et donc l'ensemble $U = \{x \in X \mid \dim_k M_x/\mathfrak{m}_x M_x = r\}$ est non-vide.

D'autre part, soient $x \in X$ et $s := \dim_k M_x/\mathfrak{m}_x M_x$. Soient $e_1, \ldots, e_s$ des éléments de M dont les images engendrent $M_x/\mathfrak{m}_x M_x$. Il résulte du lemme de Nakayama que $e_1, \ldots, e_s$ engendrent M_x sur $A_{\mathfrak{m}_x}$ et donc M_K sur K. Donc $s \geq r$.

Enfin, si $s = r$, alors $e_1, \ldots, e_r$ sont linéairement indépendants sur K, donc forment une base de M_x. Il existe donc des $\beta_{ij} \in A_{\mathfrak{m}_x}$ tels que $m_j = \sum_{i=1}^r \beta_{ij} e_i$, pour $j = 1, \ldots, n$. Soit $g \in A \setminus \mathfrak{m}_x$ un dénominateur commun des β_{ij}. Alors $x \in D(g)$ et les β_{ij} sont dans A_g donc M_g est librement engendré par $e_1, \ldots, e_r$, d'où

$x \in D(g) \subseteq U$. Ceci montre que U est ouvert. La proposition est démontrée. □

Considérons maintenant un A-morphisme $\phi : M \to N$ entre A-modules de type fini. Soient $m = \dim_K M_K$, $n = \dim_K N_K$ et $r = \mathrm{rang}(\phi_K)$. Pour tout $x \in X$, on pose $\overline{M}_x = M_x/\mathfrak{m}_x M_x$ et $\overline{N}_x = N_x/\mathfrak{m}_x N_x$ et on note $\overline{\phi}_x$ l'application induite $\overline{M}_x \to \overline{N}_x$.

Proposition 13.26. — (i) *Si ϕ_K est injective, l'ensemble U des $x \in X$ tels que M_x et N_x soient libres et $\overline{\phi}_x$ injective est un ouvert non-vide.*

(ii) *S'il existe x tel que N_x soit libre et $\overline{\phi}_x$ injective, alors M_x est libre et ϕ_K injective.*

Démonstration. — Soient $P = \operatorname{Ker} \phi$ et $C = \operatorname{Coker} \phi$. Comme la localisation est un foncteur exact, on a $\dim_K C_K = n - r$, et pour tout $x \in X$ on a une suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to P_x \to M_x \xrightarrow{\phi_x} N_x \to C_x \to 0.$$

(i) Si ϕ_K est injective, alors $\dim_K C_K = n - m$. D'après la proposition précédente, l'ensemble U' des x tels que M_x et N_x soient libres (de rang m et n respectivement) est un ouvert non-vide. Soit $x \in U'$. Si C_x est libre, alors la suite exacte $(*)$ est scindée, d'où $P_x = 0$ et $\overline{\phi}_x$ injective.

D'autre part, comme $C_x/\mathfrak{m}_x C_x = \operatorname{Coker} \overline{\phi}_x$ ($\otimes$ est exact à droite), si $\overline{\phi}_x$ est injective alors $\dim_k(C_x/\mathfrak{m}_x C_x) = n - m$ et donc C_x est libre. Ceci montre que $U = \{x \in U' \mid C_x \text{ libre}\}$; c'est un ouvert non-vide de X.

(ii) Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que N_x soit libre et $\overline{\phi}_x$ injective. Alors, on a une suite exacte $0 \to \overline{M}_x \to \overline{N}_x \to \overline{C}_x \to 0$.

On a donc $n = \dim_k \overline{N}_x = \dim_k \overline{M}_x + \dim_k \overline{C}_x \geq m + (n - r)$, et on en déduit que $\overline{M}_x$ et $\overline{C}_x$ sont libres et que $r = m$, et donc que ϕ_K est injective. □

Remarque 13.27. — On laisse au lecteur le soin de reformuler la proposition en termes de conditions équivalentes. Si ϕ vérifie ces conditions, on dit que ϕ est **génériquement injectif**.

13.7. L'ouvert des points lisses. —

Définition 13.28. — 1) Soient $A \subset B$ deux anneaux. On rappelle qu'un élément $x \in B$ est dit **entier sur** A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$.

2) Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. On dit que A est **intégralement clos** si tout $x \in K$ qui est entier sur A appartient à A.

Proposition 13.29. — *Soit X une variété algébrique sur k. Pour tout x, on a $\dim_k T_xX \geq \dim_x X$. Si l'égalité a lieu, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et intégralement clos.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Ma1**, §17]. L'idée est que l'algèbre graduée $A := \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ est engendrée par $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ et de dimension égale à $\dim_x X$. Lorsque $\dim \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \dim_x X$, A est une algèbre de polynômes et ceci entraîne que $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et intégralement clos. □

Lemme 13.30. — *Soient X une variété algébrique, et $x \in X$. Les composantes irréductibles de X contenant x sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$. En particulier, si $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre, alors x appartient à une unique composante irréductible de X.*

Démonstration. — Soit U un ouvert affine de X contenant x et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $k[U]$ correspondant à x. D'une façon générale, les composantes irréductibles U_i de U correspondent aux idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$ de $k[U]$, et comme $\mathcal{O}_{X,x} = k[U]_{\mathfrak{m}}$, les idéaux premiers miminaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ sont les $\mathfrak{p}_i\mathcal{O}_{X,x}$ tels que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{m}$, c.-à-d., $x \in U_i$.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X qui contiennent x. Si Y est une composante irréductible de U contenant x, alors Y est contenu dans une composante irréductible de X qui contient x, donc dans l'un des $U \cap X_i$.

Réciproquement, chaque $U \cap X_i$ est un ouvert non vide de X_i (il contient x), donc est irréductible, et dense dans X_i. De plus, pour $i \neq j$ on ne peut avoir $U \cap X_i \subseteq X_j$, car sinon X_j contiendrait X_i.

Ceci montre que les composantes irréductibles de U contenant x sont exactement les $X_i \cap U$. Le lemme est démontré. □

Définition 13.31. — 1) On dit que $x \in X$ est un point **lisse** de X si $\dim_k T_xX = \dim_x X$. Sinon, si $\dim_k T_xX > \dim_x X$, on dit que x est un point singulier. On dit que X est lisse si tous ses points le sont ; sinon X est dite singulière.

2) On dit que $x \in X$ est un point **normal** si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est **intègre et intégralement clos**, et X est **normale** si tout $x \in X$ est normal. D'après la proposition 13.29, tout point lisse est normal, et donc X est normale si elle est lisse.

3) Si x est un point normal, il résulte du lemme précédent que x est contenu dans une unique composante irréductible de X. Donc, si X est normale, ses composantes irréductibles sont deux à deux disjointes, donc sont les composantes connexes de X. Par conséquent, les composantes connexes d'une variété normale sont **irréductibles**.

Théorème 13.32. — *Soit X une variété algébrique. L'ensemble Rég(X) des points lisses est un ouvert dense.*

Démonstration. — D'après la proposition 13.29, $\mathrm{Rég}(X)$ est contenu dans l'ouvert de X formé des points qui n'appartiennent qu'à une seule composante irréductible de X. Il suffit donc de montrer que si X est irréductible alors $\mathrm{Rég}(X)$ est un ouvert non-vide. En recouvrant X par des ouverts affines, on se ramène au cas où X est irréductible et affine.

Posons alors $A = k[X]$, $K = k(X)$ et $M = \Omega_X$. On sait, d'après 13.7 c), que $K \otimes_A M = \Omega_{K/k}$, et d'après 13.24,

$$\dim_K(K \otimes_A M) = \dim_K \Omega_{K/k} = \deg.\mathrm{tr}_k K = \dim X.$$

Dautre part, d'après la proposition 13.11, on a

$$\mathrm{Rég}(X) = \{x \in X \mid \dim_k(M_x/\mathfrak{m}_x M_x) = \dim X\}.$$

La proposition 13.25 entraîne alors que $\mathrm{Rég}(X)$ est un ouvert dense de X. Le théorème est démontré. $\square$

13.8. Morphismes séparables et morphismes birationnels. —

Définition 13.33. — Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de variétés. On rappelle que ϕ est dit **dominant** si $\phi(X)$ est dnes dans Y. Comme, d'après le théorème de constructibilité de Chevalley, $f(X)$ contient un ouvert dense de son adhérence, ceci équivaut à dire que $f(X)$ contient un ouvert dense $V \subseteq Y$. Dans ce cas, pour tout ouvert affine $U \subseteq V$, le comorphisme $\phi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U))$ est injectif.

Par conséquent, si X et Y sont de plus supposées irréductibles, alors ϕ^* induit un morphisme de corps $k(Y) \hookrightarrow k(X)$.

Définition 13.34. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés irréductibles. On dit que f est **séparable** s'il est dominant et si l'extension $k(Y) \subseteq k(X)$ est séparablement engendré (*cf.* 13.16).

On dit que ϕ est **birationnel** s'il est dominant et si ϕ^* induit un isomorphisme $k(Y) \xrightarrow{\sim} k(X)$.

Proposition 13.35. — *ϕ est birationnel si, et seulement si, il existe un ouvert non-vide W de Y tel que ϕ induise un isomorphisme de $\phi^{-1}(W)$ sur W.*

Démonstration. — La condition est clairement suffisante. Réciproquement, supposons ϕ birationnel ; en particulier, ϕ est dominant. Soit V un ouvert affine de Y contenu dans $\phi(X)$, et soit U un ouvert affine non vide contenu dans $\phi^{-1}(V)$. Alors $\phi(U)$ est dense dans V et donc $\phi^* : k[V] \to k[U]$ est injectif. Comme $k[U]$ est une k-algèbre de type fini, il existe $f_1, \ldots, f_n \in k[U]$ tels que $k[U] = k[V][f_1, \ldots, f_n]$. Or, d'après l'hypothèse, on a $\mathrm{Frac}(k[V]) = \mathrm{Frac}(k[U])$. Par conséquent, il existe $g \in k[V]$ tel que $gf_i \in k[V]$ pour tout i. Alors, $k[V]_g = k[U]_g$ et, par conséquent, ϕ induit un isomorphisme entre les ouverts affines $D(\phi^*(g)) \subseteq U$ et $D(g) \subseteq V$. $\square$

Remarque 13.36. — Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, le morphisme $k \to k$, $x \mapsto x^p$ est bijectif mais pas birationnel. Il n'est pas séparable non plus, car l'extension correspondante $k(T^p) \subset k(T)$ est algébrique non séparable.

L'intérêt de la notion de séparabilité apparaît, par exemple, dans le théorème suivant (*cf.* [**Sp**, Thm. 5.1.6]).

Théorème 13.37. — *Soient X, Y des variétés irréductibles* **affines** *et $\phi : X \to Y$ un morphisme* **séparable**. *On suppose $\dim X = \dim Y$. Alors il existe un ouvert W de Y contenu dans $\phi(X)$ tel que, pour tout $v \in V$, l'ensemble $\phi^{-1}(v)$ soit de cardinal $[k(Y) : k(X)]$.*

En particulier, si ϕ est injectif, il est birationnel.

Démonstration. — Posons $K = k(Y)$ et $L = k(X)$. Alors

$$\deg.\mathrm{tr}_k K = \dim Y = \dim X = \deg.\mathrm{tr}_k L$$

et donc l'extension L/K est algébrique, et de type fini (car L/k l'est déjà), donc de degré fini. Alors KB, étant une sous-K-algèbre de L, est intègre et de dimension finie sur K, donc est un corps, donc égale L. Par conséquent, tout $x \in L$ s'écrit $x = b/s$, avec $b \in k[X]$ et $s \in k[Y]$.

De plus, on a supposé l'extension L/K séparable. Donc, d'après le théorème de l'élément primitif, l'extension L/K est monogène, c.-à-d., il existe $f \in L$ tel que $L = K[f]$. D'après ce qui précède, on peut supposer $f \in k[X]$.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des générateurs de la k-algèbre de type fini $k[X]$; d'après ce qui précède, chaque x_i s'écrit comme un polynôme P_i en f, à coefficients dans $k(Y)$. Soit $a \in k[Y]$ tel que les coefficients de tous les P_i appartiennent à $k[Y]_a$. Alors l'image inverse par ϕ de l'ouvert affine $V = D(a)$ de Y est l'ouvert affine $U = D(a \circ \phi)$ de X, et le comorphisme ϕ^* induit un isomorphisme

$$k[U] \xrightarrow{\sim} (k[V])[f],$$

car les x_i appartiennent à $(k[V])[f]$. Soit T une indéterminée ; on a donc un morphisme surjectif (de $k[V]$-algèbres) $(k[V])[T] \twoheadrightarrow k[U]$. Son noyau n'est pas nécessairement un idéal principal de $(k[V])[T]$, mais on s'y ramène de la façon suivante.

Soit $P = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_d$ le polynôme minimal de f sur $K = k(V)$, soit $b \in k[V]$ tel que les coefficients a_i de P appartiennent à $k[V]_b$, et soit $g = ab$. Alors, l'image inverse par ϕ de l'ouvert affine $V' = D(g)$ de V est l'ouvert affine $U' = D(g \circ \phi)$ de U, on a $P \in (k[V'])[T]$ et ϕ^* induit un isomorphisme

$$(*) \qquad \varepsilon : k[U'] \xrightarrow{\sim} (k[V'])[T]/(P).$$

En effet, posons $A = k[V']$ et soit $Q \in A[T]$ tel que $Q(f) = 0$. Comme P est unitaire, on peut faire la division euclidienne de Q par P ; alors le reste R vérifie $R(f) = 0$ et est nul ou bien de degré $< \deg P$. Comme P est le polynôme minimal de f dans $K[T]$, la seconde possibilité est exclue, donc $R = 0$ et P divise Q dans $A[T]$. Ceci prouve $(*)$.

Alors, le morphisme $\tau : U' \to V' \times k$, $x \mapsto (\phi(x), f(x))$ est une immersion fermée, car son comorphisme n'est autre que ε. Il en résulte qu'on peut identifier U' à la sous-variété fermée de $V' \times k$ suivante :

$$U' = \{(y,t) \in V' \times k \mid P_y(t) = 0\},$$

où $P_y = T^d + a_1(y)T^{d-1} + \cdots + a_d(y)$ désigne le polynôme P dans lequel on a spécialisé les coefficients en y. Donc, en chaque $y \in V'$, la fibre $\phi^{-1}(y)$ s'identifie à l'ensemble des racines (dans k !) du polynôme spécialisé P_y.

Il reste à voir qu'il existe un ouvert non vide W de V' tel que P_y ait d racines distinctes pour tout $y \in W$. Ceci découle de l'existence du polynôme discriminant, comme suit.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_d$ (où $d = \deg P$ et $f = f_1$) les racines de P dans une clôture algébrique $\overline{L}$ de L. Comme f est séparable (car L/K l'est), les f_i sont deux à deux distincts, et donc le discrimant de P :

$$\operatorname{disc}(P) = \prod_{i<j}(f_i - f_j)^2$$

est un élément non nul de $\overline{L}$. En fait, comme c'est un polynôme symétrique en les f_i, c'est un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires des f_i, qui sont les coefficients de P, donc des éléments de $k[V']$. Donc $\operatorname{disc}(P)$ est un élément non nul δ de $k[V']$.

Soit W l'ouvert affine $D(\delta)$ de V'. Pour tout $y \in W$, le discriminant de P_y égale $\delta(y)$, qui est non nul, donc P_y a d racines distinctes. Le théorème est démontré. □

Corollaire 13.38. — *Soient X, Y des variétés irréductibles et $\phi : X \to Y$ un morphisme* **bijectif et séparable**. *Alors ϕ est birationnel.*

Démonstration. — Comme ϕ est bijectif, $\dim X = \dim Y$. Soit V un ouvert affine non vide de Y et soit U un ouvert affine non vide de X contenu dans $\phi^{-1}(U)$. Alors la restriction de ϕ à U est un morphisme $U \to V$ séparable et injectif. D'après la proposition précédente, ϕ induit un isomorphisme $k(V) \xrightarrow{\sim} k(U)$, et donc ϕ est birationnel. □

13.9. Séparabilité et différentielles. —

Théorème 13.39. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est séparable.*

(ii) *Il existe U ouvert dense de X tel que : $\forall x \in U$, $\mathrm{d}_x f$ est surjective.*

(iii) *Il existe un point lisse x tel que $\mathrm{d}_x f$ soit surjective.*

Démonstration. — On peut supposer X et Y affines. Comme Rég(X) est ouvert et dense dans X, alors (ii) $\Rightarrow$ (iii). Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Posons $Z = \overline{f(X)}$. C'est une sous-variété fermée irréductible de Y. On va montrer que $Z = Y$. Notons τ l'inclusion $Z \hookrightarrow Y$, et $\psi : X \to Z$. Soit $y = f(x) = \tau\psi(x)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega_{Y/k} \otimes_{k[Y]} k[X] & \xrightarrow{\tau^*} & \Omega_{Z/k} \otimes_{k[Z]} k[X] & \xrightarrow{\psi^*} & \Omega_{X/k} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{m}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}^2 & \xrightarrow{{}^t(\mathrm{d}_y\tau)} & \mathfrak{m}_{Z,y}/\mathfrak{m}_{Z,y}^2 & \xrightarrow{{}^t(\mathrm{d}_x\psi)} & \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.
\end{array}$$

On sait que ${}^t(\mathrm{d}_y\tau)$ est surjective. D'autre part, par hypothèse, ${}^t(\mathrm{d}_x f) = {}^t(\mathrm{d}_x\psi) \circ {}^t(\mathrm{d}_y\tau)$ est injective. Il en résulte que ${}^t(\mathrm{d}_y\tau)$ est un isomorphisme, et ${}^t(\mathrm{d}_x\psi)$ injective.

Appliquant la proposition 13.26.(ii) au morphisme τ^* de $M := \Omega_Z \otimes_{k[Z]} k[X]$ vers $N := \Omega_X$, on obtient que M_y est libre, donc de rang égal à

$$\dim_{k(X)} \Omega_{Z/k} \otimes_{k[Z]} k(X) = \dim_{k(Z)} \Omega_{Z/k} \otimes_{k[Z]} k(Z) = \dim Z.$$

Ceci est donc aussi la dimension de $\overline{M}_y = T_y^* Z$. Comme $\mathrm{d}_y\tau$ est un isomorphisme, on obtient

$$\dim Y \leq \dim_k T_y^* Y = \dim_k T_y Z = \dim Z.$$

Ceci entraîne que $Z = Y$, et donc f est dominant. D'autre part, il résulte aussi de 13.26.(ii) que $\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \longrightarrow \Omega_X$ est injectif. Comme

$$\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \otimes_{k[X]} k(X) \cong \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k(Y) \otimes_{k(Y)} k(X) \cong \Omega_{k(Y)} \otimes_{k(Y)} k(X),$$

on obtient que $\Omega_{k(Y)} \otimes_{k(Y)} k(X) \to \Omega_{k(X)}$ est injective. Donc f est séparable. Ceci montre que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Réciproquement, supposons f séparable. Alors f est dominant et, utilisant le raisonnement précédent en sens inverse, on obtient que $\Omega_{k(Y)} \otimes_{k(Y)} k(X) \to \Omega_{k(X)}$ est injectif, et donc le morphisme $\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \to \Omega_X$ est génériquement injectif. Grâce à la proposition 13.26.(i), on obtient alors que (i) $\Rightarrow$ (ii). Le théorème est démontré. □

Remarque 13.40. — L'hypothèse de lissité dans (iii) est nécessaire : considérer $C \hookrightarrow k^2$, où C est une courbe singulière (par exemple $y^2 - x^3 = 0$).

13.10. Application aux espaces homogènes. — Reprenons ici quelques définitions et résultats du paragraphe 12.1.

Définition 13.41. — Soient G un groupe algébrique et X une G-variété. On dit que X est une G-variété **homogène** si l'action de G est transitive (c.à.d., si l'on a $X = Gx$ pour un, et donc tout, $x \in X$).

Dans ce cas, X est lisse (et donc normale), car l'ensemble des points lisses est (un ouvert) non vide, et comme G agit par automorphismes de variété, si x est lisse il en est de même de tous ses translatés gx.

Lemme 13.42. — *Soit X une G-variété homogène.*

a) *Les composantes irréductibles de X coïncident avec les composantes connexes, et chacune est une variété homogène sous G^0. Elles sont translatées l'une de l'autre, et sont toutes de dimension* $\dim G - \dim G_x$ (*pour x arbitraire*).

b) *Si X et G_x sont irréductibles, alors G aussi. En particulier, si l'on a une suite exacte $1 \to K \to G \to H \to 1$ avec H, K connexes, alors G l'est aussi.*

Démonstration. — Soient $e = g_1, \ldots, g_n$ un système de représentants de G/G^0, et $x \in X$. Alors $G = G^0 g_1 \sqcup \cdots \sqcup G^0 g_n$ et, comme les $G^0 g_i x$ sont deux à deux disjoints ou égaux, on peut supposer que $X = G^0 x \sqcup \cdots \sqcup G^0 g_m x$, pour un $m \leq n$. L'une au moins de ces G^0-orbites est fermée, d'après le corollaire 4.28. Or, pour $i, j = 1, \ldots, m$, on a $G^0 g_j x = g_j g_i^{-1} G^0 g_i x$. Il en résulte que les $G^0 g_i x$, $1 \leq i \leq m$, sont toutes fermées et ouvertes. Ce sont donc les composantes connexes de X. Enfin, notons ϕ le morphisme $G \to X$, $g \mapsto gx$. Pour tout g, on a $\phi^{-1}(gx) = gG_x$. D'après le théorème 4.18, on en déduit que chaque composante de X est de dimension $\dim G - \dim G_x$. Ceci prouve a).

Voyons b). D'après a), on a $X = G^0 x$. Soit $g \in G$. Alors, $gx = hx$ pour un $h \in G^0$, et donc $h^{-1} g \in G_x$. Or $G_x \subseteq G^0$, puisque G_x est connexe, et donc $g \in G^0$. Ceci prouve le lemme. □

Lemme 13.43. — *Soient G un groupe algébrique, X, Y deux G-variétés homogènes irréductibles, et $\phi : X \to Y$ un morphisme G-équivariant birationnel. Alors ϕ est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition 13.35, il existe un ouvert non vide V de Y tel que ϕ induise un isomorphisme de $\phi^{-1}(V)$ sur V. Alors, pour tout $g \in G$, ϕ induit un isomorphisme de $\phi^{-1}(gV)$ sur gV, et le lemme en résulte. □

Proposition 13.44. — *Soient G un groupe algébrique, X, Y deux G-variétés homogènes et $\phi : X \to Y$ un morphisme G-équivariant. Alors :*

a) *Si $\mathrm{d}_x \phi$ est surjective pour un $x \in X$, elle l'est pour tout x. Dans ce cas, ϕ est séparable.*

b) *Si ϕ est bijectif et séparable, c'est un isomorphisme.*

c) *Si $\phi : G \to H$ est un morphisme bijectif de groupes algébriques tel que $\mathrm{d}_e \phi$ soit surjective, ϕ est un isomorphisme.*

Démonstration. — a) Notant $\lambda_X(g)$ et $\lambda_Y(g)$ les automorphismes de X et Y induits par $g \in G$, on a $\phi \circ \lambda_X(g) = \lambda_Y(g) \circ \phi$. Donc $\mathrm{d}_{gx}\phi \circ \mathrm{d}_x\lambda_X(g) = \mathrm{d}_{\phi(x)}\lambda_Y(g) \circ \mathrm{d}_x\phi$. Comme $\mathrm{d}_x\lambda_X(g)$ et $\mathrm{d}_{\phi(x)}\lambda_Y(g)$ sont des isomorphismes, ceci entraîne la première assertion de a). La seconde résulte alors du théorème 13.39.

b) Supposons ϕ bijectif et séparable. Par G-équivariance, il résulte de 13.39 que $\mathrm{d}_x\phi$ est surjective pour tout $x \in X$.

Soit Y_i une composante connexe de Y et soient $y_i \in Y_i$ et $x_i = \phi^{-1}(y_i)$. D'après le lemme 13.42, on a $Y_i = G^0 y_i$ et, de même, $X_i := G^0 x_i$ est une composante connexe de X. Comme ϕ est bijectif, on a $X_i = \phi^{-1}(Y_i)$, et la restriction de ϕ à X_i est bijective, et séparable (car $\mathrm{d}_{x_i}\phi$ est surjective), donc birationnelle. D'après le lemme précédent, c'est donc un isomorphisme de $X_i = \phi^{-1}(Y_i)$ sur Y_i. Comme Y_i était arbitrairement choisie, ceci prouve b).

c) L'application inverse étant évidemment un morphisme de groupes, il suffit de montrer que ϕ est un isomorphisme de variétés. Or, H un G-espace homogène via $g \cdot h = \phi(g)h$, et ϕ est alors G-équivariant. Le résultat découle alors de a) et b). $\square$

Proposition 13.45. — *Soient X une G-variété et $\phi : G \to X$ un morphisme G-équivariant. Soient $x = \phi(e)$ et $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ son stabilisateur. Comme la restriction de ϕ à G_x est constant,* $\mathrm{Lie}(G_x) \subseteq \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}_e\phi$. *Réciproquement, notant $\psi : G \to Gx$ le morphisme orbite, on a :*

$$\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}_e\phi = \mathrm{Lie}(G_x) \Leftrightarrow \psi \text{ est séparable.}$$

Démonstration. — La première assertion est claire ; prouvons la seconde. D'après la proposition 13.44, ψ est séparable si et seulement si $\mathrm{d}_e\psi = \mathrm{d}_e\phi$ est surjective.

Comme les fibres de ψ sont toutes de dimension $\dim G_x$ (ce sont les classes gG_x), on a $\dim Gx = \dim G - \dim G_x$. Comme Gx est lisse, on a donc

$$\dim T_x Gx = \dim Gx = \dim G - \dim G_x = \dim \mathrm{Lie}(G) - \dim \mathrm{Lie}(G_x).$$

Comme $\mathrm{Lie}(G_x) \subseteq \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}_e\phi$, on en déduit que $\mathrm{d}_e\phi$ est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\phi = \mathrm{Lie}(G_x)$. $\square$

Corollaire 13.46. — *Soit $\phi : G \to H$ un morphisme bijectif de groupes algébriques. Si $\mathrm{d}_e\phi$ est* **injective**, *alors ϕ est un isomorphisme.*

14. Quotients G/H

14.1. Morphismes plats et théorème de platitude générique. —

Définition 14.1. — Soient A un anneau commutatif et M un A-module. On dit que M est **plat** si le foncteur $M \otimes_A -$, de la catégorie $\mathrm{Mod}(A)$ des A-modules vers elle-même, est exact.

Lemme 14.2. — *Soient B une A-algèbre et M un A-module plat. Alors le B-module $B \otimes_A M$ est plat.*

Démonstration. — En effet, pour tout B-module N, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N).$$

Par conséquent, $\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, -)$ est la restriction à $\mathrm{Mod}(B)$ du foncteur exact $\mathrm{Hom}_A(M, -)$. Ceci prouve que $B \otimes_A M$ est un B-module plat. $\square$

Proposition 14.1. — *Soit M un A-module. Alors M est plat si, et seulement si, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$, le localisé $M_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat.*

Démonstration. — Voir [**AM**, Prop. 3.10]. $\square$

Définition et proposition 14.3. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés.*

1) *On dit que f est* **plat** *si, pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-module plat.*

2) *f est plat si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour tout $x \in X$, soit V un ouvert affine de Y contenant $f(x)$ et U un ouvert affine de $f^{-1}(V)$ contenant x ; alors $k[U]$ est un $k[V]$-module plat.*

3) *Supposons f plat. Alors, pour toute variété Z, le morphisme $f \times \mathrm{id}_Z$: $X \times Z \to Y \times Z$ est plat.*

Démonstration. — L'équivalence dans 2) résulte de la proposition précédente et est laissée au lecteur. L'assertion 3) en découle. En effet, supposons f plat et soit $(x, z) \in X \times Z$. Soit V, resp. W, un voisinage ouvert affine de $y := f(x)$, resp. z, et soit U un voisinage ouvert affine de x contenu dans $f^{-1}(V)$. Par hypothèse, $k[U]$ est un $k[V]$-module plat.

Alors $V \times W$ est un voisinage ouvert affine de (y, z), et $k[U \times W] \cong k[U] \otimes k[W]$ est plat sur $k[V] \otimes k[W]$, d'après le lemme 14.2. Ceci prouve que $f \times \mathrm{id}_Z$ est plat. $\square$

***Théorème 14.4* (plat $\Rightarrow$ universellement ouvert)**. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat de variétés algébriques. Alors f est ouvert, et universellement ouvert (c.-à-d., $f \times \mathrm{id}_Z$ est ouvert, pour toute variété Z).*

Démonstration. — Comme $f \times \mathrm{id}_Z$ est plat, il suffit de montrer l'assertion concernant la platitude. Elle découle de [**Ma1**], (5.D) Thm. 4 et (6.I) Thm. 8. $\square$

***Proposition 14.5* (Théorème de platitude générique)**. — *Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme dominant entre variétés irréductibles. Il existe un ouvert non-vide U de Y tel que $\phi : \phi^{-1}(U) \to U$ soit plat.*

Démonstration. — Ceci résulte de [**Ma1**, §22, Thm. 52], combiné avec l'équivalence 2) dans 14.3 ci-dessus. $\square$

Corollaire 14.6. — *Soient G un groupe algébrique, X, Y deux G-variétés homogènes, et $\phi : X \to Y$ un morphisme G-équivariant. Alors ϕ est universellement ouvert.*

Démonstration. — Grâce au lemme 12.2, on se ramène au cas où G est connexe, et X, Y irréductibles. D'après ce qui précède (14.5 et 14.4), il existe un ouvert non-vide U de Y tel que $\phi : \phi^{-1}(U) \to U$ soit universellement ouvert. Comme ϕ est G-équivariant, chaque translaté gU a la même propriété. Comme ils recouvrent X, on en déduit le corollaire. $\square$

Pour une autre approche des morphismes universellement ouverts, voir [**Sp**, 5.1.6–5.1.7], où est démontré le théorème suivant.

Théorème 14.7 ([**Sp**], 5.1.6–7). — *Soient X, Y irréductibles, $\phi : X \to Y$ un morphisme dominant, et $r = \dim X - \dim Y$. Il existe un ouvert dense U de X tel que*

a) *$\phi_{|U}$ soit universellement ouvert.*

b) *Si F est une sous-variété fermée de Y et Z une composante irréductible de $\phi^{-1}(F)$ rencontrant U, alors $\dim Z = \dim F + r$.*

On en déduit le corollaire suivant, qui généralise le théorème 4.24

Corollaire 14.8. — *Soient G un groupe algébrique, X, Y deux G-variétés homogènes, $\phi : X \to Y$ un morphisme G-équivariant, et $r = \dim X - \dim Y$.*

a) *Pour toute variété W, le morphisme $\phi \times \mathrm{id}_W : X \times W \to Y \times W$ est ouvert.*

b) *Si F est une sous-variété fermée de Y et Z une composante irréductible de $\phi^{-1}(F)$, alors $\dim Z = \dim F + r$.*

Démonstration. — Grâce au lemme 12.2, on se ramène au cas où G est connexe, et X, Y irréductibles. Soit alors U comme dans le théorème 14.7. Utilisant l'équivariance de ϕ, on vérifie que tout translaté gU a les mêmes propriétés. Comme ils recouvrent X, on en déduit le corollaire. $\square$

14.2. Espace projectif d'un G-module. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n + 1$. Notons π le morphisme $V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$. On rappelle que $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ est une variété algébrique (voir [**Sp**, §1.7]). D'abord, on munit $\mathbb{P}(V)$ de la topologie quotient, c.-à-d., $U \subset \mathbb{P}(V)$ est un ouvert si, et seulement si, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de Zariski de $V \setminus \{0\}$. Alors, $\mathbb{P}(V)$ est recouvert par les ouverts $D(f) := \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid f(x) \neq 0\}$, pour $f \in V^*$. On pose $\mathcal{O}(D(f)) = S[V^*/kf] \cong k[\mathrm{Ker}\, f]$; on peut vérifier que ceci définit un faisceau de fonctions $\mathcal{O}$ sur $\mathbb{P}(V)$. Plus concrètement, si $\{e_0,\dots,e_n\}$ est une base de V, et $\{e_0^*,\dots,e_n^*\}$ la base duale, alors $\mathbb{P}(V)$ est recouvert par les ouverts affines $D_i := \{e_i^* \neq 0\}$, et $\mathcal{O}(D_i) = k[X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_n]$, où $X_j = e_j^*/e_i^*$.

Lemme 14.9. — *Soit $v \in V \setminus \{0\}$. Alors* $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\pi_v) = kv$ *et* $T_{[v]}\mathbb{P}(V) \cong V/kv$.

Démonstration. — On peut supposer $v = e_0$. Alors π envoie l'ouvert $\{e_0^* \neq 0\}$ de $V \setminus \{0\}$ dans D_0, via $(x_0,\dots,x_n) \mapsto (x_1/x_0,\dots,x_n/x_0)$. Alors $\pi(v) = 0$ et le comorphisme $\pi^\# : k[X_1,\dots,X_n] \to k[T_0^{\pm},T_1\dots,T_n]$ est donné par $X_j \mapsto T_jT_0^{-1}$. Les images de $T_0 - 1, T_1,\dots,T_n$ forment une base de $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$, et l'on a un isomorphisme $V \cong (\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^*$, induit par l'évaluation $\langle e_i, T_j\rangle = \delta_{ij}$. De plus, les images des X_i forment une base de $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$, et l'on a $\pi^\#(X_j) = T_j$ dans $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$ (car $T_0 - 1 \in \mathfrak{m}_v$). Donc, pour $i = 0,\dots,n$ et $j = 1,\dots,n$, on a $\mathrm{d}\pi_v(e_i)(X_j) = \langle e_i, \pi^\#(X_j)\rangle = \langle e_i, T_j\rangle = \delta_{ij}$. Le lemme en résulte. □

Proposition 14.10. — *Soit V un G-module rationnel de dimension finie. Alors G agit morphiquement dans $\mathbb{P}(V)$.*

Démonstration. — On peut supposer $G = \mathrm{GL}(V)$. Notons θ l'application $G \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, $(g,[x]) \mapsto [gx]$. Il suffit de vérifier que, pour $\ell = 0,\dots,n$, $U_\ell := \theta^{-1}(D_\ell)$ est un ouvert de $G \times \mathbb{P}(V)$, et que $\theta_\ell : U_\ell \to D_\ell$ est un morphisme. Or $U_\ell = \{(g,[x_0,\dots,x_n]) \mid \sum_{j=0}^n g_{\ell j}x_j \neq 0\}$, et on vérifie que chaque $U_{\ell,i} := U_\ell \cap (G \times D_i)$ est un ouvert de $G \times D_i$. De plus, pour $m = 0,\dots,n$, $m \neq \ell$, on a

$$X_m(gx) = \frac{\sum_j g_{mj}x_j}{\sum_j g_{\ell j}x_j},$$

et ceci est une fonction régulière sur U_ℓ ; en effet, sur chaque $U_{\ell,i}$ on a $X_m(gx) = \big(\sum_j g_{mj}x_j/x_i\big)/\big(\sum_j g_{\ell j}x_j/x_i\big)$. La proposition est démontrée. □

14.3. Le théorème des semi-invariants de Chevalley. — Soient G un groupe algébrique affine, et H un sous-groupe fermé. Posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. On note $X(H)$ le groupe des caractères de H (c.-à-d., des morphismes de groupes algébriques $H \to k^\times$).

***Théorème 14.11* (Chevalley)**. — *Il existe un G-module rationnel V de dimension finie et un sous-espace V_1 de dimension* 1, *tels que* $\mathrm{Stab}_G(V_1) = H$ *et* $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(V_1) = \mathfrak{h}$.

Si de plus $X(H) = \{1\}$, alors, pour tout $v_1 \in V_1$ non nul, on a $\mathrm{Stab}_G(v_1) = H$ *et* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(v_1) = \mathfrak{h}$.

Démonstration. — Soient I l'idéal de H dans $k[G]$. On considère la représentation rationnelle ρ de G sur $k[G]$ définie par $(\rho(g)\phi)(g') = \phi(g'g)$, pour $\phi \in k[G]$, $g, g' \in G$. On a déjà vu que l'action dérivée $\mathrm{d}\rho$ de $\mathfrak{g}$ coïncide avec l'action induite par l'identification $\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(k[G])^G$ (dérivations invariantes).

Soient $x_1, \dots, x_s$ des générateurs de l'idéal I, W le sous-$\rho(G)$-module qu'ils engendrent, et $E = W \cap I$. Alors E est stable par $\rho(H)$, et contient les x_i.

Lemme 14.12. — *On a* $H = \mathrm{Stab}_G(E)$, *et* $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(E)$.

Démonstration. — D'après le lemme 6.24, on a $H = \mathrm{Stab}_G(I)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(I)$. Comme W est stable par G et $\mathfrak{g}$, on voit que si $g \in G$ ou $X \in \mathfrak{g}$ stabilise I, il stabilise aussi $I \cap W = E$. Donc $\mathrm{Stab}_G(I) \subseteq \mathrm{Stab}_G(E)$, et $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(I) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(E)$. Les inclusions réciproques sont claires, puisque E engendre I et que G agit par automorphismes d'algèbres, et $\mathfrak{g}$ par dérivations. Le lemme est démontré. $\square$

Lemme 14.13. — *Soient W un k-espace vectoriel de dimension finie, E un sous-espace de dimension d, et $D = \Lambda^d E \subseteq \Lambda^d W$. Soient $g \in \mathrm{GL}(W)$ et $X \in \mathfrak{gl}(W)$. Considérons les actions induites sur $\Lambda^d(W)$. Alors $gD = D \Leftrightarrow gE = E$ et $XD \subseteq D \Leftrightarrow XE \subseteq E$.*

Démonstration. — C'est un résultat d'algèbre linéaire bien connu, voir par exemple [**Bo**, Lemma 5.1] ou [**Sp**, Lemma 5.5.2] ou [**Hu1**, Lemma 11.1]. $\square$

Revenons à la preuve du théorème. On a ainsi obtenu un G-module rationnel W de dimension finie, et un sous-espace E tels que $H = \mathrm{Stab}_G(E)$, et $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(E)$. La première assertion du théorème en découle, en prenant $V = \Lambda^d W$ et $V_1 = \Lambda^d E$. Observons qu'alors H agit sur V_1 par un caractère χ. Soit $v_1 \in V_1 \setminus \{0\}$. Si $X(H) = \{1\}$, alors H agit trivialement sur V_1, et $\mathfrak{h}$ aussi (car l'application $h \mapsto hv_1$ est constante, donc sa dérivée nulle) et l'on a donc $H \subseteq \mathrm{Stab}_G(v_1) \subseteq \mathrm{Stab}_G(V_1) = H$ et $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(v_1) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(V_1) = \mathfrak{h}$, d'où les égalités annoncées. Le théorème est démontré. $\square$

On a de plus la proposition ci-dessous. Soient $v \in V_1 \setminus \{0\}$ et $x = [v] \in \mathbb{P}(V)$.

Proposition 14.14. — *On a* $\mathrm{Stab}_G(x) = H$, $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{h}$, *et le morphisme* $\phi : G \to Gx$, $g \mapsto gx$ *est séparable.*

Si de plus $X(H) = \{1\}$, *soit le morphisme* $\alpha : G \to Gv$, $g \mapsto gv$ *est séparable.*

Démonstration. — Il résulte de la proposition 6.20.b) que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{d}\alpha(X) = Xv$. Or $\phi = \pi \circ \alpha$ et donc $\mathrm{d}\phi(X) = \mathrm{d}_v\pi(\mathrm{d}\alpha(X)) = \mathrm{d}_v\pi(Xv)$. D'après le lemme 14.2, il vient $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv \subseteq V_1\} = \mathfrak{h}$. Donc $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{Lie}(G_x)$, et ϕ est séparable d'après le corollaire 13.45.

De plus, si $X(H) = 1$ alors $H = G_v$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(v) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\alpha$, donc α est séparable dans ce cas. $\square$

14.4. Unicité de G/H. — Supposons donnés une G-variété homogène G/H et un morphisme G-équivariant séparable $\pi : G \to G/H$, tels que H soit le stabilisateur de $\pi(1)$. Alors

***Théorème 14.15* (Le quotient G/H).** — a) *$\pi : G \to G/H$ est séparable et plat. Pour tout ouvert U de G/H, $\pi^*(k[U])$ égale*

$$k[\pi^{-1}(U)]^H := \{\phi \in k[\pi^{-1}(U)] \mid \phi \text{ est constante sur les classes } gH\}.$$

Donc, $k[U] = \{\psi : U \to k \mid \psi \circ \pi \in k[\pi^{-1}(U)]\}$.

b) *G/H vérifie la propriété universelle (de quotient par H) suivante : pour tout morphisme de variétés $\alpha : G \to Z$ constant sur les classes gH, il existe un unique morphisme $\beta : G/H \to Z$ tel que $\alpha = \beta \circ \pi$. Par conséquent, G/H est unique à isomorphisme près.*

c) *De plus, si G est connexe, π induit un isomorphisme $k(G/H) \cong k(G)^H$.*

***Corollaire 14.16*.** — *La variété G/H est toujours quasi-projective, et lorsque $X(H) = \{1\}$ elle est quasi-affine.*

Démonstration. — Par hypothèse, π est séparable ; il est ouvert d'après le théorème 14.4. Soit U un ouvert de G/H. Comme π est surjectif, son comorphisme induit une injection $k[U] \subseteq k[\pi^{-1}(U)]^H$. On veut montrer que cette inclusion est une égalité.

D'abord, on se ramène au cas où U est irréductible. Soient $X_1, \dots, X_r$ les composantes connexes de G/H. Alors U est la réunion disjointe des $U_i = U \cap X_i$ qui sont non vides, et chaque tel U_i est irréductible, puisque X_i l'est. Quitte à renuméroter les X_i, on peut supposer que

$$U = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s.$$

Alors $\pi^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des $\pi^{-1}(U_i)$, d'où

$$k[\pi^{-1}(U)] = k[\pi^{-1}(U_1)] \oplus \cdots \oplus k[\pi^{-1}(U_s)],$$

et π^* envoie chaque $k[U_i]$ dans $k[\pi^{-1}(U_i)]^H$. Donc, en remplaçant U par l'un des U_i, il suffit de montrer l'assertion a) lorsque U est irréductible.

Dans ce cas, soient $f \in k[V]^H$ et $W \subset V \times k$ son graphe. Considérons le morphisme $\phi = (\pi, \mathrm{id}) : V \times k \to U \times k$. Comme π est universellement ouvert (14.4) et W est un fermé tel que $W = \pi^{-1}\pi(W)$, alors $\phi(W) := W'$ est une sous-variété fermée de $U \times k$. Soit p la restriction à W' de la projection pr_U. Alors $p \circ \phi = \pi$ et, comme f est constante sur les classes gH, p est injectif et donc bijectif. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi=(\pi,f)} & W' \subset U \times k \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ U & = & U \end{array} \quad .$$

De plus, pour tout $v \in V$, on a $\mathrm{d}_v\pi = \mathrm{d}_{\phi(v)}p \circ \mathrm{d}_v\phi$, et comme $\mathrm{d}_v\pi$ est surjective, $\mathrm{d}_{\phi(v)}p$ l'est aussi.

Soit W_1' une composante irréductible de W. Alors la restriction de p à W_1 est séparable et injective, donc birationnelle, donc induit un isomorphisme d'un ouvert dense W_1^0 de W_1' sur un ouvert U_1 de U. Ceci entraîne que W' est irréductible. En effet, si W_2' est une seconde composante irréductible, et si W_2^0 et U_2 sont définis de façon analogue, alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert non vide (car U est irréductible), donc $p^{-1}(U_1 \cap U_2)$ est dense dans W_1' et W_2', d'où $W_1' = W_2'$.

Donc W' est irréductible, et $p : W' \to U$ est bijectif et séparable, donc birationnel d'après le corollaire 13.38. D'après une version du théorème principal de Zariski énoncée dans la sous-section suivante (14.20), on a $k[W'] = p^*k[U]$. D'autre part, on a $pr_2 \in k[W']$ et donc $f = \phi^*(pr_2) \in \phi^*p^*k[U] = \pi^*k[U]$. Ceci prouve l'assertion a).

Prouvons b). Soit $\alpha : G \to Z$ un morphisme constant sur les classes gH. Alors l'application $\beta : G/H \to Z$ définie par $\beta(gH) = \alpha(g)$ est un morphisme. En effet, soient U' un ouvert de Z, V l'ouvert $\alpha^{-1}(U')$ de G, et $U = \beta^{-1}(U')$. Alors $V = \pi^{-1}(U)$ et $U = \pi(V)$. Comme π est ouvert, U est un ouvert de G/H. De plus, si $f \in k[U]$ alors $f \circ \alpha = (f \circ \beta) \circ \pi$ appartient à $k[V]^H$. Donc, d'après a), $f \circ \beta \in k[U]$. Ceci montre que β est un morphisme, et b) est démontré.

Prouvons c). D'abord, H opère sur $k(G)$ de la façon suivante : si $h \in H$ et $\phi \in k(G)$, alors $\phi \in k[U]$ pour un ouvert (affine) non-vide de X, et $h\phi$ est l'image dans $k(G)$ de la fonction régulière sur l'ouvert Uh^{-1} définie par

$$(h\phi)(x) = \phi(xh), \quad \forall x \in Uh^{-1}.$$

L'inclusion $k(G/H) \subseteq k(G)^H$ est facile. En effet, si $\phi \in k(G/H)$, il existe un ouvert affine non vide U de G/H tel que $\phi \in k[U]$. Alors $\pi^*(\phi)$ appartient à $k[\pi^{-1}(U)] \subseteq k(G)$ et est H-invariante, donc appartient à $k(G)^H$.

Réciproquement, soit $\phi \in k(G)^H$. Il existe un ouvert affine non vide V de G tel que $\phi \in k[V]$. Alors, ϕ se prolonge en une fonction régulière ψ sur l'ouvert

$$VH := \bigcup_{h \in H} Vh,$$

définie par $\psi(xh) = \phi(x)$ pour tout $x \in V$, $h \in H$. Ceci est bien défini, car si $xh = yh'$ avec $x, y \in V$ et $h, h' \in H$, alors $x = yh'h^{-1}$ d'où

$$\phi(x) = (h'h^{-1}\phi)(y) = \phi(y)$$

puisque $h'h^{-1}\phi = \phi$. Posant $U = \pi(VH)$, on a $VH = \pi^{-1}(U)$ et donc $\psi \in k[\pi^{-1}(U)]$. D'après b), il existe $f \in k[U]$ tel que $\psi = \pi^*(f)$. Comme ψ et ϕ ont même image dans $k(G)$, ceci montre que $\phi \in k(G/H)$. Ceci prouve c). Le théorème est démontré. $\square$

***Remarque 14.17* (Unicité sans le théorème principal de Zariski)**
Si on veut éviter d'avoir recours au théorème principal de Zariski, on peut montrer l'unicité de G/H comme G-variété homogène, en montrant qu'il vérifie la propriété universelle suivante (plus faible que celle établie dans le théorème précédent) :

Pour tout morphisme G-équivariant d'espaces homogènes $\alpha : G \to Y$ tel que $\alpha(h) = \alpha(1)$, pour tout $h \in H$, il existe un unique morphisme (G-équivariant) $\beta : G/H \to Y$ tel que $\alpha = \beta \circ \pi$.

Démonstration de la propriété universelle ci-dessus. — Soit $\alpha : G \to Y$ un morphisme G-équivariant tel que $\alpha(h) = \alpha(1)$, pour tout $h \in H$. Montrons l'existence d'un morphisme $\beta : X \to Y$ tel que $\alpha = \beta \circ \pi$ (nécessairement unique, puisque π est surjectif). Considérons le morphisme $\theta = \pi \times \alpha : G \to X \times Y$. Comme θ est G-équivariant, alors $W := \theta(G)$ est ouvert dans son adhérence (*cf.* 4.27), et est donc une sous-variété localement fermée de $X \times Y$. Considérons le diagramme de morphismes G-équivariants

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta=(\pi,\alpha)"] \arrow[d, "\pi"'] & W \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "p"'] & X \times Y \arrow[r, "pr_Y"] \arrow[d, "pr_X"] & Y \\ X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X & \end{tikzcd}$$

où p est la restriction à W de pr_X, et τ l'immersion naturelle. Comme $p \circ \theta = \pi$, alors p est surjectif. Il est aussi injectif : si $\pi(g) = \pi(g')$ alors $g' \in gH$ et donc $\alpha(g') = \alpha(g)$ (par G-équivariance). Donc p est bijectif. De plus, π est séparable, donc $\mathrm{d}_e\pi$ surjective. Mais $\mathrm{d}_e\pi = \mathrm{d}_{\theta(e)}p \circ d_e\theta$, et donc $\mathrm{d}_{\theta(e)}p$ est surjective. Par conséquent, $p : W \to X$ est un morphisme G-équivariant, bijectif et séparable, entre G-variétés homogènes. C'est donc un isomorphisme, d'après la proposition 13.44. Alors, comme $\alpha = pr_Y \circ \tau \circ \theta$, le morphisme $\beta := pr_Y \circ \tau \circ p^{-1}$ vérifie $\beta \circ \pi = \alpha$. □

14.5. Applications rationnelles et variétés normales. — On rassemble dans ce paragraphe quelques résultats sur les variétés normales. (La notion d'application rationnelle n'est pas indispensable pour démontrer la version du théorème de Zariski utilisée dans la démonstration précédente.)

Définition 14.18. — Soient X, Y deux variétés algébriques. Sur l'ensemble des couples (U, ϕ), où U est un ouvert dense de X et $\phi : U \to Y$ un morphisme, on considère la relation d'équivalence $\sim$ définie par : $(U, \phi) \sim (V, \psi)$ si ϕ et ψ coïncident sur $U \cap V$.

Par définition, une **application rationnelle** $f : X \to Y$ est une classe d'équivalence pour $\sim$. (Si X est irréductible et $Y = k$ on retrouve la définition des fonctions rationnelles sur X). On dit que f est **définie en** x si f est représentée par un couple (U, ϕ) avec $x \in U$. On voit alors que l'ensemble des x où f est définie forme un ouvert de X, noté $\mathrm{dom}(f)$, et que f induit un morphisme $\mathrm{dom}(f) \to Y$.

Théorème 14.19. — *Soit X une variété irréductible normale.*

a) *Soit $f \in k(X)$. Si* $\mathrm{codim}(X \setminus \mathrm{dom}(f)) \geq 2$*, alors $f \in k[X]$.*

b) *Soient Y une variété projective et $f : X \to Y$ une application rationnelle. Alors* $\mathrm{codim}(X \setminus \mathrm{dom}(f)) \geq 2$.

c) *Soit $f \in k(X) \setminus k[X]$. Alors il existe $x \in X$ tel que $1/f$ soit définie au voisinage de x et s'annule en x.*

Démonstration. — Pour a), voir [**Iit**, §2.8, Th. 2.15]. Pour b), voir [loc. cit., §2.10, Th. 2.17], ou bien [**Ke**, 10.6.1](pour X lisse). On peut voir que c) découle de a) et b) (le vérifier !) ; dans le cas où X est lisse, c) est démontré dans [**Hu2**, §5.3]. □

On déduit du théorème précédent le théorème ci-dessous.

***Théorème 14.20* (Théorème principal de Zariski)**. — *Soient X, Y irréductibles et $\phi : X \to Y$ un morphisme bijectif et birationnel. On suppose Y normale. Alors $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Puisque ϕ est dominant, ϕ^* est injectif, et il s'agit de voir qu'il est surjectif. Soit $f \in k[X]$. Comme $\phi^* k(Y) = k(X)$, il existe $h \in k(Y)$ tel que $f = \phi^*(h)$. Si $h \notin k[Y]$ alors, d'après le point c) du théorème précédent, il existe $y \in Y$ tel que $1/h$ soit régulière au voisinage de y et nulle en y. Alors $1/f = \phi^*(1/h)$ est régulière au voisinage de $x = \phi^{-1}(y)$, et nulle en x. C'est absurde, puisque f est régulière en x. □

14.6. Quotient par un sous-groupe fermé normal. —

Théorème 14.21. — *Soit H un sous-groupe fermé normal de G. Alors la variété G/H est un groupe algébrique affine.*

Démonstration. — On va construire un morphisme de groupes algébriques affines $\phi : G \to G'$ tel que $\mathrm{Ker}\, \phi = H$ et $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\phi = \mathfrak{h}$.

Ceci prouvera le théorème, car on aura $G/H \cong \phi(G)$ comme groupes abstraits, $\phi(G)$ sera un sous-groupe fermé de G', et ϕ induira un isomorphisme de variétés $G/H \cong \phi(G)$, d'après le théorème 14.15.

Soient V, V_1 comme dans le théorème 14.11. Alors H agit sur V_1 par un caractère $\chi_1 \in X(H)$. Puisque H est normal dans G on voit, comme dans la démonstration du théorème de Lie-Kolchin (11.6), que G agit sur $X(H)$, et que la somme E des $V_{g\chi_1}$ est G-stable. Or cette somme est directe, d'après la proposition 8.3, donc il existe $\chi_2, \dots, \chi_n \in X(H)$ tels que $E = V_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus V_{\chi_n}$.

Notons $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ la représentation de G dans E. Alors $\psi := \mathrm{Ad}_{\mathrm{GL}(E)} \circ \rho$ est une représentation de G dans $\mathrm{End}(E)$, c.-à-d., pour $u \in \mathrm{End}(E)$, $g \in G$, on a

$$\psi(g)u = \rho(g) \circ u \circ \rho(g^{-1}).$$

Soit $A = \bigoplus_i \mathrm{End}(V_{\chi_i})$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ formée des endomorphismes qui préservent chaque V_{χ_i}. Comme $\rho(G)$ permute les V_{χ_i}, alors A est stable par $\psi(G)$, et l'on obtient donc une représentation $\phi : G \to \mathrm{GL}(A)$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,\phi = H$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi = \mathfrak{h}$.

Si $h \in H$, alors $\rho(h)$ agit scalairement sur chaque V_{χ_i} et commute donc à A, d'où $\phi(h) = 1$. Donc $H \subseteq \mathrm{Ker}\,\phi$ et par suite $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi$. Réciproquement, soit $g \in \mathrm{Ker}\,\phi$. Alors $\rho(g)$ est central dans A et donc agit scalairement sur chaque V_{χ_i}. En particulier $\rho(g)$ laisse V_1 stable, d'où $g \in H$.

Enfin, comme ϕ est la restriction à A de $\mathrm{Ad}_{\mathrm{GL}(E)} \circ \rho$) on a, pour $X \in \mathfrak{g}$, $u \in A$,

$$\mathrm{d}\phi(X)(u) = \mathrm{d}\rho(X)\,u - u\,\mathrm{d}\rho(X).$$

Par conséquent, si $X \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi$ alors $\mathrm{d}\rho(X)$ est central dans A et on obtient comme plus haut que $\mathrm{d}\rho(X)(V_1) \subseteq V_1$, d'où $X \in \mathfrak{h}$. Le théorème est démontré. $\square$

Exercice 14.22. — Si K est un sous-groupe fermé contenant H, alors

$$(G/H)\big/(K/H) \cong G/K.$$

TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Ho] G. P. Hochschild, Basic theory of algebriac groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer Verlag, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Basic Algebra II, W.H. Freeman & Co, 1980.

[Jan] J. C. Jantzen, Representation of algebraic groups, Academic Press, 1987, second edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkäuser, 1985.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Laf] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Las] Y. Laszlo, Introduction à la géométrie algébrique, cours de Master 2, 2004-2005.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin Cummings publishing company, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, Cours de M1 à l'Université Paris 6, disponible à l'adresse www.math.jussieu.fr/~polo

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.