CHAPITRE 5

SOUS-GROUPES DE BOREL ET VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

Version du 10 janvier 2006

15. Théorème du point fixe et sous-groupes de Borel

15.1. Morphismes propres et variétés complètes. —

Définition 15.1. — 1) Un morphisme de variétés algébriques $f : X \to Y$ est **propre** s'il est universellement fermé, c.-à-d., si pour toute variété Z, le morphisme $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ est fermé.

2) On voit facilement que si $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ sont propres, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Définition 15.2. — Soit X une variété algébrique sur k. On dit que X est **propre** (ou encore, **complète**) si le morphisme $X \to \mathrm{pt} = \mathrm{Max}(k)$ est propre, c.à.d. si, pour toute variété Z le morphisme $pr_Z : X \times Z \to Z$ est fermé.

Remarque 15.3. — $\mathbb{A}^1 = k$ n'est pas propre car, par exemple, la projection sur k du fermé $\{(x, y) \in k \times k \mid xy = 1\}$ est k^*, qui n'est pas fermé dans k.

Théorème 15.4. — *$\mathbb{P}^n$ est propre, pour tout n.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Die**, §3.3, Th. 1], [**Sp**, Th. 6.1.3] ou [**Las**, §6.5]. □

Proposition 15.5. — *Soit X une variété propre.*

1) *Toute sous-variété fermée Y de X est propre.*

2) *Si Y est propre alors $X \times Y$ l'est aussi.*

3) *Si $\phi : X \to Y$ est un morphisme surjectif, alors Y est propre.*

4) *Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme. Alors $\phi(X)$ est une sous-variété fermée et propre.*

5) *Si X est connexe, alors $k[X] = k$.*

6) *Si X est de plus affine, alors X est un ensemble fini. Plus généralement, si X est connexe, tout morphisme de X vers une variété affine est constant.*

Démonstration. — Soit Z une variété arbitraire. 1) $Y \times Z$ est fermé dans $X \times Z$ donc si F est fermé dans $Y \times Z$ il l'est aussi dans $X \times Z$ et donc $pr_Z(F)$ est fermé.

2) Notons $X \times Y \times Z \xrightarrow{p} Y \times Z \xrightarrow{q} Z$. Alors $pr_Z = q \circ p$. Si F est un fermé de $X \times Y \times Z$ alors $p(F)$ est un fermé de $Y \times Z$, car X est propre, et $pr_Z(F) = q(p(F))$ est un fermé de Z, car Y est propre.

3) Soit F une sous-variété fermée de $Y \times Z$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{\pi=(\phi,\mathrm{id}_Z)} & Y \times Z \supseteq F \\ {\scriptstyle pr_Z^X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_Z^Y} \\ Z & = & Z \end{array}$$

Comme ϕ est surjectif, π l'est aussi et donc $pr_Z^Y(F) = pr_Z^X(\pi^{-1}(F))$. Par conséquent, $pr_Z^Y(F)$ est fermé. Ceci montre que Y est propre.

Pour démontrer 4), on a besoin du lemme suivant.

Lemme 15.6. — *Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de variétés. Alors son graphe $\Gamma_\phi := \{(x, \phi(x)),\ x \in X\}$ est une sous-variété fermée de $X \times Y$, isomorphe à X.*

Démonstration. — Considérons le morphisme $\theta = (\phi, \mathrm{id}_Y) : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (\phi(x), y)$. Alors $\Gamma_\phi = \theta^{-1}(\Delta_Y)$, où Δ_Y est la diagonale dans $Y \times Y$, qui est une sous-variété fermée. Donc Γ_ϕ est une sous-variété fermée. De plus, si p désigne la restriction à Γ_ϕ de la projection pr_X, alors p et (id_X, ϕ) sont des morphismes inverses l'un de l'autre. □

Revenons à la preuve de 4). On a $\phi(X) = pr_Y \Gamma_\phi$, donc $\phi(X)$ est une sous-variété fermée de Y. Elle est propre, d'après 3).

5) Soit $f \in k[X]$. Alors $f(X)$ est une sous-variété fermée connexe et propre de k. Comme k n'est pas complet, alors $f(X)$ est un point, i.e. f est constante.

6) Soient $X_1, \ldots, X_r$ les composantes irréductibles de X. Alors chaque X_i est propre et connexe, donc $k[X_i] = k$. Comme X_i est affine, ceci entraîne que X_i est un point, et donc X est fini.

Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme, avec Y affine. Alors $\phi(X)$ est une sous-variété fermée, donc propre et aussi affine. Donc $\phi(X)$ est fini, et égal à un point si X est connexe. □

Corollaire 15.7. — a) *Toute variété projective est propre.*

b) *Toute variété quasi-projective propre est projective.*

Démonstration. — a) résulte du théorème et de 1) ; b) résulte de 4). □

Lemme 15.8. — *Soient G un groupe algébrique, X, Y des G-variétés homogènes, et $\phi : X \to Y$ un morphisme bijectif G-équivariant. Si Y est complète, X l'est aussi.*

Démonstration. — Soient Z une variété et $\theta = (\phi, \mathrm{id}_Z) : X \times Z \to Y \times Z$. Alors θ est un morphisme bijectif ; il est ouvert, d'après le corollaire 14.6, c'est donc un homéomorphisme. Donc, si F est un fermé de $X \times Z$, $\theta(F)$ est un fermé de $Y \times Z$. Or, $pr_Z^X(F) = pr_Z^Y(F) \circ \theta$, donc si Y complète alors $pr_Z^X(F)$ est un fermé de Z. Ceci prouve le lemme. □

Remarque 15.9. — On peut en fait montrer que tout morphisme bijectif entre variétés normales est propre, *cf.* la sous-section suivante.

15.2. Morphismes finis et normalisation. — Cette sous-section ne sera pas utilisée dans la suite.

Définition et proposition 15.10. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés.*

1) *On dit que f est* **affine** *si, pour tout ouvert affine U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert affine de X. On peut montrer qu'il suffit que ce soit le cas pour un recouvrement donné (U_i) de Y par des ouverts affines.*

2) *On dit que f est* **fini** *s'il est affine et si, pour tout ouvert affine U de Y, le comorphisme f^* fait de $k[f^{-1}(U)]$ un $k[U]$-module de type fini. On peut montrer qu'il suffit que cette propriété soit vérifiée pour un recouvrement donné (U_i) de Y par des ouverts affines.*

En particulier, si $Y = \mathrm{Max}(A)$ et $X = \mathrm{Max}(B)$ sont affines, alors f est fini si, et seulement si, f^* fait de B un A-module de type fini.

3) *Il résulte de la définition que si $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ sont finis, alors $g \circ f$ l'est aussi.*

Proposition 15.11. — *Tout morphisme fini est propre.*

Démonstration. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini. Alors, pour tout Z, le morphisme $f \times \mathrm{id}_Z$ est fini. Par conséquent, il suffit de montrer que tout morphisme fini est fermé. Ceci résulte du théorème de montée (going-up) de Cohen-Seidenberg ; voir [**Die**, §4.4, Prop. 11] ou [**Sp**, Lemma 5.2.3]. Pour une autre démonstration, voir [**Las**, Prop.6.7.10], qui montre que tout morphisme fini est projectif, et donc propre. □

Soit X une variété. On rappelle (*cf.* 13.31) qu'un point $x \in X$ est dit normal si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et intégralement clos, et X est normale si chaque point $x \in X$ est normal. D'après la proposition 13.29 et le théorème 13.32, l'ensemble des points normaux de X contient un ouvert dense de X.

D'autre part, toute variété irréductible X est birationnellement dominée par une variété normale, d'après le théorème ci-dessous.

***Théorème 15.12* (Normalisées d'une variété).** — *Soit X une variété iréductible.*

1) *Il existe une variété irréductible normale $\widetilde{X}$ et un morphisme fini birationnel $\pi : \widetilde{X} \to X$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme birationnel fini $f : X' \to X$, où X' est irréductible, il existe un unique morphisme $\pi' : \widetilde{X} \to X'$ tel que $f \circ \pi' = \pi$. On appelle $\widetilde{X}$ la* **normalisée de** *X.*

2) *Plus généralement, soit L un corps, extension de degré fini de $k(X)$. Il existe une variété irréductible normale $\widetilde{X}_L$ telle que $k(\widetilde{X}_L) = L$, et un morphisme fini $\pi_L : \widetilde{X}_L \to X$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme surjectif fini $f : X' \to X$, où X' est irréductible et $k(X') \subseteq L$, il existe un unique morphisme $\pi'_L : \widetilde{X}_L \to X'$ tel que $f \circ \pi'_L = \pi_L$. On appelle $\widetilde{X}_L$ la* **normalisée de** *X* **dans** *L.*

Démonstration. — Voir [**Die**, §5.3, Prop.5] □

***Définition 15.13*.** — Une extension de corps L/K est **radicielle** si $L = K$ ou bien si $\mathrm{car}(K) = p > 0$ et si pour tout $x \in L$ il existe $n \geq 1$ tel que $x^{p^n} \in K$.

***Théorème 15.14* (Autre version du théorème principal de Zariski)**

Soient X, Y des variétés irréductibles normales et $f : X \to Y$ un morphisme bijectif. Alors l'extension $k(Y) \subseteq k(X)$ est radicielle, donc algébrique et de degré fini, X s'identifie à la normalisée de Y dans $k(X)$, et donc f est un morphisme fini.

Démonstration. — Voir [**Die**, §5.4, Cor. 4] □

15.3. Théorème du point fixe de Borel. —

***Lemme 15.15*.** — *Soient H un groupe algébrique et Z une H-variété. Alors*

$$Z^H := \{z \in Z \mid hz = z, \ \forall h \in H\}$$

est une sous-variété fermée de Z.

Démonstration. — En effet, $Z^H = \bigcap_{h \in H} Z^h$, et $Z^h = \phi_h^{-1}(\Delta_Z)$, où Δ_Z est la diagonale de $Z \times Z$ et ϕ_h le morphisme $Z \to Z \times Z$, $z \mapsto (z, hz)$. □

Théorème 15.16* (Théorème du point fixe de Borel).** — *Soit G un groupe résoluble* **connexe, et X une G-variété complète non vide. Alors G a un point fixe dans X.*

Démonstration. — Démontrons le théorème par récurrence sur $d = \dim G$. C'est vrai si $d = 0$, car alors $G = \{1\}$. Si $G \neq \{1\}$ alors $D(G) := N$ est un sous-groupe fermé connexe propre, donc de dimension $< d$. Par hypothèse de récurrence, $X^N := Y$ est non-vide. D'après le lemme, c'est une sous-variété fermée, et donc complète, de X. Puisque N est normal dans G, alors Y est G-stable ; en effet, si $y \in Y$, $g \in G, h \in N$ alors $hgy = g\,(g^{-1}hg)y = gy$.

Soit $y \in Y$ tel que l'orbite Gy soit de dimension minimale, et donc fermée. Comme G_y contient $D(G)$, c'est un sous-groupe fermé normal et donc la variété G/G_y est affine et connexe.

D'autre part, le morphisme $\phi : G/G_y \to Gy$ est équivariant et bijectif, et Gy est complète. Donc, d'après le lemme 15.8, G/G_y est complète.

On a donc obtenu que G/G_y est complète, connexe et affine. Elle est donc réduite à un point, et il en est de même de Gy ; par conséquent y est un point fixe. Le théorème est démontré. $\square$

On déduit du théorème du point fixe une autre démonstration du théorème de Lie-Kolchin pour les groupes résolubles connexes :

Corollaire 15.17 **(Théorème de Lie-Kolchin, cas résoluble connexe)**
Soient G un groupe résoluble connexe et V un G-module rationnel de dimension finie. Alors G a un point fixe dans la variété des drapeaux $\mathcal{F}(V)$, c.-à-d., G stabilise un drapeau de V.

Démonstration. — La variété des drapeaux $\mathcal{F}(V)$ de V est une sous-variété fermée de la variété projective $\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{Gr}_i(V) \subseteq \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\Lambda^i V)$ (où $n = \dim V$), et G y agit morphiquement. Par conséquent, G y a un point fixe. $\square$

15.4. Sous-groupes et paires de Borel. — Soit G un groupe algébrique affine.

Définition 15.18. — On appelle sous-groupe de Borel de G tout sous-groupe fermé résoluble connexe maximal.

Théorème 15.19 **(Sous-groupes de Borel)**. — *Soit G un groupe algébrique affine connexe. Tous les sous-groupes de Borel de G sont conjugués, et si B est l'un d'eux la variété G/B est projective.*

Démonstration. — Soit S un sous-groupe de Borel de dimension maximale. D'après le théorème de Chevalley, il existe un G-module rationnel de dimension finie V et une droite $V_1 \subseteq V$ tels que $S = \mathrm{Stab}_G(V_1)$; de plus on peut supposer que V est fidèle, quitte à remplacer V par $V \oplus E$, où E est un G-module rationnel fidèle de dimension finie.

Observons que S stabilise un drapeau $\mathcal{F}_0 = (V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V)$ dont le premier terme est V_1. En effet, S agit dans V/V_1, et on peut appliquer le théorème de Lie-Kolchin dans V/V_1 (S étant résoluble connexe).

Alors $S \subseteq \mathrm{Stab}_G(\mathcal{F}_0)$, mais l'on a aussi $\mathrm{Stab}_G(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathrm{Stab}_G(V_1) = S$ et donc $S = \mathrm{Stab}_G(\mathcal{F}_0)$. Par conséquent, on a un morphisme bijectif

$$(*) \qquad G/S \xrightarrow{\text{bijectif}} G\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(V).$$

Montrons que l'orbite $G\mathcal{F}_0$ est fermée. Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(V)$ un drapeau arbitraire. Alors $G_{\mathcal{F}}$ est résoluble, puisque $G_{\mathcal{F}}$ est triangulaire dans toute base adaptée à $\mathcal{F}$. Donc, par l'hypothèse de maximalité faite sur $\dim S$, on a $\dim G_{\mathcal{F}} \leq \dim S$ (car $\dim G_{\mathcal{F}} = \dim G^0_{\mathcal{F}}$), et donc $\dim G\mathcal{F} \geq \dim G\mathcal{F}_0$. Donc $G\mathcal{F}_0$ est une orbite de dimension minimale, elle est donc fermée, et complète. Donc, d'après le lemme 15.8 et $(*)$, G/S est complète.

Enfin, soit B un sous-groupe de Borel arbitraire. Il agit par translation à gauche sur G/S, et y possède donc un point fixe gS. Alors $Bg \subseteq gS$, d'où $B \subseteq g^{-1}Sg$. Mais $g^{-1}Sg$ est fermé résoluble connexe, et donc la maximalité de B entraîne $B = g^{-1}Sg$, d'où la première assertion du théorème. De plus, clairement, $\mathrm{Int}(g)$ induit un isomorphisme de variétés $G/S \cong G/B$ et donc G/B est complète. Le théorème est démontré. $\square$

Définition 15.20. — On appelle **paire de Borel** de G tout couple (T, B) où B est un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B.

Corollaire 15.21. — **(Conjugaison des tores maximaux et paires de Borel)**

a) *Tout tore maximal est contenu dans un sous-groupe de Borel, et toutes les paires de Borel sont conjuguées.*

b) *Les sous-groupes fermés connexes unipotents maximaux de G sont tous conjugués, et chacun est de la forme B_u, pour B un sous-groupe de Borel.*

Démonstration. — a) Soit T un tore maximal. Comme T est fermé, connexe et résoluble (car abélien), il est contenu dans un Borel B. Par maximalité, c'est un tore maximal de B.

Soit (T', B') une autre paire de Borel. D'après le théorème précédent, il existe $g \in G$ tel que $gB'g^{-1} = B$. Alors, $gT'g^{-1}$ est un tore maximal de B et, d'après le résultat établi dans le cas résoluble (théorèmes 12.14 ou 12.23), T et $gT'g^{-1}$ sont conjugués par un élément $b \in \mathcal{C}^\infty(B)$. Le point a) en découle.

Pour b), la démonstration est analogue et laissée au lecteur. $\square$

Définition 15.22. — Soient G un groupe algébrique affine connexe et P un sous-groupe fermé. On dit que P est un sous-groupe **parabolique** si la variété G/P est complète (et donc projective).

***Proposition 15.23* (Caractérisation des paraboliques)**. — *P est parabolique $\Leftrightarrow$ P contient un Borel. Par conséquent, B est un Borel $\Leftrightarrow$ B est parabolique, résoluble et connexe.*

Démonstration. — $\Rightarrow$ Supposons G/P complet et soit B un Borel. Alors B a un point fixe gP dans G/P et donc $Bg \subseteq gP$, d'où $g^{-1}Bg \subseteq P$.

$\Leftarrow$ Le morphisme $G \to G/P$ se factorise à travers G/B. On a donc un morphisme surjectif $G/B \to G/P$, avec G/B complète. Donc G/P est complète, d'après la proposition 15.5.3).

La deuxième assertion s'obtient facilement. □

Théorème 15.24. — **(Tores et sous-groupes de Borel d'un groupe quotient)**
Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme surjectif de groupes algébriques affines et soit H un sous-groupe fermé de G de l'un des types suivants : parabolique, Borel, tore maximal, unipotent connexe maximal. Alors $\phi(H)$ est du même type, et tout sous-groupe de G' de ce type est obtenu de cette manière.

Démonstration. — On considère G' comme un G-espace homogène, via $gg' = \phi(g)g'$, pour $g \in G$, $g' \in G'$. Alors ϕ se factorise en un morphisme G-équivariant, et donc surjectif, $G/H \to G'/\phi(H)$. Donc, d'après la proposition 15.5.3), si H est parabolique, $\phi(H)$ l'est aussi. Si H est un Borel, $\phi(H)$ est parabolique, résoluble et connexe, donc un Borel. Si H est unipotent connexe maximal, alors $H = B_u$ pour un Borel B, d'où $\phi(B_u) = \phi(B)_u$ (car $\phi(b)_u = \phi(b_u)$). Comme $\phi(B)$ est un Borel de G', il en résulte que $\phi(H)$ est unipotent connexe maximal. Si H est un tore maximal, contenu dans un Borel B, on a $B = TB_u$ et donc $\phi(B) = \phi(T)\phi(B)_u$. On en déduit, d'après le théorème 12.23, que $\phi(T)$ est un tore maximal de $\phi(B)$, et donc de G'.

De plus, si H' est un Borel, tore maximal, ou unipotent connexe maximal de G', et si H est du même type, il existe $g' = \phi(g)$ tel que $H' = g'\phi(H)g'^{-1} = \phi(gHg^{-1})$. Enfin, si P' est un parabolique de G', il contient un Borel $\phi(B)$. Alors $P := \phi^{-1}(P')$ contient B et est donc parabolique ; et $P' = \phi(P)$. □

15.5. Centralisateurs de tores, sous-groupes de Cartan. —

Lemme 15.25. — *Soit G connexe et B un Borel de G. Si f est un automorphisme de G tel que $f_{|B} = \mathrm{id}$, alors $f = \mathrm{id}$. Par conséquent, si $g \in G$ centralise B alors $g \in Z(G)$. En particulier, $Z(B) \subseteq Z(G)$.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{Aut}(G)$ tel que $f_{|B} = \mathrm{id}$. Considérons le morphisme $\psi : G \to G$ défini par $\psi(g) = f(g)g^{-1}$. Alors ψ se factorise à travers $\psi' : G/B \to G$, i.e. $\psi(g) = \psi'(gB)$ pour tout g. Comme G/B est complète et G affine, il vient $\psi'(G/B) = \psi'(e) = e$, d'où $f = \mathrm{id}$. La deuxième assertion en résulte en prenant $f = \mathrm{Int}(g)$. Donc $Z(B) \subseteq Z(G)$. □

Proposition 15.26. — *Soit G un groupe algébrique affine, B un sous-groupe de Borel. Si B est nilpotent, alors $G^0 = B$.*

Démonstration. — On peut supposer G connexe. On procède par récurrence sur $d = \dim G$. Si $B = \{1\}$ alors $G = G/B$ est affine, complète et connexe, donc égale à $\{1\}$. Sinon, B est nilpotent connexe non-trivial et donc $H := Z(B)^0 \neq \{1\}$. D'après le lemme précédent, H est central dans G. On peut donc former le groupe quotient G/H, qui est de dimension $< \dim G$. De plus, d'après le théorème 15.24, B/H est un sous-groupe de Borel, nilpotent, de G/H. Par hypothèse de récurrence, il vient $G/H = B/H$, d'où $G = B$. □

Corollaire 15.27. — *Soit G connexe, de dimension ≤ 2. Alors G est résoluble.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de G. Montrons que $G = B$. On a $B = TB_u$, où T est un tore maximal de B. Si on avait $\dim B \leq 1$, on aurait $B = T$ ou $B = B_u$, d'où B nilpotent, et $G = B$ d'après la proposition précédente. On en déduit que $\dim B = 2$, d'où $B = G$. □

Corollaire 15.28. — *Soit G un groupe algébrique affine connexe.*

1) *Si $G = G_s$ alors G est un tore.*
2) *Si G_u est un sous-groupe, G est résoluble.*
3) *Si G_s est un sous-groupe, G est nilpotent.*

Démonstration. — Soient B un Borel de G, et $B = TB_u$. Prouvons 1). Si $G = G_s$, alors $B = T$. Donc $B = Z(B) \subseteq Z(G)$, et donc B est normal. Alors G/B est affine, connexe, et complète, donc un point, d'où $G = B = T$.

2) G_u est un sous-groupe fermé normal, et donc $H = G/G_u$ est un groupe algébrique affine connexe. De plus, H est formé d'éléments semi-simples (car $H = \{\pi(g_s),\ g \in G\}$). Donc H est un tore, donc commutatif. Il en résulte que G est résoluble, puisque $1 \to G_u \to G \to T \to 1$.

3) Supposons que G_s soit un sous-groupe de G. Alors $B_s = B \cap G_s$ est un sous-groupe normal de B, commutatif d'après 12.23. Il est donc fermé car, d'après le lemme 7.14, on peut plonger B dans un GL_n de sorte que $B_s = B \cap D_n$. Donc B_s est un sous-groupe diagonalisable normal, et donc central dans B, d'après le théorème de rigidité. Donc B est nilpotent, et $G = B$ d'après la proposition précédente. □

Remarque 15.29. — On peut aussi montrer que si G_s est fermé alors G est nilpotent.

Proposition 15.30. — *Soient T un tore maximal, et $C = C_G(T)^0$. Alors C est nilpotent, et $C = N_G(C)^0$.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de C. Alors T est un tore maximal de B. Comme T est central, B est nilpotent d'après la proposition 12.16, et donc $C = B$ d'après la proposition 15.26.

Par le théorème de rigidité, on a $C = N_G(T)^0$. Montrons que $N_G(C) \subseteq N_G(T)$, d'où résultera l'égalité voulue. Soit $x \in N_G(C)$. Alors $\mathrm{Int}(x)$ est un automorphisme de C, qui stabilise T car $T = C_s$. Donc $x \in N_G(T)$. La proposition est démontrée. □

Définition 15.31. — Si T est un tore maximal, $C = C_G(T)^0$ est appelé un **sous-groupe de Cartan**. En fait, on verra plus loin que $C_G(T)$ est connexe.

15.6. La réunion des sous-groupes de Borel. —

Lemme 15.32. — *Soient G connexe, H un sous-groupe fermé connexe, et $X = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.*

a) *X contient un ouvert dense de $\overline{X}$.*

b) *Si G/H est complète, X est fermé.*

c) *Si $N_G(H)/H$ est fini et s'il existe un élément de G qui n'est contenu que dans un nombre fini de conjugués de H, alors $\overline{X} = G$.*

Démonstration. — Soit $M = \{(x, y) \in G \times G \mid y \in xHx^{-1}\}$. C'est une sous-variété fermée irréductible de $G \times G$ car c'est l'image de $G \times H$ par l'isomorphisme $G \times G \cong G \times G$, $(x, z) \mapsto (x, xzx^{-1})$. Comme $X = pr_2(M)$, on obtient a). Considérons le morphisme $\psi : G \times G \to (G \times G)\big/(H \times \{1\}) = G/H \times G$; il est ouvert. On a $M = \psi^{-1}\psi(M)$: en effet, si $(x, y) \in M$ et $h \in H$ alors $(xh, y) \in M$. Donc $V := \psi(M)$ est une sous-variété fermée de $G/H \times G$. Comme $X = pr_G(V)$, on obtient b).

Notons q et π les restrictions à V de $pr_{G/H}$ et pr_G. Comme $V = \{(xH, y) \mid y \in xHx^{-1}\}$, on voit que q est surjective et que $\dim q^{-1}(q(v)) = \dim H$, pour tout v. On en déduit que $\dim V = \dim G$.

Supposons que $|N_G(H)/H| < \infty$ et qu'il existe $y \in G$ qui ne soit contenu que dans un nombre fini de conjugués de H, disons $g_1Hg_1^{-1}, \ldots, g_rHg_r^{-1}$. Alors, $\pi^{-1}(y) = \{xH \in G/H \mid y \in xHx^{-1}\}$ est la réunion des classes $g_iN_G(H)/H$ et est donc fini. L'égalité $0 = \dim \pi^{-1}(y) \geq \dim V - \dim \overline{X}$ entraîne alors $\dim \overline{X} = \dim V = \dim G$. Le lemme est démontré. □

***Théorème 15.33* (Union des sous-groupes de Cartan ou Borel)**

Soit G connexe.

a) *La réunion des $C_G(T)^0$, pour T un tore maximal, contient un ouvert dense.*

b) *G est la réunion de ses sous-groupes de Borel.*

c) *Tout élément semi-simple de G appartient à un tore maximal.*

d) *Tout élément unipotent de G appartient à un sous-groupe unipotent connexe maximal.*

Démonstration. — a) Soient T un tore maximal et $C = C_G(T)^0$. D'après la proposition 15.30, $C = N_G(C)^0$ et donc $N_G(C)/C$ est fini. D'après le lemme 8.5, il existe $t \in T$ tel que $C_G(T) = C_G(t)$. Soit $x \in G$ tel que $t \in xCx^{-1}$. Alors $x^{-1}tx \in C$, d'où $x^{-1}tx \in T$ puisque $T = C_s$. Alors, $C \subseteq C_G(x^{-1}tx) = x^{-1}C_G(t)x = x^{-1}C_G(T)x$, et on en déduit que $C = x^{-1}Cx$. Ceci montre que C est l'unique conjugué de C contenant t, et a) résulte alors de la proposition 15.32.

b) C est connexe et nilpotent donc contenu dans un Borel. Par conséquent, la réunion des sous-groupes de Borel est un fermé contenant un ouvert dense, d'où b).

c) Soit t semi-simple. D'après b), t est contenu dans un Borel B, puis t est contenu dans un tore maximal de B d'après le théorème 12.14. Enfin, soit u unipotent. Il est contenu dans un Borel B, et donc dans B_u. Le théorème est démontré. □

Corollaire 15.34. — *Soit G connexe contenant un sous-groupe de Borel B* **normal**. *Alors $G = B$, c.-à-d., G est résoluble.*

Démonstration. — B est le seul sous-groupe de Borel de G, puisqu'ils sont tous conjugués. Comme, d'après le théorème précédent, leur réunion est G, on obtient $G = B$. □

Corollaire 15.35. — *Soit G connexe. Alors $Z(G) = Z(B)$, pour tout Borel B.*

Démonstration. — Soit $x \in Z(G)$. D'après le théorème, x est contenu dans un Borel, mais alors dans tous puisqu'ils sont conjugués. Donc $x \in Z(B)$, pour tout B. L'inclusion réciproque a été vue dans la proposition 15.25. □

15.7. Connexité des centralisateurs de tores. —

Lemme 15.36. — *Soient G connexe, S un sous-groupe résoluble connexe, et $x \in G$ commutant à S. Il existe un sous-groupe de Borel contenant S et x.*

Démonstration. — D'après le théorème 15.33, il existe un Borel B contenant x. Donc la sous-variété fermée $X = (G/B)^x = \{gB \mid xg \in gB\}$ est non-vide (elle contient eB). Si $gB \in X$ et $s \in S$, alors $x\,sgB = sxgB = sgB$. Donc X est stable par S. Comme S est résoluble connexe, et X complète et non-vide, S a un point fixe gB dans X. Alors le Borel gBg^{-1} contient x et S. □

Théorème 15.37. — **(Sous-groupes de Borel du centralisateur d'un tore)** *Soient G connexe, S un tore de G.*

a) *$C_G(S)$ est connexe.*

b) *Soit B un sous-groupe de Borel de G contenant S. Alors $B \cap C_G(S)$ est un sous-groupe de Borel de $C_G(S)$.*

c) *De plus, tout sous-groupe de Borel de $C_G(S)$ est obtenu de cette façon.*

Démonstration. — a) Soit $x \in C_G(S)$. D'après le lemme, x et S sont contenus dans un Borel B. Mais alors $x \in C_B(S)$, qui est connexe d'après le résultat établi dans le cas connexe (théorème 12.14). Donc $x \in C_G(S)^0$. Ceci montre que $C_G(S) = C_G(S)^0$.

b) Posons $C = C_G(S)$. Alors $B \cap C = C_B(S)$ est résoluble et connexe. Pour montrer que c'est un sous-groupe de Borel de C, il suffit de montrer que la variété $C/C \cap B$ est propre. Notons e_B le point B/B de G/B. Alors $\mathrm{Stab}_C(e_B) = C \cap B$ et donc on a un morphisme bijectif C-équivariant $C/C \cap B \longrightarrow Ce_B$. D'après le lemme 15.8, il suffit de montrer que Ce_B est complète, i.e. que l'orbite Ce_B est fermée. Donnons deux démonstrations de ce fait ; la seconde établira

Comme $\pi : G \to G/B$ est ouvert, il suffit de montrer que $Y := \pi^{-1}(Ce_B) = CB$ est fermé dans G. Comme Y est une orbite du groupe connexe $C \times B$, alors Y est irréductible, et il en est de même de son adhérence $\overline{Y}$.

Comme $S \subseteq B$, alors pour tout $y \in Y = C_G(S)B$, on a $y^{-1}Sy \subseteq B$ et, par continuité, ceci vaut aussi pour tout $y \in \overline{Y}$, c.-à-d.,

$$\forall y \in \overline{Y}, \qquad y^{-1}Sy \subseteq B \tag{1}$$

Soit T un tore maximal de B contenant S.

Soit π la projection B/B_u ; elle induit un isomorphisme de T sur B/B_u. Considérons le morphisme

$$\psi : \overline{Y} \times S \to B/B_u, \quad (y, s) \mapsto \pi(y^{-1}sy).$$

D'après le théorème de rigidité 8.16, ψ est indépendant de la variable $y \in \overline{Y}$, c.-à-d., on a :

$$\forall y \in \overline{Y}, \qquad \pi(y^{-1}sy) = \pi(s). \tag{2}$$

Fixons $y \in \overline{Y}$. Alors $y^{-1}Sy$ est un tore de B, donc il existe $u \in B_u$ tel que

$$u^{-1}y^{-1}Syu \subseteq T.$$

Alors, d'après (2), pour tout $s \in S$ on a

$$\pi(u^{-1}y^{-1}syu) = \pi(y^{-1}sy) = \pi(s);$$

et comme la restriction de π à T est bijective, il vient $u^{-1}y^{-1}syu = s$ pour tout $s \in S$, et donc $c := yu$ appartient à $C_G(S) = C$. Donc $y = cu^{-1}$ appartient à Y. Ceci montre que Y est fermé. L'assertion b) est démontrée.

L'assertion c) en découle, par conjugaison des sous-groupes de Borel. En effet, si H est un sous-groupe de Borel de $C_G(S)$, il existe $g \in C_G(S)$ tel que

$$H = g(B \cap C_G(S))g^{-1} = gBg^{-1} \cap C_G(S),$$

et gBg^{-1} est un sous-groupe de Borel de G contenant $gSg^{-1} = S$. Le théorème est démontré. □

Corollaire 15.38. — *Soient G connexe, T un tore maximal, $C = C_G(T)$.*
a) *C est connexe, nilpotent, et égal à $N_G(C)^0$.*
b) *Tout Borel contenant T contient aussi C.*

Démonstration. — a) découle du théorème et de la proposition 15.30. Voyons b). Soit B un Borel contenant T. D'après le théorème, $B \cap C$ est un Borel de C, et comme C est nilpotent connexe il vient $B \cap C = C$, d'où $C \subseteq B$. □

15.8. Normalisateur d'un sous-groupe de Borel. —

***Théorème 15.39* (Chevalley)**. — *Soit G connexe.*
i) *Pour tout Borel B, on a $N_G(B) = B$.*
ii) *Pour tout parabolique P, on a $N_G(P) = P = P^0$.*
iii) *Pour tout Borel B, on a $N_G(B_u) = B$.*

Démonstration. — Prouvons i) par récurrence sur $\dim G$. Si $\dim G \leq 2$ alors G est résoluble, d'après 15.27, d'où $B = G$.

Posons $N = N_G(B)$ et soit $n \in N$. On va montrer que $n \in B$. Soit T un tore maximal de B, alors nTn^{-1} en est un autre, donc il existe $b \in B$ tel que $bnT(bn)^{-1} = T$. Donc, remplaçant n par bn, on peut supposer que n normalise T. Alors,

$$\psi : T \to T, \qquad t \mapsto ntn^{-1}t^{-1}$$

est un morphisme de groupes algébriques ; soit $S = (\operatorname{Ker} \psi)^0$. Alors n appartient à $C_G(S)$, qui est un groupe connexe. Distinguons deux cas.

a) $S \neq \{1\}$. Alors n normalise $B \cap C_G(S)$, qui est un sous-groupe de Borel du groupe connexe $C_G(S)$. Donc, si $C_G(S) \neq G$, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $n \in B \cap C_G(S)$, d'où $n \in B$.

Sinon, si $C_G(S) = G$, alors S est central et on peut passer au groupe quotient $\overline{G} = G/S$, qui est connexe et de dimension $< \dim G$. Alors B/S est un Borel de $\overline{G}$, normalisé par $\overline{n}$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\overline{n} \in B/S$, d'où $n \in B$. Ceci règle le premier cas.

b) Si $S = \{1\}$, alors ψ est surjective (car son image est un sous-groupe fermé connexe de même dimension que T). D'après le théorème des semi-invariants de Chevalley, N est le stabilisateur d'une droite kv dans une représentation V de G. Donc N agit sur kv via un caractère χ, qui est trivial sur B_u mais aussi sur T, puisque tout élément de T est un commutateur dans N (car ψ est surjective).

Donc le morphisme $\phi_v : G \to V$, $g \mapsto gv$ se factorise à travers G/B. Comme G/B est propre et connexe, ceci entraîne que ϕ_v est constant, c.-à-d., v est fixé par G, d'où $G = N$. Mais alors B est normal dans G, d'où $G = B$ d'après le corollaire 15.34. L'assertion i) est démontrée.

Démontrons ii). Soit P un parabolique, contenant un Borel B. Alors $B \subseteq P^0$, puisque B est connexe. Soit $x \in N_G(P)$. Alors xBx^{-1} est un Borel de P^0. Donc il existe $p \in P^0$ tel que $xBx^{-1} = pBp^{-1}$, d'où $p^{-1}x \in N_G(B) = B$, et $x \in pB \subseteq P^0$. Ceci montre que $N_G(P) = P^0$, d'où ii).

Démontrons iii). Posons $U = B_u$ et $N = N_G(U)$. D'abord, B normalise U, donc B est un Borel de N^0. Alors, d'après le Théorème 15.33, tout élément unipotent de N^0 appartient à un conjugué sous N^0 de U. Or U est normal dans N, et est donc égal à l'ensemble des éléments unipotents de N^0. On en déduit que N^0/U est un groupe affine connexe formé d'éléments semi-simples, donc un tore, d'après le corollaire 15.28. Il en résulte N^0 est résoluble et connexe. Comme $B \subseteq N^0$, il vient $N^0 = B$, et $N \subseteq N_G(B) = B$ (car N normalise N^0). Le théorème est démontré. $\square$

Corollaire 15.40. — *Soient G connexe, B un Borel, et P, Q deux paraboliques contenant B et conjugués dans G. Alors $P = Q$.*

Démonstration. — Si $Q = x^{-1}Px$, alors B et $x^{-1}Bx$ sont deux sous-groupes de Borel de Q. Donc il existe $q \in Q$ tel que $q^{-1}Bq = x^{-1}Bx$, d'où $xq^{-1} \in N_G(B) = B$, et $x \in Bq \subseteq Q$. Alors $P = xQx^{-1} = Q$. $\square$

16. Géométrie de la variété des drapeaux

16.1. Radical et radical unipotent. —

Définition et proposition 16.1. — *Soit G un groupe algébrique affine. On pose :*

a) $\mathcal{R}(G) = \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B\right)^0$ *; c'est le plus grand sous-groupe fermé connexe résoluble normal de G, on l'appelle le* **radical de** G.

b) *On a* $\mathcal{R}(G)_u = \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B_u\right)^0$ *; c'est le plus grand sous-groupe fermé connexe unipotent normal de G, on l'appelle le* **radical unipotent de** G. *On le note aussi $\mathcal{R}_u(G)$.*

Démonstration. — a) Il est clair que $\mathcal{R}(G)$ est un sous-groupe fermé connexe résoluble. De plus, tout automorphisme de G stabilise $H := \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B\right)$ et donc aussi $\mathcal{R}(G)$. A fortiori, $\mathcal{R}(G)$ est normal. Réciproquement, si S est un sous-groupe fermé connexe résoluble normal, il est contenu dans un sous-groupe de Borel et donc dans tous, d'où $S \subseteq H$, et $S \subseteq \mathcal{R}(G)$.

b) Puisque $\mathcal{R}(G)$ est résoluble connexe, $\mathcal{R}(G)_u$ est un sous-groupe fermé unipotent connexe. Il est normal, et en fait caractéristique, car tout automorphisme de G stabilise $\mathcal{R}(G)$ et donc $\mathcal{R}(G)_u$. Si U est un sous-groupe fermé connexe unipotent normal, il est contenu dans $\mathcal{R}(G)$, et donc dans $\mathcal{R}(G)_u$.

Ceci prouve l'inclusion $\supseteq$. Mais $\mathcal{R}(G)_u$, étant fermé connexe unipotent et normal, est contenu dans un B_u et donc dans tous, d'où l'inclusion $\subseteq$. □

16.2. Groupes réductifs et semi-simples. —

Définition 16.2. — Soit G un groupe algébrique affine. On dit que G est **réductif**, resp **semi-simple**, si $\mathcal{R}_u(G) = \{1\}$, resp. $\mathcal{R}(G) = \{1\}$.

Lemme 16.3. — *Soit* $1 \to N \to M \xrightarrow{\phi} H \to 1$ *une suite exacte de groupes algébriques. Si* N, K *sont unipotents,* M *l'est aussi.*

Démonstration. — Soit $g \in M$ et soit $g = g_s g_u$ sa décomposition de Jordan. Alors $\phi(g_s)\phi(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\phi(g)$. Comme ce dernier est unipotent, par hypothèse, on a $\phi(g_s) = 1$, c.-à-d., $g_s \in \operatorname{Ker}\phi = N$. Comme tout élément de N est unipotent, on obtient $g_s = 1$. Ceci montre que M est unipotent. □

Proposition 16.4. — a) $G/\mathcal{R}(G)$ *est semi-simple.*
b) $G/\mathcal{R}_u(G)$ *est réductif.*

Démonstration. — a) Soient $\pi : G \to G/\mathcal{R}(G)$ et H un sous-groupe fermé connexe résoluble normal de $G/\mathcal{R}(G)$. Alors $\pi^{-1}(H)$ est un sous-groupe fermé normal, résoluble d'après le lemme 10.4, et connexe d'après le lemme 12.2.b). Donc $\pi^{-1}(H) = \mathcal{R}(G)$, i.e. $H = \{1\}$.

En utilisant le lemme précédent, on démontre b) de façon analogue. □

16.3. La variété des sous-groupes de Borel. —

Définition 16.5. — Soient G connexe et B un Borel de G. Tout Borel de G est de la forme gBg^{-1} et, comme $N_G(B) = B$, alors : $gBg^{-1} = hBh^{-1} \Leftrightarrow h \in gB$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$ de tous les sous-groupes de Borel de G s'identifie à G/B. On munit ainsi $\mathcal{B}$ d'une structure de G-variété projective homogène. On l'appelle la **variété des drapeaux** de G, car pour $G = \mathrm{GL}(V)$ elle s'identifie à la variété des drapeaux de V.

Remarque 16.6. — 1) La structure de variété de $\mathcal{B}$ ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de B. En effet, si $B_0 = g_0 B g_0^{-1}$ est un autre Borel, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G/B \arrow[r, "\mathrm{Int}(g_0)"] \arrow[d, "gB\mapsto gBg^{-1}"'] & G/B_0 \arrow[d, "hB_0\mapsto hB_0h^{-1}"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\mathrm{Int}(g_0)"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

2) Observons que, pour $B \in \mathcal{B}$ et $g \in G$, on a $g \cdot B = gBg^{-1}$.

Lemme 16.7. — *Si S est un sous-ensemble quelconque de G, on note $\mathcal{B}^S = \bigcap_{s\in S}\mathcal{B}^s$ l'ensemble des points fixes de S dans $\mathcal{B}$; c'est une sous-variété fermée. De plus, on a $\mathcal{B}^S = \{B$ Borel de $G \mid B$ contient $S\}$.*

Démonstration. — On a déjà vu que $\mathcal{B}^S$ est fermée (éventuellement vide). De plus, s fixe $B \Leftrightarrow s \in N_G(B) = B$, d'où la 2ème assertion. □

16.4. Groupe de Weyl et points fixes de T dans $\mathcal{B}$. —

Définition et proposition 16.8. — *Soient G connexe, T un tore maximal. On pose $W = W(T) = N_G(T)/C_G(T)$. Alors W est un groupe fini, qui ne dépend que de G. On l'appelle le* **groupe de Weyl** *de G.*

Démonstration. — On a déjà vu que $W(T)$ est un groupe fini (théorème 8.16). Si T' est un autre tore maximal de G, il existe $g \in G$ tel que $T' = gTg^{-1}$, et alors $\mathrm{Int}(g)$ induit un isomorphisme $W(T) \cong W(T')$. □

***Théorème 16.9* (Points fixes de T dans $\mathcal{B}$)**. — *Soient G connexe, $\mathcal{B}$ la variété des drapeaux de G, et T un tore maximal. Alors $W(T)$ agit de façon simplement transitive sur $\mathcal{B}^T$. Par conséquent, $|\mathcal{B}^T| = |W| < \infty$.*

Démonstration. — Si $n \in N_G(T)$ et $B \in \mathcal{B}^T$, alors $n \cdot B = nBn^{-1}$ contient $nTn^{-1} = T$, d'où $n \cdot B \in \mathcal{B}^T$. Donc $N_G(T)$ stabilise $\mathcal{B}^T$. D'autre part, si B est un Borel contenant T alors, d'après le théorème 15.37.b, il contient aussi $C_G(T)$, et est donc un point fixe de $C_G(T)$. Donc $C_G(T)$ agit trivialement $\mathcal{B}^T$, et l'action de $N_G(T)$ se factorise à travers $W(T)$.

Montrons que l'action est transitive. Soient B et $B' = gBg^{-1}$ dans $\mathcal{B}^T$. Alors T et $g^{-1}Tg$ sont deux tores maximaux de B, donc il existe $b \in B$ tel que $g^{-1}Tg = b^{-1}Tb$. Alors $gb^{-1} := n$ appartient à $N_G(T)$, et $g = nb$, d'où $B' = nBn^{-1} = n{\cdot}B$. Il reste à voir que le stabilisateur de B dans $N_G(T)$ est égal à $C_G(T)$. Si $nBn^{-1} = B$, alors $n \in B \cap N_G(T) = N_B(T)$. Or $N_B(T) = C_B(T)$, d'après le théorème 12.14. Rappelons l'argument : si $g \in N_B(T)$, alors, pour tout $t \in T$, on a $(gtg^{-1})\,t^{-1} \in T \cap \mathcal{D}(B) = \{1\}$, donc g centralise T. □

Soient G, G' affines, $\pi : G \to G'$ un morphisme surjectif, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(G')$. D'après la proposition 15.24, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $\pi(B) \in \mathcal{B}'$, et tout Borel de G' est obtenu de la sorte. Donc π induit une application surjective $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, encore notée π. De plus, si $\operatorname{Ker}\pi$ est contenu dans un Borel, il est contenu dans tous (car normal), et donc l'on a $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Donc dans ce cas ϕ est une bijection.

***Proposition 16.10* (Groupe de Weyl d'un groupe quotient)**

Soient $\pi : G \to G'$ comme plus haut, T un tore maximal de G, $B \in \mathcal{B}^T$ et $T' = \pi(T)$, $B' = \pi(B)$.

1) *π induit un morphisme de groupes $\varphi : W_G(T) \to W_{G'}(T')$.*

2) $\phi(\mathcal{B}^T) = \mathcal{B}'^{T'}$, *et l'on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} W_G(T) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "w\mapsto w\cdot B"'] & W_{G'}(T') \arrow[d, "w'\mapsto w'\cdot B'"] \\ \mathcal{B}^T \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{B}'^{T'}. \end{tikzcd}$$

Par conséquent, φ est surjectif.

3) *Si* $\operatorname{Ker}\pi$ *est contenu dans un Borel, alors φ est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'abord, T' est un tore maximal de G', d'après la proposition 15.24. Il est clair que π envoie normalisateur et centralisateur de T dans leur analogues pour T', d'où 1). Voyons 2). Si $B \in \mathcal{B}^T$, alors $\pi(B)$ contient $\pi(T) = T'$. Donc $\phi(\mathcal{B}^T) \subseteq \mathcal{B}'^{T'}$. La commutativité du diagramme est immédiate. Montrons que $\mathcal{B}'^{T'} = \phi(\mathcal{B}^T)$. Soit $B' \in \mathcal{B}'^{T'}$. D'après la proposition 15.24, à nouveau, il existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tel que $\pi(B_0) = B'$. Alors T est un tore maximal de $P := \pi^{-1}(B')$, donc est contenu dans un Borel B de P. Or B_0 est un Borel de G contenu dans P, donc aussi un Borel de P. Alors B et B_0 sont conjugués, donc B est aussi un Borel de G $(*)$. Alors, d'après la proposition 15.24, $\pi(B)$ est un Borel de G'. Comme $\pi(B) \subseteq B'$, il vient $\pi(B) = B'$. Ceci prouve 2). Enfin, 3) est immédiat. □

Remarque 16.11. — Dans la démonstration précédente, on a montré : si P est un parabolique de G et B un Borel de P, alors B est un Borel de G.

16.5. Action d'un tore dans $\mathbb{P}(V)$ et conséquences pour $\mathcal{B}$. —

Lemme 16.12. — *Soient M un $\mathbb{Z}$-module, et $M_1, \dots, M_n$ des sous-modules propres et tels que M/M_i soit sans torsion. Alors $M \neq M_1 \cup \cdots \cup M_n$.*

Démonstration. — Supposons $M = M_1 \cup \cdots \cup M_n$. On peut supposer que $M_i \not\subseteq \bigcup_{j\neq i} M_j$, pour tout i. Soit alors $m_i \in M_i \setminus \bigcup_{j\neq i} M_j$. Comme M/M_1 est sans torsion, alors pour tout k, $m_1 + km_2 \notin M_1 \cup M_2$. Donc il existe $k' > k$ tels que $m_1 + km_2$ et $m_1 + k'm_2$ appartiennent au même M_i, avec $i \geq 3$, d'où $(k' - k)m_2 \in M_i$. Comme M/M_i est sans torsion, il vient $m_2 \in M_i$, contradiction. □

***Définition 16.13* (Le couplage $X(T) \times X^\vee(T) \to \mathbb{Z}$)**. — Soit T un tore. Un **cocaractère** de T est un morphisme de groupes algébriques $\mathbb{G}_m \to T$. On note $X^\vee(T)$ l'ensemble de ces cocaractères ; c'est un groupe abélien, la multiplication étant définie par $(\mu\mu')(z) = \mu(z)\mu'(z)$.

Soient $\chi \in X(T)$ et $\mu \in X^\vee(T)$. Alors $\chi \circ \mu$ est un morphisme de groupes algébriques $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(\chi \circ \mu)(z) = z^n, \qquad \forall z \in k^\times.$$

On pose $n = \langle \chi, \mu \rangle$. Ceci définit une application biadditive $X(T) \times X^\vee(T) \to \mathbb{Z}$.

***Proposition 16.14* (Dualité entre $X(T)$ et $X^\vee(T)$).** — *Soit $T \cong (\mathbb{G}_m)^r$ un tore. Alors $X(T)$ et $X^\vee(T)$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang r, et le couplage*

$$X(T) \times X^\vee(T) \to \mathbb{Z}$$

est parfait, c.-à-d., il permet d'identifier $X(T)$ au dual de $X^\vee(T)$ et réciproquement.

Démonstration. — Identifions T à $\{(z_1, \dots, z_r) \mid z_i \in k^\times\}$. On a déjà vu qu'on a un isomorphisme de groupes

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\sim} X(T), \qquad \nu \mapsto X^\nu.$$

D'autre part, à tout $\nu \in \mathbb{Z}^r$ on associe le cocaractère

$$\mu_\nu : z \mapsto (z^{\nu_1}, \dots, z^{\nu_r}).$$

On a $\mu_{\nu+\nu'} = \mu_\nu \mu_{\nu'}$. Si $\mu : \mathbb{G}_m \to T$ est un cocaractère, alors en composant μ avec les projections sur chaque facteur $\mathbb{G}_m$, on voit que $\mu = \mu_\nu$ pour un ν uniquement déterminé. Ceci montre que $\nu \mapsto \mu_\nu$ est un isomorphisme de groupes.

Notons ε_i l'élément de $\mathbb{Z}^r$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ème qui vaut 1, et posons $\mu_i = \mu_{\varepsilon_i}$. Alors $\mu_i(z) = (1, \dots, z, \dots, 1)$, où z est à la i-ème place, et on voit facilement que $(X_1, \dots, X_r)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ sont des bases de $X(T)$ et $X^\vee(T)$, duales l'une de l'autre. Ceci prouve la proposition. $\square$

Soient T un tore, et V un T-module rationnel de dimension finie. Alors T agit morphiquement dans $\mathbb{P}(V)$, *cf.* proposition 14.10.

Lemme 16.15. — *Il existe $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que $\mathbb{P}(V)^T = \mathbb{P}(V)^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$ $(*)$. Plus précisément, il existe $\phi_1, \dots, \phi_s \in X(T)$ tels que $(*)$ ait lieu pour tout $\lambda \in X^\vee(T)$ vérifiant $\langle \phi_i, \lambda \rangle \neq 0$, pour $i = 1, \dots, s$.*

Démonstration. — Soient $\chi_1, \dots, \chi_r \in X(T)$ les poids de T dans V, i.e. $V = V_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus V_{\chi_r}$. Pour $i \neq j$, chaque $\phi_{i,j} := \chi_i - \chi_j$ définit, via le couplage $\langle\ ,\ \rangle$, un élément non-nul de $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X^\vee(T), \mathbb{Z})$. On déduit alors du lemme 16.12 que $X^\vee(T) \neq \bigcup_{i \neq j} \mathrm{Ker}(\phi_{i,j})$. Donc il existe $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que $\chi_i \circ \lambda \neq \chi_j \circ \lambda$, pour $i \neq j$. Alors, on voit sans peine qu'une droite de V est stable par $\lambda(\mathbb{G}_m)$ ssi elle est contenue dans un V_{χ_i}, c.à.d. ssi elle est stable par T. Le lemme en découle. $\square$

Lemme 16.16. — *Soit $v \in V \setminus \{0\}$ et soit $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$. Alors, $[v]$ est un point fixe de $\mathbb{G}_m$ si, et seulement si, v est un vecteur propre de $\mathbb{G}_m$. Si ce n'est pas le cas, écrivons*

$$v = \sum_{r \leq i \leq s} v_i,$$

avec $v_i \in V_i$ et $r < s$. Dans ce cas, le morphisme $\sigma : \mathbb{G}_m \to \mathbb{P}(V)$, $t \mapsto t \cdot [v]$, s'étend en un morphisme $\widetilde{\sigma} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(V)$, tel que $\widetilde{\sigma}(0) = [v_r]$ et $\widetilde{\sigma}(\infty) = [v_s]$. On a

$$\widetilde{\sigma}(\mathbb{P}^1) = \overline{\mathbb{G}_m[v]} = \mathbb{G}_m[v] \cup [v_r] \cup [v_s],$$

et $[v_r]$, $[v_s]$ sont les seuls points fixes de $\mathbb{G}_m$ dans $\overline{\mathbb{G}_m[v]}$.

Démonstration. — La première assertion est claire. Pour démontrer la seconde, soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V formée de vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, où chaque e_i est de poids m_i et où

$$m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n.$$

Ecrivons $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. Soit $J = \{j \mid \alpha_j \neq 0\}$ et soient $j_1 = \min J$, $j_2 = \max J$. Posons $r = m_{j_1}$ et $s = m_{j_2}$. Par hypothèse, $r < s$. Posons

$$v_r = \sum_{m_j = r} \alpha_j e_j, \qquad v_s = \sum_{m_j = s} \alpha_j e_j.$$

Rappelons que $\mathbb{P}^1 = U \cup U'$, où $k[U] = k[t]$ et $k[U'] = k[t^{-1}]$. Posons $X := \overline{\mathbb{G}_m[v]}$. Pour tout $t \in k^\times$, on a

$$\sigma(t) = t \cdot [v] = \left[v_r + \sum_{m_j > r} t^{m_j - r} \alpha_j e_j \right]. \tag{1}$$

Ceci montre que σ se prolonge en un morphisme, noté f, de U vers $\mathbb{P}(V)$, tel que $f(0) = [v_r]$. Alors $f^{-1}(X)$ est un fermé de U contenant $k^\times$, donc égal à U. Par conséquent, $[v_r] \in X$.

De même, pour tout $t \in k^\times$, posons $g(t^{-1}) = \sigma(t)$. On a

$$g(t^{-1}) = \left[\sum_{m_j < s} (t^{-1})^{s - m_j} \alpha_j e_j + v_s \right]. \tag{2}$$

Comme précédemment, ceci entraîne que g se prolonge en un morphisme, encore noté g, de U' vers $\mathbb{P}(V)$, tel que $g(\infty) = [v_s]$, d'où $[v_s] \in X$.

Alors f et g sont des morphismes de U et U' vers $\mathbb{P}(V)$, qui vérifient $f(t) = g(t^{-1})$ sur $U \cap U' = \mathbb{G}_m$, donc induisent un morphisme $\widetilde{\sigma} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(V)$, tel que

$$\widetilde{\sigma}(0) = [v_r], \qquad \widetilde{\sigma}(\infty) = [v_s].$$

Ce sont deux points fixes distincts, puisque v_r et v_s sont des vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, de poids $r < s$.

D'autre part, comme $\mathbb{P}^1$ est une variété complète, $\widetilde{\sigma}(\mathbb{P}^1)$ est un fermé de $\mathbb{P}(V)$. Il est de plus irréductible et de dimension 1. Il est donc égal à $\overline{\mathbb{G}_m[v]}$. Par conséquent, on obtient que

$$\overline{\mathbb{G}_m[v]} = \widetilde{\sigma}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{G}_m[v] \cup [v_r] \cup [v_s].$$

Enfin, il est clair que l'orbite $\mathbb{G}_m[v]$ ne contient pas de point fixe de $\mathbb{G}_m$. Le lemme est démontré. □

***Lemme 16.17* (Sections hyperplanes)**. — *Soient H un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et X une sous-variété fermée irréductible de $\mathbb{P}(V)$, de dimension $d \geq 1$, non contenue dans H. Alors, $X \cap H$ est non vide, et chacune de ses composantes irréductibles est de dimension $d-1$.*

Démonstration. — Si on avait $X \cap H = \emptyset$, alors X serait une sous-variété fermée de l'espace affine $\mathbb{P}(V) \setminus H$. Alors X serait complète, irréductible, et affine, donc réduite à un point. Cette contradiction montre que $X \cap H \neq \emptyset$. Pour l'assertion concernant la dimension, voir [**Ku**, Chap.V, Prop.3.9], ou [**Die**], §4.3, Cor.2 de la Prop.7, ou [**Bo**, Lemma 13.4]. □

Remarque 16.18. — Dans le lemme 16.12, l'hypothèse que M/M_i soit sans torsion est nécessaire. Considérer l'exemple où $M = \mathbb{Z}^2$ et M_1, resp. M_3, est engendré par $2e_1$ et e_2, resp. e_1 et $2e_2$, tandis que $M_2 = \{(x,y) \mid x+y \in 2\mathbb{Z}\}$.

Proposition 16.19. — *Soient T un tore, V un T-module rationnel de dimension finie, et X une sous-variété fermée irréductible T-stable de $\mathbb{P}(V)$. Alors*

$$\# X^T \geq \dim(X) + 1.$$

Démonstration. — D'après le lemme 16.15, il existe $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que $\mathbb{P}(V)^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathbb{P}(V)^T$. Remplaçant T par $\lambda(\mathbb{G}_m)$, on peut donc se ramener au cas où $T = \mathbb{G}_m$.

Soient $d = \dim(X)$ et $n = \dim V$, et soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V formée de vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, c.-à-d., où chaque e_i est de poids m_i. Quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n.$$

Soient W l'hyperplan de V engendré par $e_2, \ldots, e_n$, et $H = \mathbb{P}(W)$; alors W et H sont T-stables. On procède par récurrence sur $d+n$. On peut supposer $d \geq 1$ et $X \not\subseteq H$. Alors, $X \cap H$ est T-stable et, d'après le lemme 16.17, toutes ses composantes sont de dimension $d-1$. Comme $\mathbb{G}_m$ est connexe, il stabilise chaque composante de $X \cap H$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbb{G}_m$ possède au moins d points fixes dans $X \cap H$. De plus, comme $X \not\subseteq H$, alors X contient un élément de la forme

$$x = \left[e_1 + \sum_{i \geq 2} \alpha_i e_i \right].$$

D'après la démonstration du lemme 16.16, on obtient que $\overline{\mathbb{G}_m x}$ contient la limite en $t = 0$ de $t \cdot x$, c.-à-d., l'élément

$$\left[e_1 + \sum_{m_i = m_1} \alpha_i e_i \right].$$

C'est un élément de $X^T \setminus H$. Il en résulte que $\#X^T \geq 1 + d$. La proposition est démontrée. □

Corollaire 16.20. — *Soient G connexe, et T un tore maximal.*

a) *Pour tout parabolique P, on a $\#(G/P)^T \geq 1 + \dim G/P$.*

b) $W = \{1\} \Leftrightarrow G$ *est résoluble.*

c) $\#W = 2 \Leftrightarrow \dim \mathcal{B} = 1$ *; dans ce cas $\mathcal{B} = \mathbb{P}^1$.*

d) *G est engendré par les sous-groupes de Borel contenant T.*

Démonstration. — D'après le théorème de Chevalley 14.11, G/P est une sous-variété fermée d'un $\mathbb{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. L'assertion a) découle donc de la proposition précédente.

Voyons b). Si G est résoluble, alors $N_G(T) = C_G(T)$ d'après le théorème 12.14.4), et donc $W = \{1\}$. Réciproquement, si $W = \{1\}$ et si B est un sous-groupe de Borel, la proposition 16.19 entraîne que G/B est un point, d'où $G = B$.

c) De même, si $\#W = 2$ alors $\dim \mathcal{B} = 1$. Réciproquement, supposons $\dim \mathcal{B} = 1$. D'après le lemme 16.15, il existe $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que $\mathcal{B}^T = \mathcal{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$. Alors $\mathcal{B}^T \neq \mathcal{B}$ (car $\mathcal{B}^T$ est fini), et pour $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}^T$ on a

$$(*) \qquad \overline{\lambda(\mathbb{G}_m)x} = \mathcal{B},$$

puisque $\dim \mathcal{B} = 1$. D'une part, ceci implique $\#\mathcal{B}^T = 2$, d'après le lemme 16.16 et la proposition 16.19. D'autre part, $(*)$ entraîne que le morphisme $\phi_x : \mathbb{G}_m \to \mathcal{B}$, $z \mapsto z \cdot x$ est dominant, donc induit une inclusion

$$k(\mathcal{B}) \subseteq k(\mathbb{G}_m) = k(t),$$

où t désigne une indéterminée. D'après le théorème de Lüroth, on a donc $k(\mathcal{B}) \cong k(t)$, c.-à-d., $\mathcal{B}$ est une courbe lisse complète rationnelle. D'après la classification des courbes, ceci entraîne que $\mathcal{B} \cong \mathbb{P}^1$.

Prouvons d) par récurrence sur $d = \dim G$. C'est vrai si $d \leq 2$, car dans ce cas G est résoluble, d'après le corollaire 15.27. Soit P le sous-groupe engendré par les sous-groupes de Borel contenant T. Il est fermé, d'après la proposition 10.1 ; c'est donc un sous-groupe parabolique. Si $P \neq G$, alors $\dim G/P \geq 1$

et donc T a au moins deux points fixes dans G/P. Donc T est contenu dans un conjugué $Q = gPg^{-1}$, distinct de P. Par hypothèse de récurrence, Q est engendré par ses sous-groupes de Borel qui contiennent T. Mais, d'après la remarque 16.11 ceux-ci sont des sous-groupes de Borel de G contenant T, et sont donc contenus dans P, d'où $Q \subseteq P$, contradiction ! Le corollaire est démontré. $\square$

17. Sous-groupes de Cartan d'un groupe réductif, d'après Luna

17.1. Théorème de Kostant-Rosenlicht. — Le théorème ci-dessous aurait pu être énoncé dans le chapitre sur les groupes unipotents.

***Théorème 17.1* (Kostant-Rosenlicht)**. — *Soit U un groupe unipotent et X une G-variété* **affine**. *Alors toute orbite de U dans X est fermée.*

Démonstration. — Soit O une orbite de U ; elle est ouverte dans son adhérence Y. Soit I l'idéal dans $k[Y]$ du fermé U-stable $Z = Y \setminus O$. Alors I est un U-module rationnel donc, d'après le théorème de Lie-Kolchin (cas unipotent), I contient un élément $f \in k[Y]^U$ non nul. Mais comme O est dense dans Y, alors $k[Y]^U = k$, et donc I contient un scalaire non nul, d'où $I = k[Y]$ et $Z = \emptyset$. Ceci prouve que O est fermée. $\square$

Remarque 17.2. — Le théorème s'étend au cas où X est quasi-affine, c.-à-d., un ouvert d'une variété affine ; voir [**Bo**, Prop. 4.10].

17.2. Sous-groupes de Cartan et radical unipotent. — Soient G un groupe réductif connexe et T un tore maximal de G. On désigne par $I(T)$ la composante connexe de l'intersection des sous-groupes de Borel de G contenant T, c.-à-d.,

$$I(T) = \Big(\bigcap_{B\in\mathcal{B}^T} B\Big)^0.$$

C'est un groupe résoluble connexe. Par conséquent, l'ensemble $I(T)_u$ de ses éléments unipotents est un sous-groupe fermé connexe, égal au radical unipotent $R_u(I(T))$. De plus, on voit facilement que

$$I(T)_u = \Big(\bigcap_{B\in\mathcal{B}^T} B_u\Big)^0.$$

D'autre part, T est un tore maximal de $I(T)$, et donc $I(T)$ est le produit semi-direct $TI(T)_u$, d'après le théorème 12.14. Le but de cette section est de démontrer le théorème ci-dessous.

***Théorème 17.3* (Chevalley)**. — *On a $I(T)_u = \{1\}$ et donc $I(T) = T$.*

Corollaire 17.4. — *Soit G réductif connexe.*
a) *Si T est un tore maximal, $C_G(T) = T$.*
b) *$Z(G)$ est l'intersection des tores maximaux.*
b) *Si S est un tore de G, alors $C_G(S)$ est réductif et connexe.*

Démonstration du corollaire. — Soit T un tore maximal. D'après le corollaire 15.38, $C_G(T)$ est contenu dans $I(T)$, d'où l'assertion a).

Il en résulte que $Z(G)$ est contenu dans T et donc dans l'intersection de tous les tores maximaux. Or, cette intersection est un sous-groupe fermé diagonalisable normal, donc contenu dans $Z(G)$ d'après le théorème de rigidité 8.16. Ceci prouve b).

Voyons c). On a déjà vu, dans le 15.37.a), que $C_G(S)$ est connexe. D'autre part, comme $U := \mathcal{R}_u(C_G(S))$ est le radical unipotent de l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de $C_G(S)$, on déduit du théorème 15.37.b) que U est contenu dans $I(T)_u$, donc trivial. le corollaire est démontré. $\square$

Démontrons maintenant le théorème de Chevalley. Nous suivrons la démonstration donnée récemment par Luna [**Lu99**]. On pose $J := I(T)_u$ et $X = \mathcal{B}$. Rappelons que, d'après le théorème 16.9, le groupe de Weyl W agit de façon simplement transitive sur X^T ; en particulier, X^T est fini.

17.3. La démonstration de Luna. —

Définition 17.5. — Pour tout $p \in X^T$, soit $X(p) := \{x \in X \mid p \in \overline{Tx}\}$.

***Théorème 17.6* (Luna)**. — *Les $X(p)$, pour $p \in X^T$, sont des ouverts affines de X, stables par J.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de G. D'après le théorème de Chevalley 14.11, il existe un G-module rationnel V de dimension finie, et une droite B-stable D de V, tels que

$$\mathrm{Stab}_G(D) = B, \qquad \mathrm{Stab}_{\mathrm{Lie}(G)}(D) = \mathrm{Lie}(B).$$

On peut supposer V égal au sous-espace engendré par la G-orbite de D, quitte à remplacer V par ledit sous-espace (ceci ne change pas les stabilisateurs ci-dessus). Alors, sous cette hypothèse, $X = G/B$ est une sous-variété fermée G-stable de $\mathbb{P}(V)$ qui n'est contenue dans aucun sous-espace propre $\mathbb{P}(W)$ avec $W \neq V$.

D'après le lemme 16.15, il existe $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que les points fixes de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathbb{P}(V)$ et dans X soient les mêmes que ceux de T. Chaque $p \in X^T$ est l'image dans $\mathbb{P}(V)$ d'un vecteur non-nul $v(p)$ qui est vecteur propre de $\lambda(\mathbb{G}_m)$; soit $m_\lambda(p) \in \mathbb{Z}$ le poids de v_p pour l'action de $\lambda(\mathbb{G}_m)$.

Observons que les $v(p)$ sont dans la même orbite sous $N_G(T)$, donc a fortiori sous G. Par conséquent, pour tout $p \in X^T$, l'orbite $G \cdot v(p)$ engendre V.

Choisissons $p_0 \in X^T$ tel que $m_\lambda(p_0)$ soit *minimal* et notons e_0 le vecteur associé. Il fait partie d'une base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de V formée de vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, où chaque e_i est de poids m_i, où $m_0 = m_\lambda(p_0)$ et où l'on peut supposer

$$m_1 \leq \cdots \leq m_n.$$

Soit $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*.

Lemme 17.7. — *On a* $m_0 < m_1$.

Démonstration. — Comme X n'est contenu dans aucun sous-espace $W \neq V$, il existe $v \in V$ tel que $e_i^*(v) \neq 0$ pour $i = 0, \dots, n$ et $[v] \in X$. Alors X contient $\sigma_v(0)$, la limite en 0 de $\lambda(z) \cdot [v]$, qui est un point fixe de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ et donc de T dans X.

Si on avait $m_1 < m_0$, alors $\sigma_v(0)$ serait de poids $m_1 < m_0$, contredisant la minimalité de m_0. Donc $m_1 \geq m_0$. Supposons $m_1 = m_0$. L'ensemble

$$Z := \{z \in k \mid \exists v \in V \text{ tel que } e_0^*(v) = 1,\ e_1^*(v) = z \text{ et } [v] \in X\}$$

est infini, car sinon X serait contenu dans une réunion finie d'hyperplans d'équations $e_0^* = 0$ ou $e_1^* = z_i e_0^*$, donc dans l'un d'eux (puisque X est irréductible), une contradiction. Mais tout $z \in Z$ donne lieu à un point fixe p_z de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans X vérifiant

$$e_0^*(p_z) \neq 0 \quad \text{et} \quad e_1^*(p_z) = z e_0^*(p_z).$$

En particulier, les p_z sont deux à deux distincts. Ceci contredit le fait que $X^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = X^T$ est fini. Cette contradiction montre que $m_1 > m_0$. Le lemme est démontré. □

Proposition 17.8. — *Posons* $X(\lambda, p_0) = \{x \in X \mid e_0^*(x) \neq 0\}$. *C'est un ouvert affine,* T*-stable, de* X. *De plus, on a*

$$X(\lambda, p_0) = X(p_0),$$

et $X(\lambda, p_0)$ *est stable par* J.

Démonstration. — Il est clair que $U := X(\lambda, p_0)$ est un ouvert affine, et il est T-stable car e_0^* est un vecteur de poids pour T.

Démontrons la deuxième assertion. Soit $x \in X(\lambda, p_0)$. Comme $m_0 < m_i$ pour tout $i \geq 1$, alors $\lambda(\mathbb{G}_m)x$ contient $p_0 = [e_0]$ dans son adhérence (comme limite en 0). Ceci montre que

$$X(\lambda, p_0) \subseteq X(p_0).$$

D'autre part, soit $x \in X(p_0)$. Alors $p_0 \in \overline{Tx}$ et donc l'orbite Tx rencontre l'ouvert $X(\lambda, p_0)$. Comme ce dernier est T-stable, on obtient qu'il contient x. Ceci montre que $X(\lambda, p_0) = X(p_0)$.

Montrons que $X(\lambda, p_0)$ est stable par J. Désignons par $e_0^\perp$ l'hyperplan de V^* orthogonal à e_0. Le groupe G agit rationnellement dans V^* et $\mathbb{P}(V^*)$.

Lemme 17.9. — 1) *Toute orbite de G dans $\mathbb{P}(V^*)$ rencontre l'ouvert $\mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbb{P}(e_0^\perp)$.*

2) *Par conséquent, l'orbite $G \cdot [e_0]$ est fermée dans $\mathbb{P}(V^*)$.*

Démonstration. — Soit $\phi \in V^* \setminus \{0\}$. Si on avait $G\phi \subseteq e_0^\perp$ alors ϕ serait orthogonal à $G \cdot e_0$, qui engendre V, et donc on aurait $\phi = 0$, contradiction. Ceci prouve la première assertion.

Montrons la seconde. Chaque e_i^* est de poids $-m_i$ pour $\lambda(\mathbb{G}_m)$, et comme

$$-m_n \leq \cdots \leq -m_1 < -m_0,$$

alors $[e_0^*]$ appartient à $\overline{\lambda(\mathbb{G}_m)x}$, pour tout $x \in \mathbb{P}(V^*) \setminus \mathbb{P}(e_0^\perp)$, et donc à l'adhérence de toute G-orbite dans $\mathbb{P}(V^*)$, d'après le point 1). Ceci montre que $G \cdot [e_0]$ est une orbite de dimension minimale, donc fermée. Le lemme est démontré. □

Revenons à la démonstration de la proposition 17.8 et montrons que $X(\lambda, p_0)$ est stable par J. Notons P le stabilisateur dans G de $[e_0^*]$. Puisque l'orbite $G \cdot [e_0^*]$ est fermée, donc complète, P est un sous-groupe parabolique de G. D'autre part, e_0^* est vecteur propre de T, donc P contient T. On en déduit que P contient un sous-groupe de Borel de G contenant T. Par conséquent, J est contenu dans P donc stabilise la droite $[e_0^*]$ et donc l'ouvert

$$X(\lambda, p_0) = \{x \in X \mid e_0^*(x) \neq 0\}.$$

(En fait, comme J est unipotent, il fixe non seulement la droite $[e_0^*]$ mais aussi le vecteur e_0^*). La proposition est démontrée. □

On peut maintenant achever la preuve du théorème 17.6. On voit de voir que $X(p_0) = X(\lambda, p_0)$ est un ouvert affine de X, stable par T et par J. Soit $p \in X^T$ arbitraire. Il existe $n \in N_G(T)$ tel que $p = n \cdot p_0$. Alors $X(p)$ égale $n \cdot X(p_0)$ donc est un ouvert affine de X stable par T et par nJn^{-1}. Or, $N_G(T)$ permute les sous-groupes de Borel contenant T et donc $nJn^{-1} = J$. Ceci termine la démonstration du théorème 17.6. □

***Proposition 17.10* (Luna)**. — *J agit trivialement sur $X = G/B$.*

Démonstration. — Comme T est résoluble connexe et X complète, les seules orbites fermées de T dans X sont les points fixes, et donc les $X(p)$, pour $p \in X^T$ recouvrent X.

Soit $x \in X$ arbitraire. Comme J est résoluble connexe, $\overline{Jx}$ contient un point y fixé par C. Soit $p \in X^T$ tel que $y \in X(p)$. Alors $X \setminus X(p)$ est un fermé stable par J ; il ne peut rencontrer Jx car sinon il contiendrait Jx et son adhérence, donc y, ce qui n'est pas le cas. Donc on a

$$Jx \subseteq X(p).$$

Comme J est unipotent et $X(p)$ affine, l'orbite Jx est fermée dans $X(p)$, d'après le théorème de Kostant-Rosenlicht 17.1. Comme $y \in X(p) \cap \overline{Jx}$, on obtient que $y \in Jx$, d'où $Jx = Jy = y$, puisque y est un point fixe de J ! Ceci montre que $x = y$ est fixé par J, et donc que J agit trivialement sur X. La proposition est démontrée. □

***Corollaire 17.11* (Théorème de Chevalley).** — *On a* $J = \{1\}$, *c.-à-d.,* $I(T) = T$.

Démonstration. — Comme J agit trivialement sur $X = \mathcal{B}$ et est connexe et unipotent, on obtient que

$$J \subseteq \Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B_u \Big)^0 = R_u(G).$$

Comme $R_u(G) = \{1\}$, puisque G est supposé réductif, on obtient $J = \{1\}$. Ceci prouve le corollaire, et donc le théorème 17.3. □

***Remarque 17.12*.** — L'hypothèse que G soit réductif n'est intervenue que dans l'étape finale ci-dessus. Pour G un groupe linéaire connexe quelconque et T un tore maximal de G, on peut définir J comme précédemment. Il est alors clair que $R_u(G) \subseteq J$, et la démonstration précédente montre alors que $J = R_u(G)$.

TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Ho] G. P. Hochschild, Basic theory of algebriac groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer Verlag, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Basic Algebra II, W.H. Freeman & Co, 1980.

[Jan] J. C. Jantzen, Representation of algebraic groups, Academic Press, 1987, second edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkäuser, 1985.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Laf] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Las] Y. Laszlo, Introduction à la géométrie algébrique, cours de M2 (2004-2006), disponible à l'adresse www.math.polytechnique.fr/~laszlo

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin Cummings publishing company, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 à l'Université Paris 6, disponible à l'adresse www.math.jussieu.fr/~polo

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.