CHAPITRE 6

GROUPES RÉDUCTIFS ET DONNÉES RADICIELLES

Version du 5/2/06

18. Groupes réductifs et semi-simples : un aperçu

18.1. Exemples de groupes réductifs. —

Lemme 18.1. — *Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(V)$. *On suppose que V est un G-module simple. Alors G est réductif.*

Démonstration. — Soit $N = \mathcal{R}_u(G)$. Comme N est normal, V^N est un sous-module de V, non nul d'après le théorème de Lie-Kolchin 11.4. Donc, puisque V est simple, $V^N = V$. Puisque N est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$, il vient $N = \{1\}$. □

Corollaire 18.2. — $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SL}(V)$, *le groupe spécial orthogonal* $\mathrm{SO}(V)$, *et le groupe symplectique* $\mathrm{SP}(V)$ (*si V est de dimension paire*) *sont des groupes réductifs.*

Démonstration. — C'est clair pour $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{SL}(V)$, qui agissent transitivement sur $V \setminus \{0\}$. Il en est de même pour $\mathrm{SP}(V)$, si $\dim(V)$ est pair. On sait aussi que $\mathrm{SO}(V)$ agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs non-nuls de norme donnée, et on en déduit facilement la simplicité de V. □

18.2. Algèbres de Lie semi-simples complexes. — À titre d'illustration pour ce qui va suivre, mentionnons brièvement l'analogie avec la théorie des algèbres de Lie semi-simples sur $\mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ désigne ici un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Pour ceci, voir, par exemple, [**Hu1**].

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie.

Définition 18.3. — La somme de tous les idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$ est un idéal résoluble, noté $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ et appelé le radical de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathcal{R}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Définition 18.4. — 1) Une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie résoluble maximale.

2) Une sous-algèbre torique est une sous-algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{t}$ telle $\mathrm{ad}(x)$ soit semi-simple, pour tout $x \in \mathfrak{t}$. Dans ce cas, d'après le lemme 7.14, on a

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_r},$$

pour certains $\lambda_i \in \mathfrak{t}^* \setminus \{0\}$, où $\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda_i(h)x, \ \forall h \in \mathfrak{t}\}$. Les λ_i (ainsi que 0) s'appellent les **poids** de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$.

Proposition 18.5. — *Toutes les sous-algèbres toriques maximales de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^0$ ([**Hu1**, Th. 16.2]).

Théorème 18.6. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre torique maximale et R l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors*

1) *On a $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

2) *R est un système de racines dans $\mathfrak{h}^*$ qui, à isomorphisme près, ne dépend que de $\mathfrak{g}$. On note W son groupe de Weyl.*

3) *On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$, et $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in R$.*

4) *Les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ sont en bijection avec W, et avec l'ensemble des chambres de Weyl (ou des bases) de R.*

5) *$\mathfrak{g}$ est déterminée par R, et l'on a une bijection*

$$\{\mathbb{C}\text{-}\textit{algèbres de Lie semi-simples}\} \leftrightarrow \{\textit{systèmes de racines}\}.$$

La classification des groupes algébriques semi-simples, ou réductifs, est analogue, mais nécessite quelques données supplémentaires.

18.3. Données radicielles. —

Définition 18.7. — Une **donnée radicielle** est un quadruplet $(M, M^\vee, R, R^\vee)$, où :

a) M et $M^\vee$ sont deux $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, en dualité par un couplage parfait $\langle\ ,\ \rangle$,

b) R et $R^\vee$ sont des sous-ensembles de M et $M^\vee$, en bijection par une application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$, et vérifiant, pour tout $\alpha \in R$, $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et

$$s_\alpha R = R, \qquad s_{\alpha^\vee} R^\vee = R^\vee,$$

où s_α et $s_{\alpha^\vee}$ sont les réflexions définies, pour $m \in M$ et $m^\vee \in M^\vee$, par :

$$s_\alpha(m) = m - \langle m, \alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad s_{\alpha^\vee}(m^\vee) = m^\vee - \langle \alpha, m^\vee \rangle \alpha^\vee.$$

On dit que la donnée radicielle est **réduite** si elle vérifie de plus la condition suivante : si $\alpha, \beta \in R$ sont telles que $\mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}\beta$, alors $\beta = \pm\alpha$. Dans la suite, n'interviendront que des données radicielles réduites, et l'on parlera simplement de **données radicielles**.

Remarque 18.8. — 1) La condition $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ implique $\alpha \neq 0$, pour tout $\alpha \in R$.

2) Soit V le sous-espace vectoriel de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R. Alors R est un système de racines dans V, et $R^\vee$ s'identifie au système de racines dual dans V^*, *cf.* [**BLie**, VI, §1] ou [**Hu1**, Chap.III].

***Définition 18.9* (Réseaux des racines et des poids)**. —
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, R un système de racines dans V, et $R^\vee$ le système de racines dual dans V^*.

1) On note $Q(R)$ le sous-groupe de V engendré par R ; c'est un réseau de V, appelé le **réseau des racines**. De même, $Q(R^\vee)$ est un réseau dans V^*, appelé le réseau des coracines.

2) On pose $P(R) := \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha^\vee \in R^\vee\}$. C'est un réseau de V, contenant $Q(R)$, et appelé le **réseau des poids**.

Définition et proposition 18.10. — *Une donnée radicielle* $(M, M^\vee, R, R^\vee)$ *est dite* **semi-simple** *si* $Q(R)$ *a même rang que* M. (*On peut montrer que ceci a lieu si, et seulement si* $\operatorname{rg} Q(R^\vee) = \operatorname{rg} M^\vee$, *c.-à-d., la condition est symétrique en* R *et* $R^\vee$.)

Dans ce cas, on a $Q(R) \subseteq M \subseteq P(R)$, *et* $M^\vee$, *étant le réseau dual de* M, *est déterminé par*

$$M^\vee = \{\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(P(R), \mathbb{Z}) \mid \eta(M) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

Par conséquent, $(M, M^\vee, R, R^\vee)$ *est déterminée par la donnée de* M *et* R *ou encore, de façon équivalente, par la donnée de* R *et d'un sous-groupe du groupe fini* $P(R)/Q(R)$.

Par abus de language, nous dirons qu'une **donnée radicielle semi-simple** *est une paire* (R, M), *où* R *est un système de racines dans un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* V, *et où* M *est un réseau de* V *tel que* $Q(R) \subseteq M \subseteq P(R)$.

18.4. Exemple : données radicielles de GL_n, SL_n et PGL_n. —

18.4.1. GL_n. — Soient $G = \mathrm{GL}_n$ et T, resp. B, resp. U, le sous-groupe des matrices diagonales, resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires supérieures et unipotentes.

Alors B est résoluble et connexe (car isomorphe à $(k^*)^n \times k^{n(n-1)/2}$). De plus, G/B est isomorphe à la variété des drapeaux $\mathcal{F}(V)$, qui est projective.

Donc B est un sous-groupe de Borel de G. On voit facilement que $B_u = U$ et que $B = TU$. Donc T est un tore maximal de G. On a

$$(1) \qquad X(T) = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n, \qquad X^\vee(T) = \mathbb{Z}\eta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\eta_n,$$

où ε_i est la i-ème projection $T \to k^*$, et où $\eta_i(t)$ est la matrice diagonale dont tous les termes valent 1 sauf le i-ème qui vaut t. On a

$$\langle \varepsilon_i, \eta_j \rangle = \delta_{i,j},$$

c.-à-d., $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sont des bases duales l'une de l'autre.

On sait que le commutant d'une matrice diagonale à valeurs propres distinctes se réduit à T, et donc $T = C_G(T)$. D'autre part, on voit sans difficulté que $N_G(T)$ est le groupe des matrices monômiales. Donc $W := N_G(T)/T$ est le groupe symétrique S_n ; il agit sur $X(T)$ et $X^\vee(T)$ en permutant les ε_i et les η_i.

Soient $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(B)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$. Alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq n} kE_{i,j}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} kE_{i,j}$$

et, pour tout $t \in T$, l'on a

$$\mathrm{Ad}(t)E_{i,j} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(t)E_{i,j},$$

c.-à-d., $E_{i,j}$ est un élément de $\mathfrak{g}$ de poids $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ pour l'action adjointe de T.

Posons

$$\begin{array}{rcl} R & = & \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \\ R^\vee & = & \{\eta_i - \eta_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}. \end{array}$$

On vérifie que $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle : la réflexion associée à $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ (resp. $\eta_i - \eta_j$) est la permutation qui échange ε_i et ε_j (resp. η_i et η_j).

Posons $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$.

18.4.2. SL_n. — Soit $G_1 = \mathrm{SL}_n$. On vérifie que $B_1 = B \cap G_1$ est un sous-groupe de Borel, et $T_1 = T \cap G_1$ un tore maximal, de G_1, et l'on a $B_1 = T_1 U$. La restriction du déterminant au tore T de GL_n est le caractère $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$; on en déduit que

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} X(T_1) & = & (\mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n)/\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n), \\ X^\vee(T_1) & = & \{a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n \mid a_i \in \mathbb{Z},\, \sum_{i=1}^n a_i = 0\}. \end{array} \right.$$

Notons $\overline{\varepsilon}_i$ la restriction de ε_i à T_1. Les $\overline{\varepsilon}_i - \overline{\varepsilon}_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$ forment dans $\overline{V} = V/\mathbb{R}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$ un système de racines de type A_{n-1}. Les $\eta_i - \eta_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$ forment le système dual $R^\vee$. Ici, $R^\vee$ engendre $X^\vee(T_1)$, tandis que $X(T_1) = P(R)$ et $X(T_1)/Q(R) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (le vérifier).

18.4.3. PGL_n. — Soit $\pi : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n =: G_2$. Alors $B_2 = \pi(B)$ est un sous-groupe de Borel, et $T_2 = \pi(T)$ un tore maximal, de G_2. Via π^*, $X(T_2)$ s'identifie à un sous-groupe de $X(T)$, et on a

$$(3) \qquad \begin{cases} X(T_2) & \cong & \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n \mid a_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^n a_i = 0\}, \\ X^\vee(T_2) & = & (\mathbb{Z}\eta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\eta_n)/\mathbb{Z}(\eta_1 + \cdots + \eta_n). \end{cases}$$

Posons $\overline{\eta}_i = \pi \circ \eta_i$. Les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \le i \ne j \le n$ forment un système de racines de type A_{n-1}, et les $\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_j$, $1 \le i \ne j \le n$ forment le système dual $R^\vee$. Ici, R engendrent $X(T_2)$, tandis que $X^\vee(T_2) = P(R^\vee)$ et $X^\vee(T_2)/Q(R^\vee) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (le vérifier).

18.5. Centralisateurs infinitésimaux d'éléments semi-simples. — Si G est un groupe réductif et T un tore maximal de G, un résultat important est que, pour l'action adjointe de T sur $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, l'espace de poids 0 :

$$\mathfrak{g}^T := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)(X) = X, \quad \forall t \in T\}$$

égale $\mathrm{Lie}\, C_G(T)$. Ceci est une conséquence du théorème suivant (ou de son corollaire).

Théorème 18.11. — *Soient K un groupe algébrique affine, G un sous-groupe fermé connexe, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, S un sous-groupe abélien (non nécessairement fermé) de K formé d'éléments semi-simples et normalisant G. On note*

$$\begin{aligned} G^S &= \{g \in G \mid sgs^{-1} = g, \forall s \in S\}, \\ \mathfrak{g}^S &= \{X \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{Ad}\, s)X = X, \forall s \in S\}. \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Lie}(G^S) = \mathfrak{g}^S$.

Corollaire 18.12. — *Soient G un groupe algébrique affine connexe, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, et S un sous-groupe fermé, diagonalisable, de G. Alors $\mathfrak{g}^S = \mathrm{Lie}(C_G(S))$.*

Bien que le corollaire soit le résultat en vue (et un cas particulier du théorème), l'énoncé du théorème se prête mieux à une démonstration par récurrence. Commençons par démontrer la

Proposition 18.13. — *Soient $G \subseteq K$ des groupes algébriques affines, $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie, s un élément semi-simple de K normalisant G. Alors, avec les notations du théorème, on a $\mathrm{Lie}(G^s) = \mathfrak{g}^s$.*

Démonstration. — Plongeant K dans un $\mathrm{GL}(V)$, on se ramène au cas où $K = \mathrm{GL}(V)$. On peut alors supposer que $s = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r)$, où chaque λ_i apparaît n_i fois. Alors, un calcul direct montre que

$$K^s = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{n_i} \quad \text{et} \quad \mathrm{Lie}(K^s) = \prod_{i=1}^r \mathfrak{gl}_{n_i} = \mathfrak{k}^s.$$

D'autre part, $\mathrm{Ad}\, s$ est un automorphisme semi-simple de $\mathfrak{k}$, et l'on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^s \oplus \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est la somme directe des espaces propres de $\mathrm{Ad}\, s$ pour les valeurs propres $\neq 1$. Notons $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\, s$ la restriction de $\mathrm{Ad}\, s$ à $\mathfrak{g}$.

Considérons le morphisme $\varphi : K \to K, h \mapsto hsh^{-1}s^{-1}$ et posons $M = \mathrm{Im}\, \varphi$. Alors M est le translaté par s^{-1} de la classe de conjugaison de s, c'est donc une sous-variété localement fermée, de dimension égale à $\dim(K/K^s)$.

D'autre part, φ est la composée des morphismes

$$K \xrightarrow{(\mathrm{id},\theta)} K \times K \xrightarrow{\mu} K,$$

où $\theta(h) = sh^{-1}s^{-1}$, et μ est la multiplication. Comme $\theta = (\mathrm{Ad}\, s) \circ i$, où $i(h) = h^{-1}$, on en déduit que $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{id} + \mathrm{d}\theta = \mathrm{id} - \mathrm{Ad}\, s$. Donc $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\varphi = \mathfrak{k}^s = \mathrm{Lie}(K^s)$. Par conséquent, pour une raison de dimension, $\mathrm{d}\varphi : \mathfrak{k} \to T_eM$ est surjective, et T_eM s'identifie à $\mathfrak{m}$.

Notons ψ la restriction de φ à G ; alors $\mathrm{d}\psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\, s$. D'autre part, ψ est constante sur G^s et donc $\mathrm{Lie}(G^s) \subseteq \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\psi = \mathfrak{g}^s$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $\dim \mathfrak{g}^s \leq \dim G^s$.

Soit $M' = \mathrm{Im}\, \psi = \{gsg^{-1}s^{-1} \mid g \in G\}$. Comme précédemment, M' est une sous-variété localement fermée de dimension $\dim(G) - \dim(G^s)$. De plus, comme s normalise G alors $M' \subseteq G \cap M$, et donc $T_eM' \subseteq T_eG \cap T_eM = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$. Par conséquent, $\dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}) \geq \dim(M')$.

D'autre part, comme $\mathrm{Ad}\, s$ est semi-simple et comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^s \oplus \mathfrak{m}$ est la décomposition en sous-espaces propres, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s \oplus (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m})$. Par conséquent,

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^s = \dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}) \geq \dim M' = \dim(G/G^s) = \dim \mathfrak{g} - \dim G^s.$$

La proposition en résulte. □

On peut maintenant démontrer le théorème, par récurrence sur $\dim G$. Si $G^S = G$ alors $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\, s = \mathrm{id}$, pour tout $s \in S$, et donc $\mathfrak{g}^S = \mathfrak{g}$. Sinon, soit $s \in S$ tel que $G^s \neq G$. Posons $H = (G^s)^0$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. Comme S est abélien, on voit aussitôt que S normalise G^s, et donc H.

D'après la proposition, on a $\mathfrak{g}^s = \mathfrak{h}$, d'où $\mathfrak{g}^S = \mathfrak{h}^S$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on a $\mathfrak{h}^S = \mathrm{Lie}(H^S)$. Enfin, $\mathrm{Lie}(H^S) \subseteq \mathrm{Lie}(G^S)$, puisque $H^S \subseteq G^S$. On déduit de cela que $\mathfrak{g}^S = \mathrm{Lie}(G^S)$. Le théorème est démontré. □

Exercice 18.14. — Supposons $\mathrm{car}(k) = 2$. Soient $G = \mathrm{SL}_2$, B un Borel, et $x \in B_u \setminus \{1\}$. Montrer que $G^x = B_u$, mais que $\mathrm{Lie}(G)^x = \mathrm{Lie}(B)$.

18.6. Un aperçu de la structure des groupes réductifs. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal de G, et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie. D'après le théorème de Chevalley-Luna, on a $C_G(T) = T$ (*cf.* Corollaire

17.4) ; combiné avec le corollaire 18.12, ceci entraîne $\mathfrak{g}^T = \mathfrak{h}$. On peut donc écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

où R est un sous-ensemble fini de $X(T) \setminus \{0\}$. Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 18.15. — *Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $W(G,T) = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl associé, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, et R l'ensemble des poids non-nuls de T dans $\mathfrak{g}$. Alors,* on sait déjà que $\mathfrak{g}^T = \mathfrak{h}$, d'où

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^T \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

et

(1) $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$ *est une donnée radicielle et $W(G,T)$ s'identifie au groupe de Weyl de R.*

(2) *Pour tout $\alpha \in R$, on a* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, *et il existe un unique sous-groupe fermé unipotent connexe U_α, normalisé par T, et tel que* $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$.

(3) *G est engendré par T et les U_α, $\alpha \in R$.*

(4) *Les sous-groupes de Borel contenant T sont en bijection avec W et avec les chambres de Weyl (et les bases) de R.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Il faut d'abord traiter le cas des groupes réductifs de rang 1, au sens de la définition ci-dessous.

***Définition 18.16* (Rang et rang réductif ou semi-simple)**. — Soit G un groupe algébrique affine.

a) On appelle **rang** de G la dimension d'un tore maximal de G.

b) On appelle **rang réductif** de G le rang de $G/\mathcal{R}_u(G)$, qu'on note $\mathrm{rg}_{\text{réd}}(G)$.

c) On appelle **rang semi-simple** de G le rang de $G/\mathcal{R}(G)$, qu'on note $\mathrm{rg}_{\text{ss}}(G)$.

Remarque 18.17. — Soit G connexe. Si $\mathrm{rg}(G) = 0$, alors G est unipotent. En effet, soit B un sous-groupe de Borel de G. Alors B est unipotent donc nilpotent, et $G = B$ d'après la proposition 15.26.

18.7. Radical d'un groupe réductif connexe. —

Proposition 18.18. — *Soit G réductif connexe.*

a) *$\mathcal{R}(G)$ est un tore, égal à $Z(G)^0$, et* $\mathrm{rg}_{ss}(G) = \mathrm{rg}(G) - \dim Z(G)^0$.

b) *$Z(G) \cap \mathcal{D}(G)$ est fini.*

c) *$\mathcal{D}(G)$ est semi-simple, et* $\mathrm{rg}\,\mathcal{D}(G) \leq \mathrm{rg}_{ss}(G)$

Démonstration. — a) $\mathcal{R}(G)$ est résoluble connexe, et $\mathcal{R}(G)_u = \{1\}$. Donc $\mathcal{R}(G)$ est un tore. Il est normalisé par G, donc est central d'après le théorème de rigidité 8.16. Donc $\mathcal{R}(G) \subseteq Z(G)^0$, et l'inclusion réciproque est évidente. De plus, $\mathcal{R}(G) = Z(G)^0$ est contenu dans un tore maximal T, et $T/\mathcal{R}(G)$ est un tore maximal de $G/\mathcal{R}(G)$, d'après le théorème 15.24. La deuxième assertion de a) en découle.

Pour b), il suffit de montrer que $Z(G)^0 \cap \mathcal{D}(G)$ est fini. Posons $Z(G)^0 = S$. On plonge G dans un $\mathrm{GL}(V)$. Alors il existe $\chi_1, \dots, \chi_r \in X(S)$ tels que $V = V_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus V_{\chi_r}$. Comme G commute à S, alors

$$G \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}(V_{\chi_i}), \quad \text{d'où} \quad \mathcal{D}(G) \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{SL}(V_{\chi_i}).$$

L'assertion en découle. Voyons c). Soit R le radical de $\mathcal{D}(G)$. Il est stable par tout automorphisme de $\mathcal{D}(G)$ et est donc un sous-groupe normal de G. Il en résulte que $R \subseteq Z(G)^0$; alors R est fini, donc trivial. Donc $\mathcal{D}(G)$ est semi-simple. De plus, si T' est un tore maximal de $\mathcal{D}(G)$, alors $T'Z(G)^0$ est un tore de G, de dimension $\dim T' + \dim Z(G)^0$. Donc $\mathrm{rg}\,\mathcal{D}(G) \leq \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(G)$. □

Remarque 18.19. — En fait, on a l'égalité dans l'assertion c) de la proposition, comme on le verra plus loin (23.3).

19. Fibrés vectoriels et applications

La lecture de cette section peut être omise : la notion de fibré vectoriel et les résultats s'y rapportant ne sont utilisés que pour les théorèmes 19.15 et 20.4 qui classifient les groupes connexes de dimension 1 ($\mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$) et les groupes connexes semi-simples de rang 1 (SL_2 ou PGL_2). Ces deux résultats de classification peuvent être admis.

19.1. Fibrés vectoriels algébriques. — Soit X une variété algébrique. Introduisons pour un instant la notion suivante.

Une **fibration vectorielle** (de rang r) sur X est la donnée d'une variété E et d'un morphisme surjectif $\pi : E \to X$ tels que toute fibre de π soit munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension r. L'exemple trivial est le cas où $E = X \times V$, pour V un k-espace vectoriel de dimension r.

Un **morphisme de fibrations** $(E, \pi) \to (E', \pi')$ est un morphisme de variétés $\phi : E \to E'$ tel que $\pi' \circ \phi = \pi$ (i.e. ϕ préserve les fibres), et chaque restriction $\phi_x : \pi^{-1}(x) \to \pi'^{-1}(x)$ est linéaire.

Définition 19.1. — Un **fibré vectoriel algébrique** sur X est une fibration vectorielle (E, π) qui est localement triviale, c.-à-d., qui satisfait la condition de trivialité locale ci-dessous :

$$(*^{TL}) \qquad \begin{cases} \text{il existe un recouvrement ouvert } X = U_1 \cup \cdots \cup U_n, \\ \text{et un isomorphisme de fibrations : } U_i \times k^r \cong \pi^{-1}(U_i). \end{cases}$$

Souvent on dira simplement que « E est un fibré (de rang r) sur X », et si $r = 1$ on dira que E est un **fibré en droites**.

***Définition 19.2* (Sections).** — Si $E = (E, \pi)$ est un fibré sur X, une section (globale) de E est un morphisme $\sigma : X \to E$ tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$. Plus généralement, pour tout ouvert U de X notons $\mathcal{S}_E(U)$ l'ensemble des sections (locales) de E au-dessus de U, c.-à-d., des morphismes $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.

Il résulte de la condition $(*^{TL})$ que, si $s, s' \in \mathcal{S}_E(U)$, et $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$, alors l'application $fs + gs' : x \mapsto f(x)s(x) + g(x)s'(x) \in \pi^{-1}(x)$ est un morphisme, et donc un élément de $\mathcal{S}_E(U)$. Donc $\mathcal{S}_E(U)$ est un module sur $\mathcal{O}_X(U)$. En particulier, c'est un k-espace vectoriel, il contient toujours la **section nulle**, notée s_0. On vérifie que $\mathcal{S}_E$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, appelé le **faisceau des sections** (locales) de E.

Si $E = X \times V$ est un fibré trivial, on voit aussitôt que l'ensemble des sections globales est un $k[X]$-module libre, isomorphe à $k[X] \otimes V$. Revenant au cas général, on en déduit que, pour chaque ouvert U au-dessus duquel E est trivial, on a $\mathcal{S}_E|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus r}$. On a donc obtenu la

Proposition 19.3. — *$\mathcal{S}_E$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang r (c.-à-d., localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$).*

On pose $\Gamma(X, E) = \Gamma(X, \mathcal{S}_E) = \mathcal{S}_E(X)$. C'est un espace vectoriel, dont le zéro est la section nulle s_0. Observons au passage que $s_0(X)$ est une sous-variété fermée, isomorphe à X (vérification locale). On dit que E possède des sections non-triviales si $\Gamma(X, E) \neq 0$.

***Définition 19.4* (Zéros d'une section).** — 1) Si $s \in \Gamma(X, E)$, on dit que $x \in X$ est un **zéro de** s si $s(x)$ est l'élément nul de $\pi^{-1}(x)$.

2) Si E est un fibré en droites, on peut définir l'**ordre d'annulation de** s **en** x de la façon suivante. On choisit un isomorphisme $\varphi : U \times k \cong \pi^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert affine de x assez petit, et on note s_1 l'élément de $\mathcal{S}(U)$ correspondant par cet isomorphisme à la fonction constante 1. Alors $\mathcal{S}(U) = k[U]s_1$ et donc il existe $\phi \in k[U]$ tel que $s = \phi s_1$; alors l'ordre d'annulation de s en x est le plus grand n tel que $\phi \in \mathfrak{m}_x^n$, où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $k[U]$ correspondant à x. Si φ' est un autre isomorphisme, on obtient un autre générateur s_1' du $k[U]$-module $\mathcal{S}(U)$, d'où $s_1 = \psi s_1'$ et $s = \phi\psi s_1'$, pour une fonction $\psi \in k[U]$ inversible. Donc l'ordre d'annulation de s en x est bien défini ; on dira aussi que x est un **zéro de** s **d'ordre** n.

19.2. Le fibré associé à un module localement libre. — Soit X une variété algébrique affine irréductible, $A = k[X]$, et M un A-module de type fini. Son algèbre tensorielle est par définition :

$$T_A(M) = A \oplus M \oplus (M \otimes_A M) \oplus (M \otimes_A M \otimes_A M) \oplus \cdots$$

et son algèbre symétrique est $S_A(M) = T_A(M)/I$, où I désigne l'idéal engendré par les éléments $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$, pour $m_1, m_2 \in M$. Comme M est de type fini, on voit facilement que $S_A(M)$ est une A-algèbre commutative de type fini, et donc aussi une k-algèbre commutative de type fini. De plus, comme I est engendré par des éléments homogènes (de degré 2), alors $S_A(M)$ est graduée :

$$S_A(M) = A \oplus M \oplus S^2_A(M) \oplus S^3_A(M) \oplus \cdots$$

De plus, $S_A(M)$ a la propriété universelle suivante :

$$\mathrm{Hom}_A(M, B) = \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(S_A(M), B),$$

pour toute A-algèbre commutative B. Introduisons aussi le A-module $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

Lemme 19.5. — a) *L'inclusion $M \subset S_A(M)$ induit un isomorphisme de A-modules :*

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg.}}(S_A(M), A) \cong M^\vee := \mathrm{Hom}_A(M, A).$$

b) *Si V est un k-espace vectoriel, la structure d'algèbre graduée de $S(V)$ munit $\mathrm{Max}\, S(V)$ d'une structure d'espace vectoriel, isomorphe à V^*.*

Démonstration. — b) est évidemment un cas particulier de a) (prendre $A = k$). Voyons a). La structure d'algèbre graduée de $S_A(M)$ fournit l'inclusion $M \subset S_A(M)$. Alors la propriété universelle de $S_A(M)$ fournit une identification canonique $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg.}}(S_A(M), A) = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. $\square$

Supposons désormais que M soit localement libre de rang r, c.-à-d., que, pour tout $x \in X$, $M_x := M \otimes_A \mathcal{O}_{X,x}$ soit un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre de rang r [(1)]. Alors, on peut montrer (voir [Bo, AG.16.3]) que $S_A(M)$ est intègre, et localement isomorphe à une algèbre de polynômes $A[T_1, \ldots, T_r]$, c.à.d., il existe $f_1, \ldots, f_s \in A$ tels que

$$(*) \qquad X = \bigcup_i D(f_i) \quad \text{et} \quad S_A(M)_{f_i} \cong A_{f_i}[T_1, \ldots, T_r].$$

Considérons la variété affine $E(M) := \mathrm{Max}\, S_A(M)$. Alors $E(M)$ est un fibré vectoriel de rang r sur X. En effet, le morphisme d'algèbres $\tau : A \to S_A(M)$ induit un morphisme $\pi : E(M) \to X$. Pour tout x, on a un isomorphisme naturel d'algèbres graduées $S_A(M) \otimes_A A/\mathfrak{m}_x \cong S(M \otimes_A A/\mathfrak{m}_x)$. Notant $\Theta(B) =$

[(1)] On peut montrer qu'alors M est projectif. Réciproquement, tout A-module projectif est localement libre de rang r, où $r = \dim_{k(X)}(M \otimes_A k(X))$.

$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(B,k)$ pour toute k-algèbre B, on obtient alors des isomorphismes naturels :

$$\pi^{-1}(x) \cong \Theta\big(S_A(M) \otimes_A A/\mathfrak{m}_x\big) \cong \Theta\big(S(M \otimes_A A/\mathfrak{m}_x)\big) \cong \big(M/\mathfrak{m}_x M\big)^*.$$

Donc $\pi^{-1}(x)$ est un espace vectoriel de dimension r, pour tout x. De plus, on déduit de $(*)$ que chaque $\pi^{-1}(D(f_i))$ est isomorphe à $D(f_i) \times k^n$, donc la condition de trivialité locale $(*^{TL})$ est satisfaite. Observons aussi que, d'après le lemme, on a $\Gamma(X, E(M)) = \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(S_A(M), A) = M^\vee$.

On a ainsi associé à tout A-module localement libre M un fibré vectoriel $E(M)$ sur X, tel que $\Gamma(X, E(M)) = M^\vee$. On admettra que cette construction se faisceautise comme suit. Soit X une variété algébrique arbitraire. À tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{M}$ de rang r on peut associer un fibré vectoriel algébrique $E(\mathcal{M})$. Introduisons aussi le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{M}^\vee$ défini par $\mathcal{M}^\vee(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{O}_X(U))$, pour tout ouvert U. Alors $\mathcal{M}^\vee$ est localement libre de rang r, et l'on a $\mathcal{S}_{E(\mathcal{M}^\vee)} \cong \mathcal{M}$. Réciproquement, pour tout fibré E on a $E((\mathcal{S}_E)^\vee) \cong E$. En résumé, on obtient la

Proposition 19.6. — *Soit X une variété algébrique. Pour tout $r \geq 1$, on a :*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{fibrés vectoriels de rang } r \textit{ sur } X \\ \textit{modulo isomorphisme}\end{matrix}\right\} \cong \left\{\begin{matrix}\mathcal{O}_X\textit{-modules localement libres} \\ \textit{de rang } r \textit{ modulo isomorphisme}\end{matrix}\right\}$$

19.3. Le fibré tangent à une variété lisse. — Soient X une variété affine lisse irréductible, de dimension n, et $A = k[X]$. Il résulte de la démonstration du théorème 13.32 que le module des différentielles $\Omega_{A/k} = \Omega_{X/k}$ est un A-module localement libre de rang n. On obtient donc un fibré (TX, π) sur X, appelé le fibré tangent. C'est une variété lisse, de dimension $2n$ (car localement isomorphe à $X \times k^n$). Pour tout $x \in X$, rappelons que $\Omega_{X/k} \otimes_A k_x \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ (Proposition 13.11). On a donc des isomorphismes

$$\pi^{-1}(x) \cong (\Omega_{X/k} \otimes_A k_x)^* \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* = T_x X.$$

De plus, soient $Y = \mathrm{Max}(B)$ une variété affine, et $\phi : X \to Y$ un morphisme. Le comorphisme $\phi^* : B \to A$ induit un morphisme de A-modules $\Omega_{B/k} \otimes_B A \to \Omega_{A/k}$, et donc un morphisme d'algèbres

$$S_A(\Omega_{B/k} \otimes_B A) \to S_A(\Omega_{A/k}).$$

Or $S_A(\Omega_{B/k} \otimes_B A)$ s'identifie à $S_B(\Omega_{B/k}) \otimes_B A$ et contient donc $S_B(\Omega_{B/k})$ comme sous-algèbre. On obtient donc un morphisme de B-algèbres $S_B(\Omega_{B/k}) \to S_A(\Omega_{A/k})$, d'où un morphisme $TX \to TY$, noté $\mathrm{d}\phi$, tel que $\pi_Y \circ \mathrm{d}\phi = \phi \circ \pi_X$. De plus, on vérifie que pour tout $(x,v) \in TX$, où $x \in X$ et $v \in T_x X$, on a $\mathrm{d}\phi(x,v) = (\phi(x), \mathrm{d}_x\phi(v))$.

On peut montrer que ces propriétés se globalisent (*cf.* [Bo, AG.16.3]) :

Proposition 19.7. — *Soit X une variété algébrique lisse, de dimension n. Il existe un fibré vectoriel algébrique, $\pi : TX \to X$, tel que $\pi^{-1}(x) \cong T_xX$ pour tout x.*

De plus, tout morphisme de variétés $\phi : X \to Y$ induit un morphisme $\mathrm{d}\phi : TX \to TY$ tel que $\pi_Y \circ \mathrm{d}\phi = \phi \circ \pi_X$ et dont la restriction à $\pi^{-1}(x)$ coïncide avec $\mathrm{d}_x\phi$, pour tout $x \in X$.

On peut aussi montrer que $T(X \times Y) \cong TX \times TY$, quelques soient les variétés X, Y.

19.4. Champs de vecteurs et dérivations. — Si $E = TX$, une section globale de E est la donnée en chaque $x \in X$ d'un vecteur tangent $v_x \in T_xX$, c.-à-d., la donnée d'un champ de vecteurs sur X.

Lemme 19.8. — *Soit X affine lisse. Alors on a un isomorphisme $\Gamma(X, TX) \cong \mathrm{Der}_k(k[X])$. En particulier, $\Gamma(X, TX)$ est une algèbre de Lie.*

Démonstration. — Posons $A = k[X]$. On sait que $\mathrm{Der}_k(A) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, A)$. Par conséquent, toute dérivation D définit un morphisme de A-algèbres $\widetilde{D} : S_A(\Omega_{A/k}) \to A$, d'où un morphisme $\sigma_D : X \to TX$ tel que $\pi \circ \sigma_D = \mathrm{id}_X$. On vérifie que, pour tout x, $\sigma_D(x)$ est l'élément $\varepsilon_x \circ D : \phi \mapsto (D\phi)(x)$ de $\mathrm{Der}_k(A, k_x)$.

Réciproquement, à tout champ de vecteurs $v : x \mapsto v_x$, on associe la dérivation D_v définie, pour tout $f \in k[X]$ et $x \in X$, par

$$(D_v f)(x) = \mathrm{d}_x f(v_x) = \langle v_x, \overline{f - f(x)} \rangle,$$

où $\overline{f - f(x)}$ désigne l'image de $f - f(x)$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. On a bien $D_v f \in k[X]$. En effet, on identifie Tk à $k \times k$, alors $D_v f$ est la composée des morphismes

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{v} & TX & \xrightarrow{\mathrm{d}f} & k \times k & \xrightarrow{pr_2} & k \\ x & \longrightarrow & (x, v_x) & \longrightarrow & (f(x), \mathrm{d}_x f(v_x)) & \longrightarrow & \mathrm{d}_x f(v_x). \end{array}$$

Enfin, on vérifie que $D_{\sigma_D} = D$ pour tout D, et que $\sigma_{D_v} = v$ pour tout v. $\square$

Exemple 19.9. — On identifie Tk à $k \times k$ et on note $\partial/\partial x$ le champ de vecteurs constant $x \mapsto (x, 1)$. Sous l'identification précédente, ce champ de vecteurs correspond à la dérivation $f \mapsto f' = \partial f/\partial x$ (le vérifier !) ; et il engendre $\Gamma(k, Tk) = \mathrm{Der}_k(k[x])$, qui est un $k[x]$-module libre de rang un.

Le lemme précédent se faisceautise :

Corollaire 19.10. — *Soit X une variété lisse. Alors $\{$sections locales de $TX\} \cong \{$dérivations locales de $\mathcal{O}_X\}$.*

Proposition 19.11. — (voir [Sp, 3.3.2–3.3.4] et [Bo, 3.20]) *Soient G un groupe algébrique affine et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. On a des isomorphismes :*

$$\begin{array}{rcll} \Omega_{G/k} & \cong & k[G] \otimes \mathfrak{g}^*, & \textit{comme } k[G]\textit{-modules;} \\ TG & \cong & G \rtimes \mathfrak{g}, & \textit{comme groupes algébriques,} \end{array}$$

où $\mathfrak{g}$ est considéré comme groupe vectoriel ($\cong \mathbb{G}_a^n$, où $n = \dim G$), et la stucture de produit semi-direct est donnée par $g \cdot (g', X) = (gg', \mathrm{Ad}(g)X)$.

19.5. Exemples de fibrés vectoriels. — Le fibré tautologique E_T sur $\mathbb{P}^1$ est la donnée, au dessus de chaque point de $\mathbb{P}^1$, de la droite correspondante dans $V = k^2$. C'est la sous-variété fermée de $\mathbb{P}^1 \times k^2$ formée des points $([x, y], (z_1, z_2))$ vérifiant l'équation $yz_1 - xz_2 = 0$, la projection $E_T \to \mathbb{P}^1$ étant la première projection. Notons U et V les ouverts de $\mathbb{P}^1$ définis par $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors $\pi^{-1}(U) = \{(x, xz_2, z_2)\}$ est isomorphe comme fibration à $U \times k$, l'isomorphisme étant donné par $(x, z) \mapsto (x, xz, z)$. De même, $\pi^{-1}(V) \cong V \times k$. Donc E_T est bien un fibré vectoriel algébrique de rang 1 sur $\mathbb{P}^1$.

Proposition 19.12. — *On a* $\Gamma(\mathbb{P}^1, E_T) = \{0\}$.

Démonstration. — Il résulte de ce qui précède que $\mathcal{S}_E(U)$ est le $k[x]$-module libre engendré par la section $s(x) = (x, 1) \in k^2$. De même, $\mathcal{S}_E(V)$ est le $k[x^{-1}]$-module libre engendré par la section $s'(x^{-1}) = (1, x^{-1}) \in k^2$. De plus, $\mathcal{S}_E(U \cap V) = k[x, x^{-1}]s = k[x, x^{-1}]s'$. Comme $s = xs'$ sur $U \cap V$, alors $k[x]s = k[x]xs'$ ne rencontre $k[x^{-1}]s'$ qu'en 0. Il en résulte que $\Gamma(\mathbb{P}^1, E_T) = \{0\}$. □

Proposition 19.13. — *On a* $\dim \Gamma(\mathbb{P}^1, T\mathbb{P}^1) = 3$, *et toute section de $T\mathbb{P}^1$ admet deux zéros (comptés avec multiplicité). D'autre part, comme algèbre de Lie,* $\Gamma(\mathbb{P}^1, T\mathbb{P}^1)$ *est isomorphe* $\mathfrak{pgl}_2 = \mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2)$.

Démonstration. — Comme $k[U] = k[x]$ et $k[V] = k[x^{-1}]$, alors $\Gamma(U, T\mathbb{P}^1) = k[x]\partial/\partial x$ et $\Gamma(V, T\mathbb{P}^1) = k[x^{-1}]\partial/\partial x^{-1}$. Or, $\partial/\partial x = -x^{-2}\,\partial/\partial x^{-1}$. En effet, pour $n \geq 0$, $(\partial/\partial x)(x^{-n}) = -nx^{-n-1} = -x^{-2}\,(\partial/\partial x^{-1})(x^{-n})$. On en déduit que

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, T\mathbb{P}^1) = kx^2\frac{\partial}{\partial x} \oplus kx\frac{\partial}{\partial x} \oplus k\frac{\partial}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x^{-1}} \oplus kx^{-1}\frac{\partial}{\partial x^{-1}} \oplus kx^{-2}\frac{\partial}{\partial x^{-1}}.$$

Ainsi, chaque section

$$s = ax^2\partial/\partial x + bx\partial/\partial x + c\partial/\partial x = -a\partial/\partial x^{-1} - bx\partial/\partial x^{-1} - cx^{-2}\partial/\partial x^{-1}$$

s'annule en exactement deux points, comptés avec multiplicité : c'est clair si $a \neq 0$ ou $c \neq 0$, car alors $s = P(z)\partial/\partial z$, où P est un polynôme de degré 2 et $z = x$ ou bien x^{-1} ; et si $a = c = 0$, la section

$$x\partial/\partial x = -x^{-1}\partial/\partial x^{-1}$$

s'annule à l'ordre 1 en $x = 0$ et en $x^{-1} = 0$. Ceci prouve la première assertion.

D'autre part, posons $X_+ = x^2\partial/\partial x$, $X_- = -\partial/\partial x$ et $\delta = x\partial/\partial x$. Un calcul facile montre que

$$[\delta, X_\pm] = \pm X_\pm \quad \text{et} \quad [X_+, X_-] = \delta.$$

Par conséquent, désignant par e, f, h les images dans $\mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{gl}_2/k\,\mathrm{id}$ des matrices élémentaires E_{12}, E_{21}, E_{11}, on voit que l'application qui envoie X_+, X_-, δ sur e, f, h est un isomorphisme de k-algèbres de Lie de $\Gamma(\mathbb{P}^1, T\mathbb{P}^1)$ sur $\mathfrak{pgl}_2$. □

19.6. Actions de groupes et champs de vecteurs. —

Proposition 19.14. — *Soient X une variété munie d'une action $\sigma : G \times X \to X$ d'un groupe algébrique G, et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Alors $\mathrm{d}\sigma$ induit un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \Gamma(X, TX), \xi \mapsto \xi_X$. De plus, notant ϕ_x le morphisme $g \mapsto gx$, on a $\mathrm{d}\phi_x(\xi) = \xi_X(x)$, pour $x \in X$, $\xi \in \mathfrak{g}$.*

Démonstration. — On identifie X à $\{(e, 0)\} \times s_0(X) \subseteq T(G \times X)$, et $T_{(e,x)}(G \times X)$ à $\mathfrak{g} \oplus T_x X$. Pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on définit le champ de vecteurs ξ_X par $\xi_X(x) = \mathrm{d}_{(e,x)}\sigma(\xi, 0) \in T_x X$. Ceci est bien un morphisme $X \to TX$, car c'est la composée de $\mathrm{d}\sigma : TG \times TX \to TX$ avec le plongement $X \hookrightarrow TG \times TX$, $x \mapsto ((e, \xi), s_0(x))$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\xi \mapsto \xi_X$ est bien un morphisme d'algèbres de Lie. (En fait, σ induit un comorphisme $\sigma^* : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_G$, et pour $\xi \in \mathfrak{g}$ l'on a $\xi_x = (\mathrm{id} \otimes \xi) \circ \sigma^*$). De plus, on a $\mathrm{d}_{(e,x)}\sigma(\xi, 0) = \mathrm{d}\phi_x(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. □

19.7. Groupes connexes de dimension 1. — On peut maintenant énoncer le

Théorème 19.15. — *Soit G un groupe algébrique affine connexe de dimension 1. Alors $G \cong \mathbb{G}_a$ ou bien $G \cong \mathbb{G}_m$.*

Démonstration. — G est une courbe affine lisse. D'après la théorie des courbes, il existe une courbe projective lisse C, uniquement déterminée, telle que G soit un ouvert de C. Le morphisme $\mu : G \times G \to G \subseteq C$ induit une application rationnelle $\alpha : G \times C \to C$. Comme C est projective, et $G \times C$ lisse, donc normale, le complémentaire de $\mathrm{dom}(\alpha)$ est de codimension ≥ 2, donc un ensemble fini $E = \{(g_1, x_1), \ldots, (g_n, x_n)\}$, avec $x_i \notin G$. On va montrer que $E = \emptyset$. Soit $h \in G \setminus \{g_1, \ldots, g_n\}$. Alors les applications $\tau_h : C \to C$, $x \mapsto \alpha(h, x)$, et $\rho_h : G \to G$, $g \mapsto gh^{-1}$, sont des morphismes, et donc l'application rationnelle $\alpha_h = \alpha \circ (\rho_h, \tau_h) : G \times C \to C$, $(g, x) \mapsto \alpha(gh^{-1}, hx)$ est définie en (g_i, x_i) si $g_i h^{-1} \notin \{g_1, \ldots, g_n\}$. Donc, si on choisit de plus h hors de l'ensemble fini $\{g_j^{-1} g_i\}_{i,j=1}^n$, alors α_h est définie en (g_i, x_i). Or les applications rationnelles α_h et α coïncident sur l'ouvert $G \times G$, donc sont égales. Ceci montre que α est partout définie. Donc G opère morphiquement sur C. Alors, comme G est connexe et laisse stable l'ensemble fini $\Sigma := C \setminus G$, tout $x \in \Sigma$ est fixé par G.

Soit $\xi \in \mathrm{Lie}(G) \setminus \{0\}$. D'après la proposition 19.14, on obtient un champ de vecteur ξ_C sur C. Pour $x \in C$, on note ϕ_x le morphisme $G \to C, g \mapsto gx$. Si $x \in \Sigma$ alors ϕ_x est constant et donc $0 = \mathrm{d}\phi_x(\xi) = \xi_C(x)$. D'autre part, si $x \in G$ alors $\phi_x : G \to G$ est un automorphisme, d'où $\xi_C(x) = \mathrm{d}\phi_x(\xi) \neq 0$. Donc C admet un champ de vecteur non trivial, qui s'annule en au moins un point. D'après le théorème de Riemann-Roch et la théorie des courbes, ceci entraîne que $C = \mathbb{P}^1$. Comme toute section de $T\mathbb{P}^1$ s'annule en au plus deux points, on en déduit que, comme variété, $G = k$ ou bien $G = k^*$.

Supposons $G = k$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'élément neutre de G est 0. Le comorphisme de $\mu : k \times k \to k$ est un morphisme d'algèbres $\mu^* : k[x] \to k[x] \otimes k[y]$, déterminé par le polynôme $P = \mu^*(x)$. Pour $x, y \in k$, on a $\mu(x,y) = P(x,y)$. Pour tout y, la translation à droite $\mu(-,y)$ est un automorphisme de k. On en déduit que $P(x,y) = a(y)x + b(y)$, avec $a, b \in k[y]$ et a ne s'annulant pas. Donc a est une constante, et $P(x,y) = ax + b(y)$. Comme $P(0,y) = y$, pour tout y, il vient $b(y) = y$, d'où $P(x,y) = ax + y$. Alors, $P(x,0) = x$ pour tout x entraîne $a = 1$, d'où $\mu(x,y) = x + y$. Donc $G = \mathbb{G}_a$.

Supposons $G = k^*$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'élément neutre de G est 1. Le comorphisme $\mu^* : k[x, x^{-1}] \to k[x, x^{-1}] \otimes k[y, y^{-1}]$ est déterminé par le polynôme $P = \mu^*(x)$. Pour $x, y \in k^*$, on a $\mu(x,y) = P(x,y)$. Soit $y \in k^*$. On a vu plus haut que la translation à droite $\mu(-,y)$ s'étend en un automorphisme de $\mathbb{P}^1$ qui fixe $\mathbb{P}^1 \setminus k^*$; donc, en particulier, $\mu(-,y)$ s'étend en un automorphisme de k qui fixe 0. On en déduit que $P(x,y) = a(y)x$, avec $a \in k[y, y^{-1}]$ ne s'annulant pas sur k^*, d'où $a = c y^i$ et $P(x,y) = c y^i x$, avec $c \in k^*$ et $i \in \mathbb{Z}$. Comme $P(1,y) = y$, pour tout y, il vient $c = i = 1$, d'où $P(x,y) = xy$. Donc $G = \mathbb{G}_m$. $\square$

Remarque 19.16. — Pour une autre démonstration du théorème précédent, voir [**Sp**, Thm. 3.4.9].

19.8. Fibrés en droites et $\mathcal{O}_X$-modules inversibles. — Soit X une variété algébrique. D'après la proposition 19.6, on a

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites sur } X\\ \text{modulo isomorphisme}\end{array}\right\} \cong \left\{\begin{array}{c}\mathcal{O}_X\text{-modules localement libres}\\ \text{de rang 1 modulo isomorphisme}\end{array}\right\}$$

Soient $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1, et $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. On a un morphisme naturel de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{L} \to (\mathcal{L}^\vee)^\vee$, et on vérifie localement que c'est un isomorphisme. Si $\mathcal{L}'$ est un autre $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1, on vérifie que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$, défini par $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')(U) = \mathcal{L}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{L}'(U)$, est un $\mathcal{O}_X$-module de rang 1, isomorphe à $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}^\vee, \mathcal{L}')$. De plus, le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules : $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X$, $(\varphi, s) \mapsto \langle \varphi, s \rangle$ est un isomorphisme (vérification locale). On en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang 1 forme un groupe commutatif, pour la multiplication induite par le produit tensoriel (l'élément neutre étant $\mathcal{O}_X$). Désormais, on emploiera la terminologie « $\mathcal{O}_X$-module inversible » comme synonyme de $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang un [(2)]. En résumé :

Proposition 19.17. — *L'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles (ou, de façon équivalente, de fibrés en droites sur X) est un groupe, appelé* **groupe de Picard** *de X et noté $\mathrm{Pic}(X)$.*

19.9. Modules inversibles sur $\mathbb{P}^1$. — Soient X une variété algébrique irréductible, $X = U \cup V$ un recouvrement ouvert, et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On suppose que $\mathcal{E}$ est trivial au-dessus de U et de V. Donc il existe $s \in \mathcal{E}(U)$ et $s' \in \mathcal{E}(V)$ tels que $\mathcal{E}(U) = \mathcal{O}(U)s$ et $\mathcal{E}(V) = \mathcal{O}(V)s'$. Alors $\mathcal{E}(U \cap V) = \mathcal{O}(U \cap V)s = \mathcal{O}(U \cap V)s'$ et donc $s = ts'$, avec t appartenant à $\mathcal{O}(U \cap V)^\times$, le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{O}(U \cap V)$.

Soit $\mathcal{K}$ le faisceau constant sur X défini par $\mathcal{K}(W) = k(X)$, pour tout ouvert W non-vide. Pour tout $f \in \mathcal{O}(U \cap V)^\times$, notons $\mathcal{L}_f$ le sous-faisceau de $\mathcal{K}$ défini par $\mathcal{L}_f|U = \mathcal{O}_U$ et $\mathcal{L}_f|V = f^{-1}\,\mathcal{O}_V$; c'est bien un faisceau car $\mathcal{O}_U$ et $f^{-1}\,\mathcal{O}_V$ coïncident sur $U \cap V$ avec $\mathcal{O}_{U\cap V}$, et $\mathcal{L}_f$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$. De plus, on peut vérifier que $\mathcal{L}_f \otimes \mathcal{L}_g \cong \mathcal{L}_{fg}$. Revenant au paragraphe précédent, on voit que la multiplication par la section s induit un isomorphisme $\mathcal{L}_t \cong \mathcal{E}$. Donc tout $\mathcal{O}_X$-module inversible trivial au-dessus de U et de V est isomorphe à un $\mathcal{L}_f$.

Réciproquement, soit $\varphi : \mathcal{L}_f \to \mathcal{L}_{f'}$ un isomorphisme. Alors $\varphi_U(1) = g$ appartient à $\mathcal{O}(U)^\times$, et pour tout $a \in \mathcal{L}_f(U)$ on a $\varphi_U(a) = ga$. De même, $\varphi_V(f^{-1}) = h/f'$ avec $h \in \mathcal{O}(V)^\times$, et pour tout $b \in \mathcal{L}_f(V)$ on a $\varphi_V(b) = bhf/f'$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_f(U) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{L}_{f'}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \\
\mathcal{L}_f(U \cap V) \arrow[r] & \mathcal{L}_{f'}(U \cap V) \\
\mathcal{L}_f(V) \arrow[r, "hf/f'"] \arrow[u, "\mathrm{res}"] & \mathcal{L}_{f'}(V). \arrow[u, "\mathrm{res}"]
\end{tikzcd}$$

(2) Ceci est justifié par la remarque suivante. On peut définir le produit tensoriel de deux $\mathcal{O}_X$-modules arbitraires $\mathcal{F}, \mathcal{G}$. On montre alors que si $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont localement libres de rang 1.

Il en résulte que $g = hf/f'$, soit $f' = fhg^{-1}$. On en déduit que l'application $f \mapsto \mathcal{L}_f$ induit un isomorphisme de groupes

$$\frac{\mathcal{O}(U \cap V)^\times}{\mathcal{O}(U)^\times\ \mathcal{O}(V)^\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{U,V}(X),$$

où $\mathrm{Pic}_{U,V}(X)$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des classes de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles triviaux sur U et V (vérifier que c'est bien un sous-groupe !).

Considérons maintenant $\mathbb{P}^1$ avec le recouvrement usuel $\mathbb{P}^1 = U \cup V$. On a $U \cong V \cong k$. Or on peut montrer que tout faisceau inversible sur k est trivial (car l'anneau $k[X]$ est factoriel). On en déduit un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & k[U \cap V]^\times/k^\times & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1), \\ i & \longrightarrow & x^{-i} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{x^{-i}} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i) = \mathcal{O}(i). \end{array}$$

Alors $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(-1)$ sont les générateurs de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$. Considérons le complexe

$$0 \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(i)) \to \Gamma(U, \mathcal{O}(i)) \oplus \Gamma(V, \mathcal{O}(i)) \to \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}(i)) \to Q(i) \to 0.$$

On vérifie alors que :

si $i \geq 0$, $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(i)) = k1 \oplus \cdots \oplus kx^i$ est de dimension $i+1$, et $Q(i) = \{0\}$;

si $i < 0$, $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(i)) = 0$ et $Q(i) = kx^{-1} \oplus \cdots \oplus kx^{i+1}$ est de dimension $-i-1$.

Par conséquent, $\mathcal{O}(1)$ est l'unique générateur de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$ admettant des sections globales non-triviales.

19.10. Fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$. — Nous allons dans ce paragraphe décrire géométriquement les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$ qui possèdent des sections globales $\neq 0$, c.-à-d., qui correspondent aux modules inversibles $\mathcal{O}(n)$ avec $n \geq 0$.

D'abord, $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ correspond au fibré trivial $E(0) := \mathbb{P}^1 \times k$, car une section locale de $E(0)$ au-dessus d'un ouvert W n'est autre qu'une fonction régulière $W \to k$.

Soit $\mathbf{V} = k^2$ avec sa base canonique (e_1, e_2). On note (x, y) (ou aussi (e_1^*, e_2^*)) la base duale de $\mathbb{P}^1$, c.-à-d., pour tout $v \in \mathbf{V}$ on écrit $v = xe_1 + ye_2$.

Soit $E(1)$ l'ensemble des couples (δ, ϕ), où δ est un point de $\mathbb{P}^1$, c.-à-d., une droite de $\mathbf{V}$, et ϕ une forme linéaire sur δ, c.-à-d., un élément de l'espace dual δ^*. Soit $\pi : E(1) \to \mathbb{P}^1$ la première projection ; pour chaque $\delta \in \mathbb{P}^1$, la fibre $\pi^{-1}(\delta)$ est δ^*, un espace vectoriel de dimension 1. On peut montrer que $E(1)$ est muni d'une structure de variété algébrique, telle que π soit un morphisme de variétés, faisant de $E(1)$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$. Déterminons le faisceau de ses sections.

Sur l'ouvert $U = \{[xe_1 + ye_2] \mid y \neq 0\}$, la section

$$\phi = e_2^*|_U$$

ne s'annule pas et donc trivialise $E(1)$, c.-à-d., on a

$$\pi^{-1}(U) \cong \{(xe_1 + e_2, t\phi) \mid x, t \in k\} \cong U \times k,$$

et $\Gamma(U, E(1)) = k[U]\phi$. De même, sur l'ouvert $V = \{[xe_1 + ye_2] \mid x \neq 0\}$, la section

$$\psi = e_1^*|_V$$

ne s'annule pas et donc trivialise $E(1)$, c.-à-d., on a

$$\pi^{-1}(V) \cong \{(e_1 + ye_2, t\psi) \mid y, t \in k\} \cong V \times k,$$

et $\Gamma(V, E(1)) = k[V]\psi$. De plus, sur $U \cap V$, on a $\psi = x^{-1}\phi$ puisque, pour $x \neq 0$, on a

$$\psi([xe_1 + e_2]) = \psi([e_1 + x^{-1}e_2]) \overset{\text{déf}}{=} x^{-1}.$$

Ceci montre que le faisceau des sections de $E(1)$ est $\mathcal{O}(1)$, et l'espace des sections globales s'identifie à $\mathbf{V}^* = kx \oplus ky$.

Soit $S(\mathbf{V}^*)$ l'algèbre symétrique de $\mathbf{V}^*$, c.-à-d., le quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathbf{V}^*)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments de degré 2 :

$$\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi, \qquad \xi, \eta \in \mathbf{V}^*.$$

C'est une algèbre graduée : $S = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S^n(\mathbf{V}^*)$; chaque $S^n(\mathbf{V}^*)$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré n sur $\mathbf{V}$, et admet pour base les $(n+1)$ monômes :

$$x^n, x^{n-1}y, \cdots, xy^{n-1}, y^n.$$

Soit $E(n)$ l'ensemble des couples (δ, ϕ), où δ est un point de $\mathbb{P}^1$, c.-à-d., une droite de $\mathbf{V}$, et ϕ un polynôme homogène de degré n sur δ, c.-à-d., un élément de $S^n(\delta^*)$. Soit $\pi : E(n) \to \mathbb{P}^1$ la première projection ; pour chaque $\delta \in \mathbb{P}^1$, la fibre $\pi^{-1}(\delta)$ est $S^n(\delta^*)$, un espace vectoriel de dimension 1.

Sur l'ouvert $U = \{[xe_1 + ye_2] \mid y \neq 0\}$, la section

$$\phi = y^n|_U$$

ne s'annule pas et donc trivialise $E(n)$, c.-à-d., on a un isomorphisme

$$\pi^{-1}(U) \cong \{(xe_1 + e_2, t\phi) \mid x, t \in k\} \cong U \times k,$$

et $\Gamma(U, E(n)) = k[U]\phi$. De même, sur l'ouvert $V = \{[xe_1 + ye_2] \mid x \neq 0\}$, la section

$$\psi = x^n|_V$$

ne s'annule pas et donc trivialise $E(n)$, c.-à-d., on a

$$\pi^{-1}(V) \cong \{(e_1 + ye_2, t\psi) \mid y, t \in k\} \cong V \times k,$$

et $\Gamma(V, E(n)) = k[V]\psi$. De plus, sur $U \cap V$, on a $\phi = x^n \psi$ puisque, pour $x \neq 0$, on a

$$\phi([e_1 + x^{-1}e_2]) = \phi([xe_1 + e_2]) \overset{\text{déf}}{=} x^n = x^n\psi([e_1 + x^{-1}e_2]).$$

Ceci montre, d'abord, que $E(n)$ est muni d'une structure de variété algébrique : c'est le recollement des variétés

$$U \times k \cong k^2 = \{(x,t) \mid x, t \in k\}$$

et

$$V \times k \cong k^2 = \{(y,u) \mid y, u \in k\}$$

le long de l'ouvert $(U \cap V) \times k \cong k^\times \times k$, via l'isomorphisme

$$(x,t) \mapsto (x^{-1}, tx^n) = (y,u).$$

Donc $E(n)$ est une variété algébrique, et $\pi : E(n) \to \mathbb{P}^1$ est un fibré en droites, comme on le voit en se plaçant au-dessus de U ou de V. De plus, puisque sur $U \cap V$ le générateur ϕ de $\Gamma(U, E(n))$ coïncide avec $x^n\psi$, le faisceau des sections de $E(n)$ est $\mathcal{O}(n)$, et l'espace de ses sections globales s'identifie à

$$S^n(\mathbf{V}^*) = kx^n \oplus kx^{n-1}y \oplus \cdots \oplus ky^n.$$

19.11. Le morphisme $\mathrm{SL}_2/U \to \mathrm{PGL}_2/U'$**.** — On conserve la notation $\mathbf{V} = k^2$. Soit $\mathfrak{sl}_2$ l'algèbre de Lie des matrices 2×2 de trace nulle ; c'est l'algèbre de Lie de SL_2. On a défini (*cf.* 1.2) PGL_2 comme l'image dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{sl}_2) \cong \mathrm{SL}_3$ de GL_2 (agissant par conjugaison sur $\mathfrak{sl}_2$). On a donc un morphisme de groupes algébriques

$$\rho : \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{SL}(\mathfrak{sl}_2)$$

dont l'image est PGL_2. Il n'est pas difficile d'écrire explicitement ce morphisme, par exemple en se plaçant dans la base standard de $\mathfrak{sl}_2$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mais comme nous n'en avons pas besoin, nous laissons cela comme un exercice (instructif !) pour le lecteur.

D'autre part, l'application bilinéaire

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to k, \qquad (v, v') \mapsto \mathrm{dét}(v, v')$$

est SL_2-équivariante, car

$$\mathrm{dét}(gv, gv') = \mathrm{dét}(g)\,\mathrm{dét}(v, v') = \mathrm{dét}(v, v') \quad \text{si } g \in \mathrm{SL}_2.$$

On obtient donc un morphisme non nul de SL_2-modules

$$\tau : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*, \quad \text{tel que } \tau(v)(v') = \mathrm{dét}(v, v'),$$

qui est un isomorphisme puisque $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}^*$ sont des SL_2-modules irréductibles. Explicitement, si $v = xe_1 + ye_2$, alors $\tau(v) = -ye_1^* + xe_1^*$. On a alors un morphisme de variétés SL_2-équivariant

$$\phi : \mathbf{V} \to \mathfrak{sl}_2, \quad v \mapsto v \otimes \tau(v),$$

donné explicitement par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $\phi(e_1) = E$. De plus, le stabilisateur de e_1 dans SL_2 est le sous-groupe unipotent

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z \in k \right\},$$

et son stabilisateur dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2)$ est $\mathrm{Lie}(U)$, de sorte que le morphisme orbite $\mathrm{SL}_2/U \to \mathrm{SL}_2 \cdot e_1 = \mathbf{V} \setminus \{0\}$ est un isomorphisme. D'autre part, on sait que le stabilisateur de E dans GL_2 (resp. $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_2)$) pour l'action adjointe est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $z \in k$ et $\lambda \in k^\times$ (resp. $\lambda \in k$). On en déduit que le stabilisateur de E dans PGL_2 (resp. $\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2)$) est le groupe unipotent U' image de U dans PGL_2 (resp. $\mathrm{Lie}(U')$). Par conséquent, le morphisme orbite

$$\mathrm{PGL}_2/U' \to \mathrm{PGL}_2 \cdot E = \mathrm{GL}_2 \cdot E$$

est un isomorphisme ; d'autre part, l'orbite est l'ensemble des matrices nilpotentes non nulles dans $\mathfrak{sl}_2$, c.-à-d., c'est $C^\circ = C \setminus \{0\}$, où C est le cône

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a^2 + bc = 0 \right\}.$$

Alors, le morphisme $\phi : \mathbf{V} \to \mathfrak{sl}_2$ considéré plus haut :

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$$

a pour image le cône C et induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2/U \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{PGL}_2/U' \arrow[d, "\cong"] \\ k^2 \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & C^\circ \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \quad , \quad (x, y) \mapsto (-xy, x^2, y^2)$$

Enfin, en utilisant le fait que l'anneau de polynômes $k[x,y]$ est factoriel, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 19.18. — $\mathcal{O}(k^2 \setminus \{0\}) = k[x,y]$ *et* $\mathcal{O}(C^\circ) = \mathcal{O}(C) = k[x^2, xy, y^2]$.

Démonstration. — à compléter plus tard... □

20. Groupes réductifs : rang 1 et donnée radicielle

20.1. Groupes semi-simples de rang 1. — On a d'abord la proposition suivante, pour laquelle on renvoie à [**Bo**, III.10.8]

Proposition 20.1. — *Soit* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *le groupe des automorphismes de* $\mathbb{P}^1$. *C'est un groupe algébrique, isomorphe à* PGL_2. *De plus, si* G *est un groupe algébrique affine, toute action algébrique de* G *sur* $\mathbb{P}^1$ *induit* (*de façon unique*) *un morphisme de groupes algébriques* $G \to \mathrm{PGL}_2$.

Remarque 20.2. — Ceci est en fait le cas particulier $n = 1$ d'un résultat général : le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^n$ est PGL_{n+1}. La démonstration de ce fait donnée dans [**Ha**, II, Example 7.1.1] n'est pas tout-à-fait convaincante (en particulier si k est de caractéristique 2) ; c'est pourquoi nous renvoyons à la démonstration ad hoc donnée dans [**Bo**], Chap.III, §10.8.

Consignons ici le résultat suivant, dont nous avons déjà vu les assertions i) et ii) en 15.26 et 15.27.

Proposition 20.3. — *Soient* G *connexe et* $T \subseteq B$ *une paire de Borel.*

i) *Si* B *est nilpotent, alors* $G = B$.

ii) *Si* $\dim G \leq 2$, *alors* G *est résoluble.*

iii) *Si* T *est central,* B *est nilpotent et* $B = G$.

Démonstration. — Pour i) et ii), voir 15.26 et 15.27. Supposons T central. Alors, d'après les propositions 12.21 et 12.16, B est nilpotent, et donc $G = B$ d'après i). □

Théorème 20.4. — *Soient* G *un groupe connexe* **réductif de rang** 1, *non résoluble,* T *un tore maximal,* W *le groupe de Weyl, et* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$.

a) *On a* $\#W(T) = 2$ *et* $\mathcal{B} \cong \mathbb{P}^1$. *De plus,* $\dim G = 3$, $G = (G,G)$ *et* G *est semi-simple.*

b) *Il existe* $\alpha \in X(T)$ *tel que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, *on a* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$, *et il existe un sous-groupe fermé unipotent connexe* U_α (*resp.* $U_{-\alpha}$) *normalisé par* T *et dont l'algèbre de Lie est* $\mathfrak{g}_\alpha$ (*resp.* $\mathfrak{g}_{-\alpha}$). *Les groupes* $B_\alpha = TU_\alpha$ *et* $B_{-\alpha} = TU_{-\alpha}$ *sont les deux sous-groupes de Borel de* G *contenant* T. *Leurs algèbres de Lie sont* $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ *et* $\mathfrak{b}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

c) *Soient $n \in N_G(T) \setminus C_G(T)$ et $U = U_\alpha$, $B = TU$. Le morphisme orbite $\psi_n : U \to G/B$, $u \mapsto unB/B$ est un isomorphisme de variétés.*

d) *On a $G \cong \mathrm{SL}_2$ ou bien $G \cong \mathrm{PGL}_2$.*

Démonstration. — G n'est pas résoluble, donc $W(T) \neq \{1\}$, d'après 16.20 b). D'autre part, $W(T)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T)$. Or $\mathrm{Aut}(T) \cong \{\pm 1\}$, puisque $T \cong \mathbb{G}_m$. Donc $W(T) = \{\pm 1\}$. Par conséquent, $\#\mathcal{B}^T = 2$ et $\dim \mathcal{B} = 1$, d'après 16.20 a).

Soit $B \in \mathcal{B}^T$. D'après le théorème des semi-invariants de Chevalley, $\mathcal{B} = G/B$ est isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$, où V est un G-module. Donc, d'après le lemme 16.15, on peut trouver un cocaractère $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que
$$\mathcal{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathcal{B}^T.$$
Par conséquent, si $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}^T$, l'orbite $\lambda(\mathbb{G}_m)x$ est de dimension 1, donc dense dans $\mathcal{B}$, et par conséquent le comorphisme de
$$\phi_x : \mathbb{G}_m \to \mathcal{B}, \qquad z \mapsto \lambda(z)x$$
induit une inclusion des corps de fractions $k(\mathcal{B}) \subseteq k(\mathbb{P}^1) = k(z)$. Donc, d'après le théorème de Lüroth, $\mathcal{B}$ est une extension transcendante pure de k. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une courbe (= variété de dimension 1) projective et lisse, dont le corps des fractions est isomorphe à $k(\mathbb{P}^1)$. D'après la classification des courbes projectives lisses, ceci entraîne que $\mathcal{B} \cong \mathbb{P}^1$.

L'action de G sur $\mathcal{B}$ fournit donc un morphisme de groupes algébriques $\phi : G \to \mathrm{PGL}_2$. Le noyau de π est formé des $g \in G$ qui agissent trivialement sur $\mathcal{B}$, c.-à-d., qui normalisent chaque sous-groupe de Borel. Comme chaque Borel est son propre normalisateur, on a
$$\operatorname{Ker} \pi = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B,$$
et donc $(\operatorname{Ker} \pi)^0 = \mathcal{R}(G)$. Or, comme G est réductif connexe, $\mathcal{R}(G)$ est un tore central, d'après la proposition 18.18. Comme G est de rang 1 et non résoluble, alors $\mathcal{R}(G)$ est trivial, car sinon ce serait un tore maximal central, et G serait nilpotent, d'après la proposition 20.3.

Donc $\mathcal{R}(G)$ est trivial, G est semi-simple, et $\operatorname{Ker} \pi$ est fini. Par conséquent, $\dim \phi(G) = \dim G$, qui est ≥ 3 puisque G n'est pas résoluble. Comme $\dim \mathrm{PGL}_2 = 3$, alors $\dim G = 3$ et ϕ est surjectif.

Enfin, $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe fermé normal de G, non trivial puisque G n'est pas résoluble, et il ne peut être de dimension 1 ou 2 car sinon il serait résoluble, ainsi que $G/\mathcal{D}(G)$, et G serait résoluble, une contradiction. Donc $G = \mathcal{D}(G)$. Ceci s'applique en particulier à $G = \mathrm{SL}_2$ ou PGL_2 et montre que chacun de ces deux groupes est égal à son groupe dérivé (ce qu'on peut aussi voir directement). Ceci prouve l'assertion a).

Soient B un Borel de G contenant T, et $U = B_u$. Alors $B = TU$, et U est un groupe unipotent de dimension 1 normalisé par T. De plus, posant $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(B)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, on a

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Lie}(U),$$

et T agit sur $\mathrm{Lie}(U)$ par un caractère α. D'après le corollaire 18.12, on a $\alpha \neq 0$, car sinon U serait contenu dans le centralisateur de T, donc T serait central dans B, d'où $B = G$, une contradiction.

Soit $n \in N_G(T) \setminus C_G(T)$; son image dans $W(T) = \{1, s\}$ est l'élément non trivial s, qui agit sur $T \cong \mathbb{G}_m$ par $t \mapsto t^{-1}$, et sur $X(T) \cong \mathbb{Z}$ par $\chi \mapsto -\chi$. On sait que $\mathcal{B}^T$ a deux éléments, et le second est $B^- := nBn^{-1}$. Posant $U^- = B_u^-$, on a

$$\mathrm{Lie}(B^-) = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Lie}(U^-),$$

et T agit sur $\mathrm{Lie}(U^-)$ par le caractère $-\alpha$. Comme les espaces propres de T sont en somme directe et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ est de dimension 3, on obtient

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

où $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} = \mathrm{Lie}(U^\pm)$ est de dimension 1.

Comme U est connexe, de dimension 1 et unipotent, il résulte de la classification des groupes connexes de dimension 1 (*cf.* 19.15) que $U \cong \mathbb{G}_a$.

Remarque 20.5. — Ici, on peut éviter la classification des courbes, utilisée dans la preuve de 19.15, en raisonnant comme suit. Comme $T = \mathbb{G}_m$ agit sur $\mathrm{Lie}(U) = T_eU$ avec le poids $\alpha \neq 0$, il résulte du lemme de Nakayama gradué (voir 21.1 plus loin) que $U \cong \mathrm{Lie}(U) \cong k$ comme variété. On conclut alors facilement, comme à la fin de la preuve du théorème 19.15, que la loi de groupe est donnée par $(x, y) \mapsto x + y$, c.-à-d., que $U \cong \mathbb{G}_a$.

Choisissons un isomorphisme $\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U$, $x \mapsto \theta(x)$. Par transport de structure, T agit sur $\mathbb{G}_a$. Donc il existe un morphisme de groupes $\chi : T \to k^*$ tel que $t \cdot x = \chi(t)x$, pour $x \in k$, $t \in T$; alors $\chi(t) = t \cdot 1$ est une fonction régulière de t, i.e. $\chi \in X(T)$. Alors, T agit sur $U = \theta(\mathbb{G}_a)$ par

$$t\theta(x)t^{-1} = \theta(\chi(t)x),$$

et T agit sur $\mathrm{Lie}(U)$ via le caractère χ. Donc $\chi = \alpha$. En conjuguant par n, on obtient que T agit sur U^- via le caractère $-\alpha$. Posant $U_\alpha = U$ et $U_{-\alpha} = U^- = nUn^{-1}$, on obtient que $B_\alpha = TU_\alpha$ et $B_{-\alpha} = TU_{-\alpha}$ sont les deux sous-groupes de Borel de G contenant T, et l'on a

$$\mathrm{Lie}(B_{\pm\alpha}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha}.$$

Ceci prouve l'assertion b).

Remarque 20.6. — Si θ' est un autre isomorphisme $\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U$, alors $\theta^{-1} \circ \theta'$ est un automorphisme de $\mathbb{G}_a$, donc de la forme $x \mapsto cx$, où $c \in k^*$. Donc $\theta'(x) = \theta(cx)$. Par conséquent, pour *tout* isomorphisme $\theta : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U_\alpha$, on a

$$\forall t \in T, \qquad t\theta(x)t^{-1} = \theta(\alpha(t)x), \tag{$*_\alpha$}$$

et on a l'assertion analogue pour $U_{-\alpha}$.

Voyons l'assertion c). Le stabilisateur du point nB/B est $n(B) = TU^-$, et le morphisme orbite $\gamma_n : G \to G/B = \mathcal{B}$, $g \mapsto gnB/B$ si'dentifie au morphisme quotient $\pi : G \to G/n(B) \cong \mathcal{B}$, qui est séparable. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker} \mathrm{d}\gamma_n = \operatorname{Lie} n(B) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Comme $U \cap n(B) = \{1\}$ et $\operatorname{Lie}(U) \cap \operatorname{Ker} \mathrm{d}\gamma_n = \{0\}$, alors la restriction de γ_n à U induit un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} UnB/B$. Ceci prouve c).

Démontrons d). Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme surjectif entre deux groupes semi-simples de dimension 3, et soient $B = TU$ et $B^- = TU^-$ dans G et $B' = T'U'$ et B'^- les images dans G'. D'après le théorème 15.24, on peut identifier les variétés de drapeaux : $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \mathbb{P}^1$, et notant e le point correspondant à B^- et B'^-, on a d'après ce qui précède on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & U' \\ \cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong \\ Ue & = & U'e \end{array}$$

et donc ϕ induit un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} U'$.

Lemme 20.7. — *Supposons que le morphisme induit $G/U \to G'/U'$ soit un isomorphisme. Alors ϕ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On déduit facilement de l'hypothèse que ϕ est bijectif. De plus, comme l'espace tangent à G/U au point U/U s'identifie à $\mathfrak{g}/\operatorname{Lie}(U)$, et de même pour G'/U', il résulte de l'hypothèse que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Lie}(U) & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\operatorname{Lie}(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\big\downarrow & & \mathrm{d}\phi\big\downarrow & & \big\downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Lie}(U') & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \longrightarrow & \mathfrak{g}'/\operatorname{Lie}(U') & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par conséquent, $\mathrm{d}\phi$ est un isomorphisme, donc ϕ est séparable et est donc un isomorphisme. $\square$

Ceci nous ramène à étudier le morphisme $G/U \to G'/U'$. Notons π et $\widetilde{\pi}$ les projections $G/U \to G/B$ et $G \to G/B$, et définissons de même π' et $\widetilde{\pi}'$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $G' = \mathrm{PGL}_2$ et $\phi : G \to \mathrm{PGL}_2$ est le morphisme qui nous est donné. Notons Ω (resp. Ω^-) l'orbite ouverte de U' (et U) (resp. de U'^- et U^-) dans $\mathbb{P}^1$. Il résulte de l'assertion c) et de son analogue pour G' que

$$\widetilde{\pi}^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T \times U \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\pi}'^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T' \times U'$$

d'où

$$\pi^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T \qquad \text{et} \qquad \pi'^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T'$$

et pour chaque $x \in \Omega$, l'application induite $T \cong \pi^{-1}(x) \to \pi'^{-1}(x) \cong T'$ s'identifie à $\phi : T \to T'$. Considérons les faisceaux images directes $\pi_* \mathcal{O}_{G/U}$ et $\pi'_* \mathcal{O}_{G'/U'}$. Par définition,

$$\pi_* \mathcal{O}_{G/U}(\Omega) = \mathcal{O}_{G/U}(\pi^{-1}\Omega),$$

et de même pour $\pi'_* \mathcal{O}_{G'/U'}$, et il résulte de ce qui précède que

$$\begin{array}{rcccl} \pi_* \mathcal{O}_{G/U}(\Omega) & \cong & k[\Omega] \otimes k[T] & \cong & k[\Omega] \otimes \bigoplus_{\chi \in X(T)} k\chi \\ \pi'_* \mathcal{O}_{G'/U'}(\Omega) & \cong & k[\Omega] \otimes k[T'] & \cong & k[\Omega] \otimes \bigoplus_{\chi \in X(T')} k\chi, \end{array}$$

et que via ces isomorphismes, l'application induite par ϕ coïncide avec l'inclusion de $X(T')$ dans $X(T)$. De plus, on a les mêmes assertions au-dessus de l'ouvert Ω^-.

Par conséquent, on obtient que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\phi : G/U \to G'/U'$ est un isomorphisme

b) $\phi : T \to T'$ est un isomorphisme

c) l'inclusion $X(T') \hookrightarrow X(T)$ est une égalité.

Observons que T agit à droite sur G/U via $gU \cdot t = gtU$. Si l'on désigne par $\mathcal{L}(\chi)$ le sous-faisceau de $\pi_* \mathcal{O}_{G/U}$ formé des sections locales de poids χ, c.-à-d., pour tout ouvert V de G/B,

$$\mathcal{L}(\chi)(V) = \{f \in k[\pi^{-1}(V)] \mid f(xt) = \chi(t)f(x), \ \ \forall x \in V, \, t \in T\}$$

alors chaque $\mathcal{L}(\chi)$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module inversible, donc égal à un certain $\mathcal{O}(n_\chi)$. De plus, le produit d'une section s_1 de $\mathcal{L}(\chi_1)$ et d'une section s_2 de $\mathcal{L}(\chi_2)$ est de poids $\chi_1 + \chi_2$, de sorte que $\chi \mapsto n_\chi$ est un morphisme de groupes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, qui est injectif car les $\mathcal{L}(\chi)$ sont deux à deux distincts. On a donc des inclusions

$$X(T') \subseteq X(T) \subseteq \mathbb{Z},$$

donc il existe $d, d' \in \mathbb{N}^*$, avec d divisant d', tels que

$$\pi_* \mathcal{O}_{G/U} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(dn), \quad \pi_* \mathcal{O}_{G'/U'} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(d'n).$$

De plus, on a

$$\Gamma(G'/U', \mathcal{O}_{G'/U'}) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \pi'_* \mathcal{O}_{G'/U'}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d'n)),$$

et de même pour G/U. Or, dans le cas de $G' = \mathrm{PGL}_2$, on a vu précédemment que

$$k[G'/U'] = k[x^2, xy, y^2] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2n)).$$

Il en résulte que $d' = 2$, et donc $d = 1$ ou 2. Si $d = 2$, alors $X(T) = X(T')$ et donc $\phi : G/U \to \mathrm{PGL}_2/U'$ est un isomorphisme, d'où $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}_2$.

Finalement, supposons $d = 1$ et soit χ le générateur de $X(T)$ tel que $n_\chi = 1$. Alors,

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \{f \in k[G/U] \mid f(xt) = \chi(t)f(x),\ \ \forall x \in G/U,\, t \in T\}$$

est un G-module rationnel de dimension 2. Par conséquent, on obtient un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}_2$, et comme $G = \mathcal{D}(G)$ alors

$$\rho(G) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{GL}_2) = \mathrm{SL}_2.$$

On obtient donc un morphisme $\rho : G \to \mathrm{SL}_2$, qui est nécessairement surjectif (car sinon image et noyau seraient de dimension ≤ 2 donc résolubles, et G serait résoluble, une contradiction). Donc on peut appliquer le raisonnement précédent à $\rho : G \to G' = \mathrm{SL}_2$. Or on a vu que

$$k[\mathrm{SL}_2/U] = k[x, y] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(n)),$$

d'où $d' = 1$ cette fois. Par conséquent, $d = 1$ et $X(T) = X(T')$, d'où $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2$. Ceci achève la preuve du théorème 20.4. Ouf... $\square$

Remarque 20.8. — Pour une autre démonstration de d), plus élémentaire mais plus calculatoire, voir [**Sp**, Theorem 7.2.4].

20.2. Groupes réductifs de rang semi-simple égal à 1. — Le théorème 20.4 s'étend à tout groupe réductif de rang semi-simple égal à 1, de la façon suivante.

Proposition 20.9. — *Soit G un groupe connexe* **réductif** *de* **rang semi-simple** *égal à* 1. *Soient T un tore maximal, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, et W le groupe de Weyl. Notons $\overline{G} = G/Z^0(G)$ et soit $\overline{T}$ l'image de T dans $\overline{G}$; c'est un tore de dimension* 1, *et l'on a $\mathbb{Z} \cong X(\overline{T}) \subseteq X(T)$.*

a) *Il existe $\alpha \in X(\overline{T})$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, et $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$.*

b) *$\mathcal{D}(G)$ est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, et l'on a $G = \mathcal{D}(G)Z(G)^0$.*

c) *Il existe un* **unique** *sous-groupe fermé unipotent connexe U_α (resp. $U_{-\alpha}$), normalisé par T et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$). Les groupes $B_\alpha = TU_\alpha$ et $B_{-\alpha} = TU_{-\alpha}$ sont les deux sous-groupes de Borel contenant T. Leurs algèbres de Lie sont $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{b}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$.*

d) *Soit* T_1 *l'unique tore maximal de* $\mathcal{D}(G)$ *contenu dans* T. *Il existe un unique* $\alpha^\vee \in X^\vee(T_1) \subseteq X^\vee(T)$ *tel que* $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ *et, notant* s_α *l'élément non trivial de* W, *on a*

$$s_\alpha \chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha \qquad \textit{et} \qquad s_\alpha \eta = \eta - \langle \alpha, \eta \rangle \alpha^\vee,$$

pour tout $\chi \in X(T)$, $\eta \in X^\vee(T)$.

Démonstration. — D'après le théorème de Chevalley-Luna (*cf.* Corollaire 17.4) et le corollaire 18.12, on a $\mathfrak{g}^T = \mathfrak{h}$. On peut donc écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

où R est un sous-ensemble fini de $X(T) \setminus \{0\}$. De plus, comme $Z^0 := Z^0(G)$ est central, chaque $\alpha \in R$ est trivial sur Z^0. Or, on a une suite exacte

$$0 \to X(T/Z^0) \to X(T) \xrightarrow{\text{res}} X(Z^0) \to 0,$$

donc R est contenu dans le sous-groupe $X(\overline{T})$. D'autre part, $Z^0 \subseteq T$ et donc

$$\mathrm{Lie}(G/Z^0) \cong \mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(Z^0) \cong \big(\mathfrak{h}/\mathrm{Lie}(Z^0)\big) \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Or, comme $\overline{G} = G/Z^0$ est semi-simple de rang 1, il résulte du théorème 20.4 que $R = \{\alpha, -\alpha\}$ et que $\dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha} = 1$. Ceci prouve a).

Voyons b). D'après la proposition 18.18, $\mathcal{D}(G) \cap \mathcal{R}(G)$ est fini et $\mathcal{D}(G)$ est semi-simple, de rang 1, donc isomorphe à SL_2 ou PGL_2 d'après 20.4. De plus, puisque $\overline{G} := G/\mathcal{R}(G)$ est égal à son dérivé, alors l'application $\mathcal{D}(G) \to \overline{G}$ est surjective. On en déduit que $\mathcal{D}(G)Z(G)^0$ est un sous-groupe fermé de G de dimension $\geq \dim G$, donc égal à G. Ceci prouve b).

Démontrons c). Comme $\mathcal{D}(G)$ est semi-simple de rang 1, il contient un sous-groupe fermé connexe unipotent U_α (resp. $U_{-\alpha}$), normalisé par T, et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$). De plus, d'après le point 3) de la proposition 16.10, appliqué à $G \to \overline{G}$, on sait que G possède exactement deux sous-groupes de Borel contenant T : ce sont $B_\alpha = TU_\alpha$ et $B_{-\alpha} = TU_{-\alpha}$, dont les algèbres de Lie sont, respectivement, $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{b}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Reste à montrer l'unicité de U_α et U_{α}.

Soit H un sous-groupe fermé connexe, normalisé par T, tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{g}_\alpha$. Alors $\dim H = 1$, et H ne peut-être un tore : sinon, il serait centralisé par T, d'après le théorème de rigidité, et T agirait trivialement sur $\mathrm{Lie}(H)$, contradiction. Donc H est unipotent connexe, normalisé par T. Par conséquent, TH est un sous-groupe fermé résoluble connexe contenant T, et est donc contenu dans B_α ou $B_{-\alpha}$. Comme $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{g}_\alpha$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Lie}(B_{-\alpha})$, il vient $TH \subseteq B_\alpha$, d'où $H \subseteq U_\alpha$ et $H = U_\alpha$. Le point c) est démontré.

Voyons d). Soient $G_1 = \mathcal{D}(G)$, $\mathfrak{g}_1 := \mathrm{Lie}(G_1)$, et T_1 un tore maximal de G_1. Comme G_1 est normal dans G, on peut supposer que $T_1 \subseteq T$. Alors T_1 est la composante connexe de $G_1 \cap T$ et est l'unique tore maximal de G_1 contenu dans T.

Soit y un générateur de $X^\vee(T_1) \cong \mathbb{Z}$. Puisque G_1 est isomorphe à SL_2 ou PGL_2 et que $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on voit que $\pm\alpha|_{T_1}$ sont les poids de T_1 dans $\mathfrak{g}_1$, et que

$$\langle \alpha, y\rangle = \begin{cases} \pm 2 & \text{si } G_1 = \mathrm{SL}_2, \\ \pm 1 & \text{si } G = \mathrm{PGL}_2. \end{cases} \tag{$*$}$$

Par conséquent, l'élément $\alpha^\vee := 2y/\langle \alpha, y\rangle$ appartient à $X^\vee(T_1)$, et c'est l'unique élément de $X^\vee(T_1) \cong \mathbb{Z}y$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee\rangle = 2$.

Soit $s = s_\alpha$ l'élément non-trivial de $W(T_1) = W(T)$, et soit n un représentant de s dans $N_G(T)$. Soit $\eta \in X^\vee(T)$, arbitraire. Alors $s(\eta) - \eta : \mathbb{G}_m \to T$ est le cocaractère

$$z \mapsto n\eta(z)n^{-1}\eta(z)^{-1},$$

qui est à valeurs dans $T \cap \mathcal{D}(G)$, donc dans T_1. Par conséquent, comme $X^\vee(T_1) = \mathbb{Z}y$, il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^\vee(T), \mathbb{Z})$ tel que $s(\eta) - \eta = -\varphi(\eta)y$, pour tout $\eta \in X^\vee(T)$. De plus, comme $\langle \alpha, s(\eta) - \eta\rangle = -2\langle \alpha, \eta\rangle$, il vient $\varphi(\eta) = 2\langle \alpha, \eta\rangle / \langle \alpha, y\rangle$, et donc

$$s(\eta) = \eta - \langle \alpha, \eta\rangle \frac{2y}{\langle \alpha, y\rangle} = \eta - \langle \alpha, \eta\rangle \alpha^\vee.$$

Enfin, soit $\chi \in X(T)$. Pour tout $\eta \in X^\vee(T)$, on a

$$\langle s\chi, \eta\rangle = \langle \chi, s\eta\rangle = \langle \chi, \eta - \langle \alpha, \eta\rangle\alpha^\vee\rangle = \langle \chi - \langle \chi, \alpha^\vee\rangle\alpha, \eta\rangle.$$

Ceci montre que $s(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee\rangle\alpha$. La proposition est démontrée. □

20.3. Donnée radicielle d'un groupe réductif. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, $W = W(G, T)$ le groupe de Weyl. On note R l'ensemble des poids non nuls de T dans $\mathfrak{g}$. D'après le corollaire 17.4 et le théorème 18.11, on a $C_G(T) = T$ et $\mathfrak{g}^T = \mathrm{Lie}(C_G(T)) = \mathfrak{h}$. Par conséquent,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On va voir que R fait partie d'une donnée radicielle $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$, et que $W(G, T)$ s'identifie au groupe de Weyl $W(R)$ de R.

Définition 20.10. — Pour tout $\alpha \in R$, soit S_α le sous-tore $(\mathrm{Ker}\,\alpha)^0$ de T, et soit $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$.

Lemme 20.11. — a) *Soient S un sous-tore de T de codimension* 1*, et π l'application de restriction $X(T) \to X(S)$. Alors il existe $\delta \in X(T)$ tel que* $\operatorname{Ker} \pi = \mathbb{Z}\delta$.

b)*Soient $\lambda \in X(T)$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors* $(\operatorname{Ker} \lambda)^0 = (\operatorname{Ker} n\lambda)^0$.

c) *Soient $\lambda, \mu \in X(T) \setminus \{0\}$. Alors* $(\operatorname{Ker} \lambda)^0 = (\operatorname{Ker} \mu)^0$ *si et seulement si il existe $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $m\lambda = n\mu$.*

Démonstration. — Soit $r = \dim T$. Alors $X(T) \cong \mathbb{Z}^r$ et $X(S) \cong \mathbb{Z}^{r-1}$. Or on sait que π est surjective, d'après le point b) de la proposition 8.8. Donc $\operatorname{Ker} \pi$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, d'où a).

Voyons b). D'abord, on peut supposer $n > 0$. Alors, il est clair que $\operatorname{Ker} \lambda \subseteq \operatorname{Ker} n\lambda$, d'où $(\operatorname{Ker} \lambda)^0 \subseteq (\operatorname{Ker} n\lambda)^0$. Enfin, l'image par λ de $(\operatorname{Ker} n\lambda)^0$ est connexe, et contenue dans l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, donc égale à $\{1\}$. Ceci prouve b).

Dans c), l'implication $\Leftarrow$ résulte de b). Voyons la réciproque. Posons $S = (\operatorname{Ker} \lambda)^0 = (\operatorname{Ker} \mu)^0$ et soient π et δ comme en a). Alors $\pi(\lambda) = 0 = \pi(\mu)$, et donc il existe $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $\lambda = n\delta$ et $\mu = m\delta$, d'où $m\lambda = n\mu$. □

Proposition 20.12. — a) *Pour tout $\alpha \in R$, Z_α est réductif connexe, de rang semi-simple égal à* 1*, et l'on a*

$$\operatorname{Lie} Z_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha} = 1, \quad \text{et } \mathbb{Q}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}.$$

b) *On note s_α l'élément non trivial de $W(Z_\alpha, T) \subseteq W(G, T)$. Alors il existe un unique $\alpha^\vee \in X^\vee(T)$ vérifiant $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et, pour tout $\chi \in X(T)$, $\eta \in X^\vee(T)$,*

$$s_\alpha \chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad s_\alpha \eta = \eta - \langle \alpha, \eta \rangle \alpha^\vee.$$

c) *On pose $R^\vee = \{\alpha^\vee, \alpha \in R\}$. Alors $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle réduite.*

d) *Notons $W(R)$ le groupe de Weyl de R et $W'(G, T)$ le sous-groupe de $W(G, T)$ engendré par les s_α, pour $\alpha \in R$. Alors $W'(G, T) \cong W(R)$.*

Démonstration. — a) Soit $\alpha \in R$. D'après le corollaire 17.4, Z_α est réductif et connexe. De plus, comme S_α est central, donc contenu dans $\mathcal{R}(Z_\alpha)$, alors Z_α est de rang semi-simple ≤ 1, d'après le théorème 15.24.

Comme $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subseteq \operatorname{Lie}(Z_\alpha)$, on déduit du point a) de la proposition 20.9 que

$$\operatorname{Lie} Z_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha} = 1.$$

Enfin, soit $\mu \in R \cap \mathbb{Q}\alpha$. D'après le lemme 20.11, $S_\mu = S_\alpha$ et donc $\mathfrak{g}_\mu$ est contenu dans $\operatorname{Lie}(Z_\alpha)$, d'où $\mu = \pm\alpha$. Ceci prouve le point a).

L'assertion b) découle du point d) de la proposition 20.9. Voyons c). Il résulte des définitions que $W(G, T)$ stabilise R et que, pour tout $\alpha \in R$, $w \in W(G, T)$, l'on a $wZ_\alpha w^{-1} = Z_{w\alpha}$ et $ws_\alpha w^{-1} = s_{w\alpha}$. On en déduit, pour tout $\chi \in X(T)$, l'égalité

$$\chi - \langle w^{-1}\chi, \alpha^\vee \rangle w\alpha = ws_\alpha w^{-1}\chi = s_{w\alpha}\chi = \chi - \langle \chi, (w\alpha)^\vee \rangle w\alpha,$$

et ceci entraîne que $w(\alpha^\vee) = (w\alpha)^\vee$. Donc $W(G,T)$ stabilise $R^\vee$. On en déduit que $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle, et elle est réduite d'après la dernière assertion de a). Ceci prouve c).

Prouvons d). On voit facilement que $W(G,T)$ agit **fidèlement** sur $X(T)$, et donc sur $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. D'autre part, le sous-groupe $W'(G,T)$ laisse stable le sous-espace vectoriel V de $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R.

Or, R est un système de racines dans V et, par définition, son groupe de Weyl $W(R)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les réflections $s_\alpha|_V$. Il s'identifie donc à $W'(G,T)$. Ceci prouve d). La proposition est démontrée. □

21. Décomposition de Bialynicki-Birula

21.1. Le lemme de Nakayama gradué et une version géométrique. — Le lemme suivant est très utile.

Lemme 21.1. — *Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ une k-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée telle que $A_0 = k$. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal d'augmentation et E un supplémentaire gradué de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Alors E engendre A comme algèbre, et $\mathfrak{m}$ comme idéal.*

Démonstration. — Soit A' la sous-algèbre de A engendrée par E. Montrons par récurrence sur n que $A_n \subseteq A'$. Soit $n > 0$. On suppose que $A_d \subseteq A'$ si $d < n$ (c'est vrai si $n = 1$). Soit a un élément non nul de A_n. Quitte à retrancher un élément de E, on peut supposer que $a \in \mathfrak{m}^2$. On peut donc écrire $a = \sum_i a_i b_i$, avec les a_i, b_i dans $\mathfrak{m}$. Décomposant les a_i, b_i en leurs composantes homogènes (toutes de degré > 0), et en ne conservant dans le produit que les termes de degré n, on obtient une égalité $a = \sum_j \alpha_j \beta_j$, où les α_j, β_j sont homogènes de degré > 0, et $\deg \alpha_j + \deg \beta_j = n$ pour tout j. Alors, par hypothèse de récurrence, les α_j, β_j appartiennent à A', d'où $a \in A'$. Ceci prouve la première assertion, et la deuxième en découle aussitôt. □

Remarque 21.2. — Supposons que A soit de plus une k-algèbre de type fini sans éléments nilpotents, de sorte que $A = k[X]$ où X est la variété algébrique affine $\operatorname{Max} A$. Observons que la graduation fournit une structure de $\mathbb{G}_m$-module rationnel sur A, définie par $t \cdot a_i = t^i a_i$ pour tout $a_i \in A_i$, et fournit donc une structure de $\mathbb{G}_m$-variété sur X. Donc X est un « cône », le sommet du cône étant le point x_0 correspondant à l'idéal d'augmentation A_+, qui est $\mathbb{G}_m$-stable de sorte que x_0 est un point fixe de $\mathbb{G}_m$.

Réciproquement, si X est une variété algébrique affine avec action de $\mathbb{G}_m$, alors $A = k[X]$ est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel donc

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i.$$

Il n'y a pas nécessairemement de point fixe, par exemple si $X = \mathbb{G}_m$! On peut aussi avoir, en général, $A_0 \neq k$. Mais, on a la proposition suivante.

Proposition 21.3. — *Soit X une variété algébrique affine* **connexe** *avec action de $\mathbb{G}_m$, et possédant un point fixe x. Alors l'espace T_xX est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel.* **Supposons** *que tous les poids de $\mathbb{G}_m$ dans T_xX soient* **non nuls** *et de* **même signe**. *Alors $A = k[X]$ est munie d'une graduation $A = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} A_n$. Par conséquent, X s'identifie à une sous-variété fermée T-stable de l'espace tangent T_xX, et x est l'unique point fixe de $\mathbb{G}_m$ dans X.*

De plus, si X est lisse au point x, alors $X \cong T_xX$ comme $\mathbb{G}_m$-variétés.

Démonstration. — Posons $A = k[X]$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Alors A est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel et, comme x est un point fixe, $\mathfrak{m}$ est stable par $\mathbb{G}_m$, de même que $\mathfrak{m}^2$, et donc

$$T_xX = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$$

est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel. Supposons que tous les poids de $\mathbb{G}_m$ soient non nuls et de même signe. Quitte à remplacer l'action donnée par l'action « opposée » : $t \star x = t^{-1} \cdot x$, on peut supposer que les poids sont tous < 0.

Alors, les poids dans l'idéal d'augmentation de $k[T_xX] = S(T_x^*X) = S(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ sont tous > 0, et comme l'algèbre graduée

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$$

est un quotient de $S(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, alors les

$$(*) \qquad \text{poids de } \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \quad \text{sont tous } > 0.$$

Montrons qu'il en est de même pour $\mathfrak{m}$.

Supposons d'abord X **irréductible**. Alors A est intègre et, d'après le théorème d'intersection de Krull (*cf.* [**AM**, Cor. 10.18]), on a $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n = (0)$. Soit $\phi \in \mathfrak{m}$ un vecteur de poids $i \in \mathbb{Z}$. Il existe $n \geq 1$ tel que $\phi \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}$, alors l'image de ϕ dans $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est non nulle, et de poids i, d'où $i > 0$ d'après $(*)$.

Donc $A = k \oplus \mathfrak{m} = k \oplus \bigoplus_{i \geq 1} A_i$ et l'on peut appliquer le lemme de Nakayama gradué : soit E un supplémentaire $\mathbb{G}_m$-stable de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Alors, $E \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et donc

$$S(E) \cong k[T_xX],$$

et le morphisme d'algèbres $S(E) \to A$ (induit par l'inclusion $E \subset \mathfrak{m}$) est $\mathbb{G}_m$-équivariant et surjectif. Par conséquent, son comorphisme $\tau : X \hookrightarrow T_xX$ est un isomorphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant de X sur une sous-variété fermée $\mathbb{G}_m$-stable $\tau(X)$ de T_xX, et $\tau(x) = 0$. Comme les poids de $\mathbb{G}_m$ dans T_xX sont < 0, alors pour tout $v \in T_xX$, la limite en $t = 0$ de $t^{-1}v$ existe et égale 0. Ceci montre que x est le seul point fixe de $\mathbb{G}_m$ dans X et est contenu dans toute sous-variété fermée $\mathbb{G}_m$-stable non vide.

De plus, si X est lisse en x, alors $\dim X = \dim T_xX$ et donc $\tau(X) = T_xX$ et τ est un isomorphisme.

Traitons maintenant le cas général : X est juste supposée connexe. Comme $\mathbb{G}_m$ est connexe, chaque composante irréductible de X est $\mathbb{G}_m$-stable. Soit X_1 une composante irréductible de X contenant x. Alors $T_xX_1 \subseteq T_xX$ donc X_1 vérifie les mêmes hypothèses que X, donc d'après le cas déjà traité, X_1 a x pour unique point fixe. Si $X \neq X_1$ alors, comme X est connexe, la composante X_1 n'est pas isolée donc il existe une composante irréductible X_2 rencontrant X_1. Alors $X_1 \cap X_2$ est un fermé non vide $\mathbb{G}_m$-stable de X_1, donc contient x. Si $X_1 \cup X_2 \neq X$, il existe une composante X_3 rencontrant X_1 ou X_2, et l'argument précédent appliqué à X_1 ou X_2 permet de conclure que $x \in X_3$. On montre ainsi, de proche en proche, que x appartient à chaque composante irréductible de X, et est l'unique point fixe de X.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ les composantes irréductibles de X et $P_1, \ldots, P_n$ les idéaux premiers minimaux de A correspondants. Alors $\bigcap_i P_i = (0)$ et $P_i \subseteq \mathfrak{m}$ pour tout i. Appliquant le théorème d'intersection de Krul dans l'anneau noethérien intègre A/P_i, on obtient que $\bigcap_{n\geq 1} \mathfrak{m}^n$ est contenu dans chaque P_i, donc dans leur intersection, égale à (0). On conclut alors, comme dans le cas irréductible, que X s'identifie à une sous-variété fermée $\mathbb{G}_m$-stable de T_xX.

De plus, si X est lisse en x, alors $\dim_x X = \dim T_xX$ et donc $X \cong T_xX$. $\square$

21.2. Décomposition de Bialynicki-Birula. —

Lemme 21.4. — *Soient T un tore et V un T-module rationnel de dimension finie. Alors, $\mathbb{P}(V)$ est recouvert par des ouverts affines T-stables.*

Démonstration. — Soit $(v_0, \ldots, v_n)$ une base de V formée de vecteurs de poids, et soit $(v_0^*, \ldots, v_n^*)$ la base duale. Alors $\mathbb{P}(V)$ est recouvert par les ouverts affines standard

$$U_i := \{[v] \mid v_i^*(v) \neq 0\},$$

et ceux-ci sont T-stables puisque chaque v_i^* est un vecteur de poids. $\square$

***Théorème 21.5* (Bialynicki-Birula)**. — (*un cas particulier*) *Soient V un $\mathbb{G}_m$-module rationnel de dimension finie et X une sous-variété fermée irréductible* **lisse** *de $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{G}_m$-stable. Soit $X^{\mathbb{G}_m}$ la sous-variété des points fixes* (non-vide, d'après le théorème du point fixe de Borel). *Pour chaque* $x \in X^{\mathbb{G}_m}$*, on considère son* **bassin d'attraction** *:*

$$X(x) = \{y \in X \mid \lim_{t \to 0} t \cdot y = x\}.$$

Alors chaque $X(x)$ *est une sous-variété localement fermée de* X*, isomorphe à un espace affine de dimension* $n(x)$*, et l'on a*

$$X = \bigsqcup_{x \in X^{\mathbb{G}_m}} X(x).$$

(« décomposition cellulaire »de X*).*

De plus, si $X^{\mathbb{G}_m}$ *est* **fini***, il existe un unique point fixe dont le bassin d'attraction est ouvert ; on l'appelle le point fixe attractif et on le note* x_-*. De même, il existe un unique point fixe répulsif, noté* x_+*, tel que* $X(x_+) = \{x_+\}$*.*

Exemple 21.6. — Soit $V = k^{n+1}$ sur lequel $\mathbb{G}_m = k^\times$ agit par $z \cdot e_i = z^i e_i$, où $(e_0, \ldots, e_n)$ est la base canonique. Les points fixes dans $\mathbb{P}^n$ sont les $[e_i]$, pour $i = 0, \ldots, n$. On voit que

$$X([e_0]) = \text{ ouvert affine } \{e_0^* \neq 0\} \cong k^n;$$

son complémentaire est l'hyperplan

$$\{e_0^* = 0\} = \mathbb{P}(\sum_{i \geq 1} k e_1) \cong \mathbb{P}^{n-1},$$

et

$$X([e_1]) = \{x \in \mathbb{P}^{n-1} \mid e_1^* \neq 0\} \cong k^{n-1},$$

etc., de sorte que l'on obtient la décomposition cellulaire usuelle

$$\mathbb{P}^n = k^n \sqcup k^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup k \sqcup \mathrm{pt}.$$

Démonstration du théorème. — Soit $x \in X^{\mathbb{G}_m}$. D'après le lemme, il existe un ouvert affine U de X, contenant x et $\mathbb{G}_m$-stable. Posons $A = k[U]$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Écrivons

$$T_x X = T_x^+ X \oplus T_x^{\leq 0} X,$$

où $T_x^+ X$, resp. $T_x^{\leq 0} X$, désigne la somme directe des espaces de poids > 0, resp. ≤ 0. Soit E un supplémentaire $\mathbb{G}_m$-stable de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Notons E^-, resp. E', la somme directe des espaces de poids < 0, resp. ≥ 0, dans E. On a un isomorphisme de $\mathbb{G}_m$-modules

$$E \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (T_x X)^* \cong (T_x^+ X)^* \oplus (T_x^+ X)^\perp,$$

par lequel E^- correspond à $(T_x^+ X)^*$ et E' à $(T_x^+ X)^\perp$.

L'inclusion $E \subseteq \mathfrak{m}$ induit un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant de k-algèbres

$$\phi : k[T_x X] = S(E) \to A = k[U].$$

Le morphisme correspondant $\tau : U \to T_x X$ est $\mathbb{G}_m$-équivariant.

Posons $Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$; c'est la sous-variété fermée de U définie par l'idéal de A engendré par $\phi(I)$, où I est l'idéal de $T_x^+ X$ dans $k[T_x X]$. Or, I est l'idéal engendré par les formes linéaires nulles sur $T_x^+ X$, c.-à-d., par le sous-espace E' de E. Par conséquent, l'idéal de Y dans A est le radical de AE', noté $\sqrt{AE'}$.

Montrons que la restriction τ_Y de τ à Y induit un **isomorphisme** ($\mathbb{G}_m$-équivariant) de Y sur $T_x^+ X$. On a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} Y & \subseteq & U \\ {\scriptstyle \tau_Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ T_x^+ X & \subseteq & T_x X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A/\sqrt{AE'} & \longleftarrow & A \\ {\scriptstyle \overline{\phi}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \phi} \\ k[T_x^+ X] & \longleftarrow & S(E), \end{array}$$

où l'on a identifié $S(E)/S(E)E'$ à $S(E^-) \cong k[T_x^+ X]$. Donc, pour montrer que τ_Y est un isomorphisme, il suffit de montrer que

$$\overline{\phi} : k[T_x^+ X] = S(E)/S(E)E' \to A/\sqrt{AE'}$$

est un isomorphisme. Posons $r = \dim E' = \dim T_x X - \dim T_x^+ X$.

D'une part, l'idéal AE' est engendré par r éléments (à savoir, une base de E') donc, d'après la théorie de la dimension (*cf.* [**Ma1**, Ch. 5]), on a

$$\operatorname{Dim} A/\sqrt{AE'} \geq \operatorname{Dim} A - r = \dim U - r = \dim X - r.$$

Comme X est lisse, on a $\dim X = \dim T_x X =: n$. Donc, posant $d = \dim T_x^+ X$, on obtient l'inégalité

$$\operatorname{Dim} A/\sqrt{AE'} \geq \dim T_x^+ X = d.$$

D'autre part, l'espace cotangent à Y en x est $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + \sqrt{AE'})$. C'est un quotient de $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + E') \cong (T_x^+ X)^*$, ce qui montre que $\dim_x Y \leq d$. Ceci implique que

$$\mathfrak{m}^2 + E' = \mathfrak{m}^2 + \sqrt{AE'}, \qquad T_x Y \cong T_x^+ X,$$

et Y est lisse en x. Il résulte alors du lemme de Nakayama gradué que $\overline{\phi}$: $k[T_x Y] \to k[Y]$ est un isomorphisme, c.-à-d., que τ_Y est un isomorphisme de $Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$ sur $T_x^+ X$.

Lemme 21.7. — *Soit $y \in U$. Alors $\lim_{t\to 0} t \cdot y = x \Leftrightarrow y \in Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$.*

Démonstration. — L'implication $\Leftarrow$ est facile : si $y \in Y$ alors $\tau(y) \in T_x^+ X$, donc $\lim_{t\to 0} t \cdot \tau(y) = 0$, et comme τ est un isomorphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant de Y sur $T_x^+ X$, appliquant x sur 0, on obtient que $\lim_{t\to 0} t \cdot y = x$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{t\to 0} t \cdot y = x$. Alors $\lim_{t\to 0} t \cdot \tau(y) = \tau(x) = 0$. Écrivons

$$\tau(y) = \sum_{i=a}^{b} v_i,$$

avec $a \leq b$ dans $\mathbb{Z}$ et chaque v_i de poids i. Les v_i sont linéairement indépendants, donc peuvent être complétés en une base de $T_x^+ X$. Comme

$$t \cdot \tau(y) = \sum_{i=a}^{b} t^i \, v_i,$$

on voit que $\lim_{t \to 0} t \cdot \tau(y)$ existe si et seulement si $a \geq 0$, et elle vaut v_a si $a = 0$, et 0 si $a > 0$. Donc l'hypothèse entraîne que $\tau(y) \in T_x^+ X$, c.-à-d., $y \in Y$. Le lemme est démontré. $\square$

Le lemme montre déjà que $Y \subseteq X(x)$. Réciproquement, si $y \in X(x)$ alors l'orbite $\mathbb{G}_m \cdot y$ rencontre le voisinage ouvert U de x, et comme U est $\mathbb{G}_m$-stable il vient $y \in U$ d'où $y \in Y$ d'après le lemme.

On a donc démontré que $X(x) = Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$; c'est une sous-variété $\mathbb{G}_m$-stable localement fermée de X, puisque fermée dans l'ouvert U, et isomorphe comme $\mathbb{G}_m$-variété à $T_x^+ X$.

Enfin, comme on l'a vu dans le lemme 16.16, pour tout $y \in X$, la limite $\lim_{t \to 0} t \cdot y$ existe et est un point fixe de $\mathbb{G}_m$ dans X. Par conséquent, on a une partition :

$$X = \bigsqcup_{x \in X^{\mathbb{G}_m}} X(x).$$

Ceci démontre la première assertion du théorème.

Supposons de plus $X^{\mathbb{G}_m}$ fini. Alors, comme X est irréductible et les $X(x)$ sont localement fermés, donc ouverts dans leur adhérence, il existe un unique point fixe x_- tel que $X(x_-)$ soit ouvert, et x_- est l'unique point fixe pour lequel tous les poids de l'espace tangent sont positifs, car pour tout point fixe x on a l'équivalence

$$T_x^+ X = T_x X \Leftrightarrow \dim X(x) = \dim X \Leftrightarrow X(x) \text{ ouvert.}$$

On a de même l'équivalence :

$$T_x^- X = T_x X \Leftrightarrow X(x) = \{x\}.$$

Alors, d'après l'argument précèdent appliqué à la représentation $\rho'(t) = \rho(t^{-1})$, où on note $\rho : \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}(V)$ la représentation initialement donnée, on obtient qu'il existe un unique point fixe x_+ tel que $T_{x_+} X = T_{x_+}^- X$, c.-à-d., tel que $X(x_+) = \{x_+\}$. Le théorème est démontré. $\square$

22. Structure des groupes réductifs et semi-simples

22.1. Sous-groupes de Borel contenant T et chambres de Weyl. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $W(G,T)$ le groupe de Weyl, et R le système de racines de (G,T), c.-à-d., posant $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, on a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Alors, $W(G,T)$ agit fidèlement dans $X(T)$ et donc dans

$$V := X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Par définition, le sous-groupe $W'(G,T)$ de $W(G,T) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ engendré par les réflections s_α, pour $\alpha \in R$, est le groupe de Weyl $W(R)$ du système de racines R. (Dans la définition usuelle, on remplace V par le sous-espace E engendré par R, ce qui ne change rien). On va montrer que $W(G,T) = W'(G,T) = W(R)$.

Plaçons-nous dans l'espace vectoriel dual V^* ; il s'identifie à $X^\vee(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Pour chaque $\alpha \in R$, on introduit l'hyperplan de V^* suivant :

$$\mathcal{H}_\alpha := \{f \in V^* \mid \langle f, \alpha\rangle = 0\}.$$

Définition 22.1. — Les **chambres de Weyl** dans V^* sont les composantes connexes de

$$V^* \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \mathcal{H}_\alpha.$$

Ce sont aussi les classes d'équivalence pour la relation définie par : $\lambda \sim \mu$ si, pour tout $\alpha \in R$, $\langle \lambda, \alpha\rangle$ et $\langle \mu, \alpha\rangle$ sont non nuls et de même signe. (À nouveau, on se place d'habitude dans le sous-espace de V^* engendré par $R^\vee$, mais ceci ne change rien.)

On sait que $W(R) = W(R^\vee)$ agit de façon simplement transitive sur les chambres de Weyl.

Soit $\mathcal{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de G. Alors $\mathcal{B}^T$ est l'ensemble des sous-groupes de Borel contenant T.

Définition 22.2. — Un cocaractère $\lambda : \mathbb{G}_m \to T$ est dit **régulier** s'il vérifie $\langle \alpha, \lambda\rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in R$. Dans ce cas, $w\lambda$ est aussi régulier, pour tout $w \in W(G,T)$.

Remarquons que les cocaractères réguliers sont ceux qui appartiennent à une chambre de Weyl.

Proposition 22.3. — *On a $\mathcal{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathcal{B}^T$ pour tout cocaractère régulier λ.*

Démonstration. — Soit $\lambda(\mathbb{G}_m)$ un cocaractère régulier. Soit Y une composante irréductible de $\mathcal{B}^{\mathbb{G}_m}$. Alors Y est T-stable et projective, donc contient un point fixe x de T. Notons B_x le sous-groupe de Borel correspondant. Comme $T_xX \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Lie}(B_x)$ et $\mathrm{Lie}(B_x)$ contient $\mathfrak{h}$, alors T_xX s'identife à la somme directe des

$\mathfrak{g}_\alpha$, où α parcourt un certain sous-ensemble $R(x)$ de R. Les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans T_xX sont donc les entiers

$$\langle \alpha, \lambda \rangle, \qquad \text{pour } \alpha \in R(x),$$

qui, par hypothèse, sont tous $\neq 0$.

Si l'on avait $\dim Y \geq 1$, alors $\mathbb{G}_m$ agirait trivialement sur $T_xY \subseteq T_x\mathcal{B}$, donc 0 serait un poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans T_xX, une contradiction. Donc $\dim Y = 0$ et $Y = \{x\}$. Ceci montre que $\mathcal{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathcal{B}^T$. Le lemme est démontré. □

Pour tout $\alpha \in R$, on a introduit le sous-tore $S_\alpha = (\operatorname{Ker} \alpha)^0$ et son centralisateur $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$, et l'on a vu que Z_α a exactement deux Borels contenant T, à savoir TU_α et $TU_{-\alpha}$.

D'autre part, pour tout $B \in \mathcal{B}^T$, on a vu que $B \cap Z_\alpha$ est un Borel de Z_α. On a donc obtenu le lemme ci-dessous.

Lemme 22.4. — *Pour tout $B \in \mathcal{B}^T$ et tout $\alpha \in R$, B contient exactement l'un de U_α et $U_{-\alpha}$.*

Maintenant, soit $B(\lambda)$ le point répulsif de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ s'identifie à $G/B(\lambda)$, alors

$$T_{B(\lambda)}\mathcal{B} \cong \mathfrak{g}/\operatorname{Lie} B(\lambda),$$

et comme $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Lie} B(\lambda)$, ceci s'identifie à la somme directe de certains $\mathfrak{g}_\alpha$.

D'autre part, comme $B(\lambda)$ est le poids fixe répulsif, alors les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans l'espace tangent sont tous < 0, d'où

$$T_{B(\lambda)}\mathcal{B} \subseteq \bigoplus_{\substack{\alpha \in R \\ \langle \alpha, \lambda \rangle < 0}} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{1}$$

Mais comme $\operatorname{Lie} B(\lambda)$ contient exactement l'un de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, pour chaque α, alors l'inclusion ci-dessus est une égalité, et l'on a

$$\operatorname{Lie} B(\lambda) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in R \\ \langle \alpha, \lambda \rangle > 0}} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2}$$

et $B(\lambda)$ est l'unique élément de $\mathcal{B}^T$ à vérifier cette égalité (qui caractérise le point fixe répulsif de $\lambda(\mathbb{G}_m)$). De plus, $B(\lambda)$ ne dépend que de la chambre de Weyl contenant λ. On obtient donc une application $C \mapsto B(C)$ de l'ensemble des chambres de Weyl dans $\mathcal{B}^T$, qui à chaque chambre associe le point fixe répulsif associé à C. De plus, cette application est injective, car (2) montre que $\operatorname{Lie} B(C)$ détermine la chambre C.

Montrons que cette application est surjective. Soit $B \in \mathcal{B}^T$ arbitraire. Comme $W(G,T)$ agit de façon simplement transitive sur $\mathcal{B}^T$, il existe un unique $w \in W(G,T)$ tel que $B = n_w(B(\lambda))$, où n_w est un représentant arbitraire de w dans $N_G(T)$. On obtient alors que

$$\operatorname{Lie} B = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in R \\ \langle\beta, w\lambda\rangle > 0}} \mathfrak{g}_\beta.$$

Ceci montre que $B = B(C')$, où C' est la chambre contenant $w\lambda$. Donc $C \mapsto B(C)$ est bijective, et il en résulte que $W(G,T) = W'(G,T) \cong W(R)$.

Rappelons, d'autre part, qu'à chaque chambre de Weyl C dans V^*, on associe l'ensemble des racines positives relativement à C, noté $R^+(C)$, et formé des $\alpha \in R$ telles que $\langle \alpha, f\rangle > 0$ pour un (et donc pour tout) $f \in C$.

Pour $B \in \mathcal{B}^T$, on pose $R^+(B) = \{\alpha \in R \mid U_\alpha \subseteq B\}$. Remarquons aussi que

$$R^+(B) = \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{Lie}(B)\}.$$

En effet, l'inclusion $\subseteq$ est claire. Réciproquement, si $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{Lie}(B)$, alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $\operatorname{Lie}(B)^{S_\alpha} = \operatorname{Lie}(B \cap Z_\alpha)$, et ceci entraîne que $B \cap Z_\alpha = B_\alpha$. Pour résumer, on a donc obtenu le

Théorème 22.5. — *L'application $C \mapsto B(C)$ est une bijection de l'ensemble des chambres de Weyl (dans V^*) sur $\mathcal{B}^T$; elle vérifie $R^+(B(C)) = R^+(C)$. Le groupe de Weyl $W(G,T)$ est engendré par les s_α, pour $\alpha \in R$, et s'identifie à $W(R)$.*

Pour terminer ce paragraphe, consignons ici le lemme ci-dessous, qui sera utile plus loin (et qu'on peut aussi utiliser pour montrer que tout $B \in \mathcal{B}^T$ est déterminé par son algèbre de Lie).

Lemme 22.6. — *Soient K un sous-groupe fermé connexe de G, et $K_1, \dots, K_n$ des sous groupes fermés connexes de K. Si $\operatorname{Lie}(K) = \sum_i \operatorname{Lie}(K_i)$, alors les K_i engendrent K.*

Démonstration. — Soit K' le sous-groupe de K engendré par les K_i. D'après la proposition 10.1, K' est un sous-groupe fermé (et connexe) de K. D'autre part, $\operatorname{Lie}(K')$ contient la somme des $\operatorname{Lie}(K_i)$, qui égale $\operatorname{Lie}(K)$ par hypothèse. Par conséquent, $\dim K' = \dim K$ et $K' = K$ puisque K est connexe. □

22.2. Sous-groupes de Borel contenant T et bases de R. — Ce paragraphe peut-être omis : on y présente une autre preuve du théorème précédent, qui n'utilise pas la décomposition de Bialynicki-Birula et repose sur le lemme ci-dessous.

Lemme 22.7. — a) *Soient B un sous-groupe de Borel de SL_2, et $U = B_u$. Alors $k[\mathrm{SL}_2]^U \cong S(V)$, où $V = (k^2)^*$.*

b) *Soit* $G = \mathrm{SL}_2$ *ou bien* PGL_2*, et soient* $B = TU$ *un sous-groupe de Borel, et* α *le poids de* T *dans* $\mathrm{Lie}(U)$*. Soit* $\lambda \in X(T)$ *tel qu'il existe* $f \in k[G]$ *non-constante vérifiant* $f(gb) = \lambda(b)f(g)$*, pour tout* $g \in G$*,* $b \in B$*. Alors* $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$.

Démonstration. — Posons $G = \mathrm{SL}_2$. On sait que $k[G]^U = k[G/U]$. Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de k^2. On peut supposer que U est formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Alors G/U s'identifie à l'orbite $Ge_1 = k^2 \setminus \{0\}$, et d'après le point a) du théorème 14.19, l'on a $k[Ge_1] = k[k^2] = S(V)$. Plus précisément, l'isomorphisme $S(V) \xrightarrow{\sim} k[G]^U$ associe à tout $P \in S(V)$ la fonction $\phi_P : g \mapsto P(ge_1)$.

On voit sans peine, en utilisant le théorème 15.24, qu'il suffit de démontrer b) lorsque $G = \mathrm{SL}_2$. Dans ce cas, soit U comme plus haut. Soient $\lambda \in X(T)$ et $f \in k[G]$ vérifiant les hypothèses de l'assertion b). Pour tout $z \in \mathbb{G}_m$, $\alpha^\vee(z)$ est la matrice diagonale $zE_{11} + z^{-1}E_{22}$, et l'on a $\alpha^\vee(z)e_1 = ze_1$. On en déduit que le polynôme P tel que $f = \phi_P$ est homogène, non-constant, et qu'on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = n$, où $n = \deg(P) > 0$. L'assertion b) en découle. □

Rappelons que, pour tout $\alpha \in R$, on note B_α le sous-groupe de Borel de Z_α qui contient T et dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{g}_\alpha$.

Soit B un Borel de G contenant T. Alors, pour tout $\alpha \in R$, $B \cap Z_\alpha = C_B(S_\alpha)$ est égal ou bien à B_α, ou bien à $B_{-\alpha}$. Donc, si l'on pose

$$R^+(B) = \{\alpha \in R \mid B_\alpha \subseteq B\},$$

alors on obtient une partition $R = R^+(B) \sqcup -R^+(B)$. Observons aussi que

$$R^+(B) = \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(B)\}.$$

En effet, l'inclusion $\subseteq$ est claire. Réciproquement, si $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(B)$, alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $\mathrm{Lie}(B)^{S_\alpha} = \mathrm{Lie}(B \cap Z_\alpha)$, et ceci entraîne que $B \cap Z_\alpha = B_\alpha$.

Théorème 22.8. — 1) *Pour tout* $B \in \mathcal{B}^T$*,* $R^+(B)$ *est l'ensemble des racines positives associées à une base* $\Delta(B)$ *de* R*.*

2) *De plus, l'application* $B \mapsto \Delta(B)$ *est injective. Par conséquent,* $W(G,T)$ *est engendré par les* s_α*,* $\alpha \in R$*, et s'identifie à* $W(R)$*.*

Démonstration. — Soit $B \in \mathcal{B}^T$. D'après le théorème de Chevalley 14.11, il existe un G-module rationnel V de dimension finie et une droite V_1 de V, tels que $\mathrm{Stab}_G(V_1) = B$. Alors B agit sur V_1 par un caractère $\lambda \in X(B) = X(T)$. Soit $v \in V_1 \setminus \{0\}$ et, pour tout $f \in V^*$ telle que $f(v) \neq 0$, soit ϕ_f l'élément de $k[G]$ défini par $\phi_f(g) = f(gv)$, pour tout $g \in G$. Alors $\phi_f(gb) = \lambda(b)\phi_f(g)$, pour tout $b \in B$.

Soit $\alpha \in R^+(B)$. Montrons que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$. Comme $H_\alpha := \mathcal{D}(Z_\alpha)$ est un sous-groupe normal de Z_α, alors $B_\alpha \cap H_\alpha$ est un sous-groupe de Borel de H_α.

De plus, $\alpha^\vee$ est à valeurs dans H_α d'après le point d) de la proposition 20.9. Comme H_α est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, on déduit alors du lemme 22.7 que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0$. En fait, on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$. En effet, pour tout $z \in \mathbb{G}_m$, $g \in H_\alpha$, on a

$$\phi_f(g\alpha^\vee(z)) = z^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle} \phi_f(g).$$

Supposons que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0$. Alors, pour $g \in H_\alpha$, on a $f(gv) = f(v)$ pour toute $f \in V^*$ telle que $f(v) \neq 0$. On en déduit que H_α fixe v, puis que Z_α stabilise V_1, une contradiction puisque $\mathrm{Stab}_G(V_1) = B$. On a donc montré que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$, pour tout $\alpha \in R^+(B)$.

Comme $R = R^+(B) \cup -R^+(B)$, on en déduit que λ est régulier (i.e., $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in R$), et que $R^+(B)$ est l'ensemble de racines positives associé à la base $\Delta(B) := \Delta(\lambda)$. Ceci prouve le point 1) du théorème.

Montrons le point 2). On déduit du lemme 22.6 que l'application $B \mapsto \Delta(B)$ est injective, puisque B est engendré par les B_α, pour $\alpha \in R^+(B)$. Comme $W(R)$ agit transivitement sur l'ensemble des bases de R, il en résulte que $\#W(G,T) = \#\mathcal{B}^T \leq \#W(R)$. Combiné avec le point d) de la proposition 20.12, ceci entraîne que $W(G,T) = W'(G,T)$ et que le morphisme $W(G,T) \to W(R)$ est un isomorphisme. Le théorème est démontré. □

On peut reformuler le théorème de la façon suivante. Pour toute base Δ de R, notons $R^+(\Delta)$ l'ensemble de racines positives associé, et $B(\Delta)$ le sous-groupe (fermé, connexe) de G engendré par les B_α, pour $\alpha \in R^+(\Delta)$.

Corollaire 22.9. — *$W = W(G,T)$ s'identifie à $W(R)$, et l'application $\Delta \mapsto B(\Delta)$ est une bijection W-équivariante entre l'ensemble des bases de R et $\mathcal{B}^T$.*

22.3. Structure des groupes réductifs connexes. — On peut maintenant démontrer le théorème annoncé dans le §18.6.

Théorème 22.10. — *Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $W = W(G,T)$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, et soit $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$ la donnée radicielle définie dans la proposition 20.12. Alors*

1) $C_G(T) = T$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$, *avec* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *pour tout* α.

2) W *s'identifie à* $W(R)$.

3) *Pour tout $\alpha \in R$, il existe un* **unique** *sous-groupe fermé connexe U_α, normalisé par T, et tel que $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$. Il est unipotent, et pour tout isomorphisme $\theta_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ on a, pour tout $x \in \mathbb{G}_a$, $t \in T$,*

$$(*_\alpha) \qquad t\theta_\alpha(x)t^{-1} = \theta(\alpha(t)x).$$

De plus, si $w \in W$ et si n est un représentant de w dans $N(T)$, alors $nU_\alpha n^{-1} = U_{w\alpha}$.

4) *G est engendré par T et les U_α, $\alpha \in R$. De plus, pour tout $\alpha \in R$, Z_α est engendré par T, U_α, et $U_{-\alpha}$.*

5) *Les sous-groupes de Borel contenant T sont en bijection avec les chambres de Weyl (et les bases) de R. Plus précisément, à toute chambre C on associe le sous-groupe $B(C)$ engendré par T et les U_α, pour $\alpha \in R^+(C)$.*

Démonstration. — On a déjà vu 1)-2) et l'existence dans 3), *cf.* Propositions 20.9 et 20.12. Voyons l'unicité. Soit H un sous-groupe fermé connexe normalisé par T et tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{g}_\alpha$. Alors $\dim H = 1$, et l'on a $\mathrm{Lie}(H \cap Z_\alpha) = \mathrm{Lie}(H)^{S_\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha$. On en déduit que $H \cap Z_\alpha = H$, d'où $H \subseteq Z_\alpha$. Comme Z_α est réductif, d'après le corollaire 17.4, l'unicité résulte alors de la proposition 20.9.

Ensuite, $nU_\alpha n^{-1}$ est un sous-groupe fermé unipotent connexe, normalisé par T, dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{Ad}(n)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$; il est donc égal à $U_{w\alpha}$. Ceci prouve le point 3).

Enfin, 4) résulte du lemme 22.6, et 5) est une reformulation du théorème 22.5 ou du corollaire 22.9. □

Remarque 22.11. — L'ingrédient pour démontrer l'existence de la donnée radicielle et l'existence et l'unicité des groupes U_α a été de se ramener aux groupes Z_α de rang semi-simple égal à 1. On obtient, de plus, la proposition suivante, qui est **très utile** (et généralise le point 4) du théorème précédent). On conserve les notations précédentes.

***Proposition 22.12* (Sous-groupes normalisés par T).** — *Soit H un sous-groupe fermé connexe de G, normalisé par T. Alors, pour tout $\alpha \in R$, on a l'équivalence :*

$$(\dagger) \qquad U_\alpha \subseteq H \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(H).$$

Soit E l'ensemble des α vérifiant cette condition ; alors

$$\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Lie}(T \cap H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in E} \mathfrak{g}_\alpha,$$

et H est engendré par $T \cap H$ et les U_α, pour $\alpha \in E$.

Démonstration. — Dans (†), l'implication $\Rightarrow$ est évidente. Réciproquement, supposons $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(H)$. Alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $(\mathrm{Lie}\, H)^{S_\alpha}$, où S_α désigne le sous-tore de T égal à $(\mathrm{Ker}\,\alpha)^0$. Or, d'après le théorème 18.11, on a

$$\mathrm{Lie}(H)^{S_\alpha} = \mathrm{Lie}(H^{S_\alpha}) = \mathrm{Lie}(H \cap Z_\alpha)^0.$$

Donc, a fortiori, $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $\mathrm{Lie}(K)$, où K désigne le sous-groupe de Z_α engendré par T et $H' := (H \cap Z_\alpha)^0$. Il est fermé connexe et, puisque T normalise H', l'on a

$$K = TH' = \{th \mid t \in T,\ h \in H'\}.$$

Supposons avoir montré que $U_\alpha \subseteq K$, et soit $x \in k$. Alors, il existe $t \in T$ et $h \in H'$ tels que

$$U_\alpha(x) = th. \tag{1}$$

Soit $z \in k^\times$. Conjugant (1) par $\alpha^\vee(z) \in T$, on obtient

$$U_\alpha(z^2 x) = th', \tag{2}$$

où l'on a posé $h' = \alpha^\vee(z)\, h\, \alpha^\vee(-z)$; c'est un élément de H'. On déduit de (1) et (2) que $U_\alpha((z^2-1)x)$ égale $h^{-1}h'$ donc appartient à H'. Il en résulte que $U_\alpha \subseteq H'$.

Il reste donc à montrer que $U_\alpha \subseteq K$. Or on sait que $\dim Z_\alpha = \dim T + 2$, et K est connexe et contient T. Donc, de deux choses l'une. Ou bien K égale Z_α, ou bien $\dim K = \dim T + 1$. Dans le second cas, soit B un sous-groupe de Borel de K contenant T. On a $B \neq T$, car sinon, d'après la proposition 15.26 (voir aussi 20.3), on aurait $K = B = T$, ce qui n'est pas le cas puisque $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(K)$. Donc, pour une raison de dimension, on a $K = B$, et c'est l'un des deux sous-groupes de Borel B_α ou $B_{-\alpha}$ de Z_α. Comme $\mathrm{Lie}(B_{-\alpha}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ne contient pas $\mathfrak{g}_\alpha$, on a donc $K = B_\alpha$. On obtient donc, dans les deux cas, que K contient U_α. Ceci achève la preuve de l'équivalence (†).

Donc, étant un sous-T-module de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}(H)$ est la somme directe des $\mathfrak{g}_\alpha$, pour $\alpha \in E$, et de $\mathrm{Lie}(H)^T$. De plus, d'après le corollaire 18.12, $\mathrm{Lie}(H)^T$ est l'algèbre de Lie de (la composante connexe de) $H \cap C_G(T) = H \cap T$. On obtient donc

$$\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Lie}(H \cap T) \oplus \bigoplus_{\alpha \in E} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Par conséquent, d'après le lemme 22.6, H est engendré par $H \cap T$ et les U_α, pour $\alpha \in E$. La proposition est démontrée. □

22.4. Sous-groupes unipotents normalisés par T. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie, W le groupe de Weyl, R le système de racines.

Choisissons un sous-groupe de Borel B contenant T. D'après le théorème 22.5 (ou 22.8), ceci donne une chambre de Weyl C et l'ensemble associé R^+ de racines positives. De plus, il existe $\eta \in X^\vee(T) \cap C$ tel que

$$\langle \eta, \alpha \rangle \geq 1, \qquad \forall \alpha \in R^+.$$

On pose $U = R_u(B)$ et on note $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(U)$.

Enfin, on pose $N = \#R^+$ et on choisit une numérotation $\beta_1, \ldots, \beta_N$ des éléments de R^+.

***Théorème 22.13* (Structure de U et B).** — a) *Le morphisme T-équivariant*

$$\Phi : U_{\beta_1} \times \cdots \times U_{\beta_N} \to U, \qquad (u_1, \ldots, u_N) \mapsto u_1 \cdots u_N$$

est un isomorphisme de variétés.

b) *Plus généralement, soit U' un sous-groupe fermé de U normalisé par T et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les poids de T dans* $\mathrm{Lie}(U')$. *Alors U' est connexe, on a $U_{\alpha_i} \subseteq U'$ pour $i = 1, \ldots, r$, et le morphisme T-équivariant*

$$U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_r} \to U', \qquad (u_1, \ldots, u_r) \mapsto u_1 \cdots u_r$$

est un isomorphisme de variétés.

c) *Le morphisme $T \times U \to B$ qui au couple (t, u) associe le produit tu, resp. ut, est un isomorphisme de variétés. Par conséquent, tout élément $b \in B$ s'écrit de façon unique*

$$b = tU_{\beta_1}(x_1) \cdots U_{\beta_N}(x_N) = U_{\beta_1}(\beta_1(t)x_1) \cdots U_{\beta_N}(\beta_N(t)x_N).$$

Démonstration. — a) Posons $\mathcal{V} = U_{\beta_1} \times \cdots \times U_{\beta_N}$. Alors $\mathcal{V}$ est isomorphe, comme T-variétés, à l'espace tangent T_eU. Par conséquent, l'assertion a) résulte de la proposition 21.3. Rappelons l'argument.

Comme $\dim \mathcal{V} = \dim U$, il suffit de montrer que Φ est une immersion fermée, i.e. que le comorphisme Φ^* est surjectif. Posons $A = k[\mathcal{V}]$.

Comme $\mathcal{V} \cong \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ comme T-variétés, alors A est graduée positivement par :

$$A = k \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots, \quad \text{où } A_i = \{a \in A \mid \eta(z)a = z^{-i}a, \ \forall z \in \mathbb{G}_m\}.$$

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal d'augmentation. C'est l'idéal maximal correspondant au point $(e, \ldots, e)$ de $\mathcal{V}$. Notons $\mathfrak{m}_U$ l'idéal maximal de $k[U]$ au point e.

L'espace tangent $T_0\mathcal{V}$ s'identifie à $\bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$, et la différentielle $\mathrm{d}_0\Phi$ est un isomorphisme $T_0\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{n}$. Donc

$$\mathfrak{m} = \Phi^*(\mathfrak{m}_U) + \mathfrak{m}^2,$$

et ceci implique que $\Phi^*(\mathfrak{m}_U)$ contient un supplémentaire T-stable de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Il résulte alors du lemme de Nakayama gradué 21.1 que Φ^* est surjective. Ceci prouve l'assertion a).

Démontrons l'assertion b). Traitons d'abord le cas où U' est supposé connexe. Soit $\alpha \in R^+$ tel que $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(U')$. Alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $(\mathrm{Lie}\, U')^{S_\alpha}$, où S_α désigne le sous-tore de T égal à $(\mathrm{Ker}\, \alpha)^0$. Or, d'après le théorème 18.11, on a

$$\mathrm{Lie}(U')^{S_\alpha} = \mathrm{Lie}(U'^{S_\alpha}) = \mathrm{Lie}(U' \cap Z_\alpha).$$

Or, $(U' \cap Z_\alpha)^0$ est un sous-groupe fermé connexe unipotent T-stable de Z_α, donc égal à U_α ou $U_{-\alpha}$. Puisque son algèbre de Lie contient $\mathfrak{g}_\alpha$, alors $(U' \cap Z_\alpha)^0 = U_\alpha$, et donc $U_\alpha \subseteq U'$. Ceci montre l'équivalence :

$$\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(U') \Leftrightarrow U_\alpha \subseteq U'.$$

Le même argument que dans la preuve de a) montre alors que le morphisme $\psi : U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_r} \to U'$ est une immersion fermée. Puisque $\dim U' = \dim \mathrm{Lie}(U') = r$ et que U' est supposé connexe, ψ est un isomorphisme. Ceci prouve b) dans le cas où U' est supposé connexe.

Soit maintenant U' arbitraire, et soit U_1 sa composante connexe. Il résulte de ce qui précède que la multiplication induit un isomorphisme de variétés $U_1 \times U_2 \xrightarrow{\sim} U$, où U_2 est le produit des U_α non contenus dans U_1. Alors $U' \cap U_2$ est un sous-groupe de U_2, qui est T-stable et fini, car isomorphe à U'/U_1. On en déduit que $U' \cap U_2 = \{1\}$, et donc U' est connexe. L'assertion b) est démontrée.

Enfin, on a déjà vu que $T \times U \xrightarrow{\sim} B$ comme variétés, et la dernière assertion de c) est facile et laissée au lecteur. $\square$

Pour terminer ce paragraphe, signalons le corollaire suivant. One note $Q(R)^+$ le sous-monoïde de $Q(R)$ engendré par R^+, ou, de façon équivalente, par la base Δ de R^+.

Corollaire 22.14. — *Comme T-module, $k[U] = \bigoplus_{\gamma \in Q(R)^+} k[U]_{-\gamma}$, et chaque $k[U]_{-\gamma}$ est de dimension finie. De plus, $k[U]_0 = k \cdot 1$.*

Démonstration. — $k[U]$ est isomorphe comme T-variété à $k[V] = S(V^*)$, où V désigne le T-module

$$\bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_{\beta_i}.$$

Soit $\{X_1, \ldots, X_N\}$ une base de V^*, où chaque X_i est de poids $-\beta_i$. Alors $k[U]$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $k[X_1, \ldots, X_N]$, et la première assertion en découle.

De plus, pour tout $\gamma \in Q(R)^+$, l'espace de poids $-\gamma$ est engendré par les monômes $X_1^{r_1} \cdots X_N^{r_N}$ tels que $r_1\beta_1 + \cdots + r_N\beta_N = \gamma$. Or, comme Δ est une base, il n'y a qu'un nombre fini de telles écritures, et de plus $r_1 = \cdots = r_N = 0$ si $\gamma = 0$. Le corollaire est démontré. $\square$

22.5. Cellules de Schubert et décomposition de Bruhat. — Comme précédemment, soient G réductif connexe, T un tore maximal, W le groupe de Weyl, etc. On fixe un sous-groupe de Borel B contenant T, d'où un sous-ensemble de racines positives R^+. Soient $U = B_u$ et $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(B)$, $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(U)$. On identifie $\mathcal{B}$ à G/B et on désigne par e_w le point fixe wB/B. (Pour $w = 1$, on note simplement e.)

Définition 22.15. — Soit $C^+ = \{f \in X^\vee(T) \otimes \mathbb{R} \mid \langle \alpha, f \rangle > 0, \ \ \forall \alpha \in R^+\}$. On l'appelle la chambre de Weyl **dominante** (relativement à B ou R^+).

Comme le groupe de Weyl agit de façon simplement transitive sur les chambres de Weyl, il existe un unique $w_0 \in W$ tel que $w_0(C^+) = -C^+$, et w_0

est une involution (puisque $w_0^2(C^+) = C^+$). On notera n_0 un représentant de w_0 dans $N_G(T)$.

On fixe un cocaractère $\lambda \in X^\vee(T)$ **dominant régulier**, c.-à-d., tel que $\langle \alpha, \lambda \rangle \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\alpha \in R^+$. On considère la décomposition de Byalinicki-Birula correspondante :

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} C(w), \quad \text{où } C(w) = \{x \in G/B \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t)x = e_w\}.$$

Soit $x \in C(w)$. Comme les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathrm{Lie}(U)$ sont tous > 0, alors pour tout $u \in U$ et $t \in \mathbb{G}_m$, on a

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t) u \lambda(t)^{-1} = 1,$$

et donc, comme $\lambda(t)ux = \lambda(t)u\lambda(t)^{-1}\,\lambda(t)x$,

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t)ux = \lim_{t \to 0} \lambda(t)x = e_w.$$

Ceci montre que l'orbite $C(w)$ est stable par U, donc en particulier contient Ue_w.

Or, si Ux est une autre orbite de U dans $C(w)$, qui est un espace affine, elle est fermée dans $C(w)$, d'après le théorème de Kostant-Rosenlicht. Mais d'après ce qui précède, e_w appartient à son adhérence dans $C(w)$. Donc $e_w \in Ux$ et $Ux = Ue_w$. Il en résulte que $C(w) = Ue_w$. On a donc obtenu la première assertion de la proposition suivante. Pour chaque $w \in W$, on note n_w un représentant dans $N_G(T)$ (et l'on écrit n_0 au lieu de n_{w_0}).

***Proposition 22.16* (Décomposition de Bruhat (I))**. — *Soit B un sous-groupe de Borel contenant T, correspondant à une chambre de Weyl C^+, et soit $U = B_u$. Alors les cellules de la décomposition de Bialynicki-Birula de $\mathcal{B} = G/B$ associée à C^+ sont exactement les orbites Ue_w, pour $w \in W$. On a donc la décomposition de Bruhat :*

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} Un_wB/B \qquad \text{et} \qquad G = \bigsqcup_{w \in W} Un_wB.$$

De plus, l'orbite ouverte de U dans G/B (resp., de $U \times B$ dans G), est Un_0B/B (resp., Un_0B).

Démonstration. — On a déjà vu la première assertion. D'autre part, l'espace tangent $T_{e_{w_0}}(G/B)$ s'identifie à

$$\mathfrak{g}/n_0(\mathfrak{b}) \cong \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha;$$

les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ y sont tous > 0, donc c'est bien l'orbite ouverte. $\square$

0n pose $R^- = -R^+$ et $U^- = n_0(U)$. Alors, pour tout $\alpha \in R$, on a

$$\begin{array}{lcl} U_\alpha \subseteq U & \Leftrightarrow & \alpha \in R^+; \\ U_\alpha \subseteq U^- & \Leftrightarrow & \alpha \in R^-. \end{array}$$

Définition 22.17. — Pour tout $w \in W$, on pose

$$U_w = U \cap n_w(U) \qquad \text{et} \qquad U^w = U \cap n_w(U^-).$$

Ce sont deux sous-groupes fermés T-stables de U, donc chacun est le produit des U_α qu'il contient (*cf.* 22.13). De plus,

$$\begin{array}{lcl} U_\alpha \subseteq U_w & \Leftrightarrow & \alpha \in R^+ \cap w(R^+); \\ U_\alpha \subseteq U^w & \Leftrightarrow & \alpha \in R^+ \cap w(R^-). \end{array}$$

Comme les deux ensembles de racines ci-dessus forment une partition de R^+, on a, d'après 22.13 à nouveau, $U^w \cap U_w = \{1\}$ (car il ne contient aucun U_α), et la multiplication induit un isomorphisme de variétés $U^w \times U_w \xrightarrow{\sim} U$.

Proposition 22.18. — *Pour tout $w \in W$ le stabilisateur du point e_w dans G, resp. $\mathfrak{g}$, resp. U, resp. $\mathfrak{n}$, est $n_w(B)$, resp. $n_w(\mathfrak{b})$, resp.*

$$U \cap n_w(B) = U_w, \qquad \textit{resp.} \qquad \mathfrak{n} \cap n_w(\mathfrak{b}) = \bigoplus_{\alpha \in R^+ \cap w(R^+)} \mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{Lie}(U_w).$$

Par conséquent, $Ue_w = U^w e_w$ et le morphisme orbite $\psi_w : U^w \to U^w e_w$ est un isomorphisme. En particulier,

$$\dim U e_w = \dim U^w = |R^+ \cap w(R^-)| =: n(w).$$

Démonstration. — Le morphisme $\phi : G \to G/B$ est séparable, et $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\phi = \mathfrak{b}$. Fixons $w \in W$. Évidemment, le stabilisateur de $e_w = n_w B/B$ est $n_w(B)$ et, par G-équivariance, le morphisme orbite

$$\phi_w : G \to G/B, \qquad g \mapsto g n_w B/B = n_w({n_w}^{-1} g n_w)B/B,$$

est aussi séparable, et $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\phi_w = n_w(\mathfrak{b})$. Les deux autres égalités en découlent en prenant l'intersection avec U ou $\mathfrak{n}$. Comme $U = U^w U_w$ et $U^w \cap U_w = \{1\}$, alors $\psi_w : U^w \to U e_w$ est bijectif ; comme de plus

$$\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\psi_w = \mathrm{Lie}(U^w) \cap \mathrm{Lie}(U_w) = \{0\},$$

alors ψ_w est séparable, donc c'est un isomorphisme. □

Définition 22.19. — En particulier, pour $w = w_0$, on a $U^{w_0} = U$ et donc on obtient des isomorphismes

$$U \xrightarrow{\sim} U n_0 B/B \qquad \text{et} \qquad U \times B \xrightarrow{\sim} U n_0 B.$$

Translatant ceci par ${n_0}^{-1}$, on obtient, comme ${n_0}^{-1} U n_0 = U^-$, des isomorphismes

$$U^- \xrightarrow{\sim} U^- B/B \qquad \text{et} \qquad U^- \times B \xrightarrow{\sim} U^- B.$$

Ce sont, respectivment, des voisinages ouverts affines de e_{n_0} dans G/B, resp. n_0 dans G, resp. e dans G/B, resp. G. Dans tous les cas, ces voisinages sont appelés « la grosse cellule » (au voisinage du point considéré).

Remarque 22.20. — Dans le cas des groupes semi-simples de rang 1, on avait déjà utilisé ces « grosses cellules » dans le cas de $G/B = \mathbb{P}^1$.

On peut maintenant énoncer une version plus précise de la décomposition de Bruhat :

***Théorème 22.21* (Décomposition de Bruhat (II))**. — *On a*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} U^w n_w B,$$

et, pour tout $w \in W$, l'application $U^w \times B \to U^w n_w B$, $(u, b) \mapsto u n_w b$ est un isomorphisme. En particulier, tout $g \in G$ s'écrit de façon **unique**

$$g = u n_w t u', \qquad \text{avec } t \in T,\ u' \in U,\ u \in U^w.$$

De plus, on a les recouvrements ouverts

$$G = \bigcup_{w \in W} n_w U^- B \qquad \text{et} \qquad G/B = \bigcup_{w \in W} n_w U^- B/B.$$

Démonstration. — On a déjà vu tout cela, sauf la dernière assertion. Or, $n_w U^- B$ est un voisinage ouvert de n_w, qui égale $n_w(U^-)n_w B$ donc contient $U^w n_w B$, puisque $U^w = n_w(U^-) \cap U$. □

Définition 22.22. — Pour tout $w \in W$, on pose

$$N(w) = \{\alpha \in R^+ \mid w^{-1}\alpha \in R^-\} = R^+ \cap w(R^-),$$

et $n(w) = |N(w)|$. On a vu plus haut que $n(w) = \dim U e_w = \dim C(w)$.

On voit facilement que $n(w^{-1}) = n(w)$, et $n(w_0 w) = n(w w_0) = N - n(w)$, où $N = \# R^+$. Par conséquent, $\dim C(w) = \dim C(w^{-1})$ et $\dim C(w_0 w) = N - \dim C(w)$.

23. Structure des groupes semi-simples

23.1. Premières propriétés des groupes semi-simples. —

Théorème 23.1. — *Soient G un groupe connexe* **semi-simple**, *T un tore maximal, $R = R(G, T)$. Alors :*

a) *Le sous-groupe $\bigcap_{\alpha \in R} \operatorname{Ker} \alpha \subset T$ égale $Z(G)$, qui est fini. Par conséquent, R engendre $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et $R^\vee$ engendre $X^\vee(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

b) *G est engendré par les U_α, pour $\alpha \in R$, et donc $G = \mathcal{D}(G)$.*

Démonstration. — On sait que $Z(G) \subseteq T$, que G est engendré par T et les U_α, et que pour tout $\alpha \in R$, $x \in \mathbb{G}_m$, $t \in T$, on a $t\theta_\alpha(x)t^{-1} = \theta_\alpha(\alpha(t)x)$. On en déduit que

$$Z(G) = \bigcap_{\alpha \in R} \operatorname{Ker} \alpha.$$

D'autre part, comme G est semi-simple alors $Z(G)^0 = \{1\}$ et donc $Z(G)$ est fini.

Il en résulte, d'après la question 1.6 du §9.1, que $Q(R)$ est d'indice fini dans $X(T)$. Alors, puisque $Q(R^\vee)$ et $Q(R)$ ont même rang (le cardinal d'une base de R), $Q(R^\vee)$ est aussi d'indice fini dans $X^\vee(T)$. Ceci prouve a).

On en déduit que T est engendré par les sous-groupes $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$, pour $\alpha \in R$. En effet, soient S le sous-groupe (fermé connexe) engendré par ces derniers et π l'application de restriction $X(T) \to X(S)$. Alors,

$$\operatorname{Ker} \pi = \{\chi \in X(T) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle = 0, \forall \alpha \in R\}.$$

Comme $R^\vee$ engendre $X^\vee(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on en déduit que $\operatorname{Ker} \pi = \{0\}$, d'où $T = S$. De plus, on a le lemme suivant.

Lemme 23.2. — *Pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$ est contenu dans le sous-groupe engendré par U_α et $U_{-\alpha}$.*

Démonstration. — D'après le point d) de la proposition 20.9, $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$ est contenu dans $\mathcal{D}(Z_\alpha)$. Notons H_α le sous-groupe de $\mathcal{D}(Z_\alpha)$ engendré par U_α et $U_{-\alpha}$. C'est un sous-groupe fermé connexe non-trivial, normalisé par T et donc normal dans $\mathcal{D}(Z_\alpha)$. Alors, H_α ne peut être de dimension 1 ou 2, car sinon H_α et $\mathcal{D}(Z_\alpha)/H_\alpha$ seraient résolubles, et donc $\mathcal{D}(Z_\alpha)$ aussi, une contradiction. Donc $\dim H = 3$ et $H_\alpha = \mathcal{D}(Z_\alpha)$. Le lemme est démontré. $\square$

Il en résulte que $T = S$ est contenu dans le sous-groupe H engendré par les U_α, pour $\alpha \in R$. Comme G est engendré par T et H, d'après le point 4) du théorème 22.10, on obtient que $G = H$. Il en résulte que $G = \mathcal{D}(G)$, puisque chaque U_α est contenu dans $\mathcal{D}(G)$. En effet, pour $x \in \mathbb{G}_a$, $t \in T$, on a

$$t\theta_\alpha(x)t^{-1}\theta_\alpha(-x) = \theta_\alpha((\alpha(t) - 1)x).$$

Ceci prouve b). Le théorème est démontré. $\square$

Corollaire 23.3. — *Soit G réductif connexe. La multiplication induit un morphisme de groupes algébriques*

$$\mathcal{D}(G) \times Z^0(G) \to G,$$

qui est surjectif et de noyau fini.

Démonstration. — $G/Z^0(G)$ est semi-simple, donc égal à son groupe dérivé d'après le théorème précédent. Par conséquent, le morphisme de groupes $\mathcal{D}(G) \to G/Z^0(G)$ est surjectif, d'où $\dim \mathcal{D}(G) \geq \dim G - \dim Z^0$. Or, on a vu (Proposition 18.18) que le morphisme de groupes algébriques

$$\phi : \mathcal{D}(G) \times Z^0(G) \to G$$

est de noyau fini (car $\operatorname{Ker} \phi \cong \mathcal{D}(G) \cap Z^0(G)$), donc son image est un sous-groupe fermé de G de dimension $\geq \dim G$. Donc ϕ est surjectif. Le corollaire est démontré. □

23.2. Rappels sur les systèmes de racines. — On rappelle dans ce paragraphe quelques propriétés des systèmes de racines. Pour les démonstrations, on renvoie à [**BLie**, Chap.6] ou [**Hu1**, Chap.III].

23.3. Notation et conventions. — Soit R un système de racines dans un espace vectoriel réel E. Alors, $R^\vee$ est un système de racines dans l'espace dual E^*. Soit W le groupe de Weyl. Il est commode d'identifier E et E^* au moyen d'un produit scalaire (défini positif) W-invariant. Ceci est possible car si $\phi(-,-)$ est un produit scalaire arbitraire sur E, alors la forme bilinéaire sur E définie par

$$(x, x') = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \phi(wx, wx')$$

est W-invariante et définie positive. On obtient alors un isomorphisme $\tau : E^* \xrightarrow{\sim} E$ et l'on vérifie que, pour tout $\alpha \in R$, on a

$$\tau(\alpha^\vee) = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)},$$

cf. loc. cit. Par abus, on écrira encore $\alpha^\vee$ au lieu de $\tau(\alpha^\vee)$, alors on a, pour tout $x \in E$:

$$\langle \alpha^\vee, x \rangle = \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^\vee, x),$$

c.-à-d., l'identification $\tau(\alpha^\vee) = \alpha^\vee$ est compatible avec le remplacement des crochets $\langle -, - \rangle$ par le produit scalaire $(-,-)$. De plus, comme $(\alpha, \alpha)/2 > 0$, alors

$$(\alpha^\vee, \beta), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta^\vee)$$

sont de même signe, pour tout $\alpha, \beta \in R$.

23.4. Systèmes de racines irréductibles. —

Définition 23.4. — Un systèmes de racines R est dit **réductible** s'il existe une partition de R en deux sous-ensembles non vides R_1 et R_2 tels que $(\alpha, \beta) = 0$ pour tout $\alpha \in R_1$ et $\beta \in R_2$. Dans ce cas, on écrira

$$R = R_1 \overset{\perp}{\sqcup} R_2.$$

Dans le cas contraire, on dit que R est **irréductible**.

Définition 23.5. — 1) Soit R un système de racines et Δ une base de R. On rappelle que les éléments de Δ forment les sommets du **graphe de Coxeter** $C(R)$ de R, dans lequel deux sommets $\alpha, \beta \in R$ sont reliés par

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{4(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)(\alpha, \alpha)}$$

arêtes (ceci est un élément de $\{0, 1, 2, 3\}$).

2) Tout $\beta \in R$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha(\beta) \alpha.$$

On pose $\operatorname{Supp}(\beta) = \{\alpha \in \mid n_\alpha(\beta) \neq 0\}$; on l'appelle le **support** de β.

Soit R un système de racines ; notons $C_1, \dots, C_n$ les composantes connexes de $C(R)$.

Proposition 23.6. — *Posons* $R_i = \{\beta \in R \mid \operatorname{Supp}(\beta) \subseteq C_i\}$*, pour* $i = 1, \dots, n$*. Alors chaque* R_i *est un système de racines irréductible, dont le graphe de Coxeter est* C_i*, et* R *est la réunion disjointe orthogonale des* R_i *:*

$$R = R_1 \overset{\perp}{\sqcup} \cdots \overset{\perp}{\sqcup} R_n$$

(c.-à-d., $(\alpha, \beta) = 0$ *si* $\alpha \in R_i$*,* $\beta \in R_j$*, et* $i \neq j$*). De plus, cette décomposition vérifie la propriété suivante : si*

$$R = R'_1 \overset{\perp}{\sqcup} \cdots \overset{\perp}{\sqcup} R'_m$$

est une partition de R *en sous-ensembles deux-à-deux orthogonaux, alors chaque* R'_j *est la réunion des* R_i *qu'il contient. En particulier, si les* R'_j *sont irréductibles, alors* $m = n$ *et il existe une permutation* $\sigma \in S_n$ *telle que* $R'_i = R_{\sigma(i)}$ *pour* $i = 1, \dots, n$*.*

Par conséquent, les R_i *sont uniquement déterminés. On les appelle les* **composantes irréductibles** *de* R*. En particulier,* R *est irréductible si et seulement si* $C(R)$ *est connexe.*

Remarque 23.7. — Il résulte de la proposition précédente que, pour tout $\beta \in R$, son support est contenu dans une unique composante connexe de $C(R)$.

23.5. Commutateurs et parties closes. —

Lemme 23.8. — *Soient $\alpha, \beta \in R$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$. Il existe $w \in W$ tel que $w\alpha \in R^+$ et $w\beta \in R^+$.*

Démonstration. — Comme W agit transitivement sur les bases et toute racine appartient à une base, on peut supposer que $\alpha \in \Delta$. Si $\beta \in R^+$ alors $w = \mathrm{id}$ convient. Sinon, on a $s_\alpha\alpha = -\alpha$ et $s_\alpha\beta \in R^-$ (car $\beta \neq -\alpha$) et alors $w_0 s_\alpha$ convient, où w_0 désigne l'unique élément de W tel que $w_0 R^+ = R^-$. □

Proposition 23.9. — *Soient $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \pm\beta$. Il existe des $c_{i,j} \in k$ tels que*

$$(\theta_\alpha(x), \theta_\beta(y)) = \prod_{\substack{i,j \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ i\alpha + j\beta \in R}} \theta_{i\alpha+j\beta}(c_{i,j} x^i y^j), \qquad \forall\, x, y \in k.$$

En particulier, U_α et U_β commutent si α et β ne sont pas dans la même composante irréductible de R.

Démonstration. — En utilisant le lemme précédent, on se ramène au cas où $\alpha, \beta \in R^+$. Alors, puisque $U \cong \prod_{\gamma \in R^+} U_\gamma$ (le produit étant pris dans un ordre fixé arbitraire), il existe des polynômes $P_\gamma \in k[X, Y]$, uniquement déterminés, tels que, pour tout $x, y \in k$,

$$(*) \qquad (\theta_\alpha(x), \theta_\beta(y)) = \prod_{\gamma \in R^+} \theta_\gamma(P_\gamma(x, y)).$$

Puisque $(\theta_\alpha(0), \theta_\beta(y)) = e = (\theta_\alpha(x), \theta_\beta(0))$, alors chaque P_γ est de degré ≥ 1 en X et en Y.

Fixons γ et posons $P_\gamma = \sum_{i,j\geq 1} c_{\gamma,i,j} X^i Y^j$. Conjugant $(*)$ par un élément arbitraire $t \in T$, on obtient que

$$\gamma(t) P_\gamma(x, y) = P_\gamma(\alpha(t)x, \beta(t)y) = \sum_{i,j \geq 1} c_{\gamma,i,j} (i\alpha + j\beta)(t)\, X^i Y^j,$$

On en déduit que P_γ est la somme des $c_{\gamma,i,j} X^i Y^j$, pour les i, j tels que $i\alpha + j\beta = \gamma$. De plus, puisque $\mathbb{Q}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$ et que $\beta \neq \pm\alpha$, on obtient que s'il existe $i, j \geq 1$ tels que $i\alpha + j\beta = \gamma$, alors le couple (i, j) est unique et l'on a

$$P_\gamma = c_{i,j} X^i Y^j, \qquad \text{où } c_{i,j} = c_{i\alpha+j\beta,i,j}.$$

Sinon, on a $P_\gamma = 0$. Ceci prouve la première assertion.

De plus, si α et β ne sont pas dans la même composante irréductible de R, alors aucun $i\alpha + j\beta$ ne peut être une racine, puisque le support d'une racine est contenu dans une composante connexe de $C(R)$. Par conséquent, U_α et U_β commutent dans ce cas. La proposition est démontrée. □

Définition 23.10. — On dit qu'une partie Γ de R est **close** si elle vérifie la propriété suivante : si $\alpha, \beta \in \Gamma$ et $\alpha + \beta \in R$, alors $\alpha + \beta \in \Gamma$.

Le corollaire suivant découle alors de la proposition.

Corollaire 23.11. — *Soit* Γ *une partie close de* R^+. *Alors* $\prod_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ *est un sous-groupe fermé* T*-stable de* U, *noté* U_Γ (*le produit étant pris dans un ordre fixé arbitraire*).

Remarque 23.12. — En caractéristique nulle, tout groupe unipotent H est connexe. En effet, H/H^0 est unipotent et fini. Or, puisque $\mathrm{car}(k) = 0$, tout groupe fini est formé d'éléments semi-simples. Donc $H/H^0 = \{1\}$.

Par contre, si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors $\mathbb{G}_a = k$ contient les sous-groupes finis

$$\mathbb{G}_a(\mathbb{F}_{p^n}) = \{x \in k \mid x^{p^n} = x\}.$$

Revenant à G réductif, T un tore maximal, etc., on a de même les sous-groupes $U_\alpha(\mathbb{F}_{p^n})$; ils ne sont pas stables par T.

Toutefois, on peut montrer que tout sous-groupe fermé unipotent, non nécessairement connexe, de G est contenu dans un sous-groupe de Borel (voir [**Hu2**, Th. 30.4.b)]).

23.6. Composantes quasi-simples. —

Définition 23.13. — On dira qu'un groupe algébrique affine connexe est **quasi-simple** s'il est non commutatif et ne possède pas de sous-groupe fermé normal propre de dimension > 0. Dans ce cas, $\mathcal{D}(G) = G$ donc G n'est pas résoluble, d'où $\mathcal{R}(G) = \{1\}$, donc G est semi-simple.

Remarque 23.14. — Soit G quasi-simple. On va voir dans le théorème qui suit que le centre $Z(G)$ est fini et que tout sous-groupe fermé normal, distinct de G, est contenu dans $Z(G)$. Par conséquent, $G/Z(G)$ ne possède aucun sous-groupe normal fermé propre et distinct de $\{1\}$.

De plus, on peut montrer, en utilisant la théorie des systèmes de Tits, aussi appelés BN-paires, que $G/Z(G)$ est simple comme groupe abstrait, voir [**Hu2**, §29.5 Corollary].

Lemme 23.15. — *Soit* G *un groupe connexe réductif* (*resp. semi-simple*) *et soit* H *un sous-groupe fermé connexe normal. Alors* H *est réductif* (*resp. semi-simple*).

D'autre part, si T *est un tore maximal de* G, *alors* $(T \cap H)^0$ *est un tore maximal de* H.

Démonstration. — Soit R le radical unipotent (resp. le radical) de H. Il est stable par tout automorphisme de H, donc est normal dans G. Par conséquent, $R = \{1\}$. Ceci prouve la première assertion.

Soit T (resp. S) un tore maximal de G (resp. de H). Alors S est contenu dans un tore maximal $T' = g^{-1}Tg$ de G. Alors, comme H est normal, gSg^{-1}

est un tore maximal de H, qui est contenu dans, et donc égal à, $(T \cap H)^0$. Le lemme est démontré. □

Théorème 23.16. — *Soient G un groupe* **semi-simple** *connexe, T un tore maximal, $R = R(G,T)$, et soit*

$$R = R_1 \overset{\perp}{\sqcup} \cdots \overset{\perp}{\sqcup} R_n$$

la décomposition de R en composantes irréductibles. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit G_i le sous-groupe de G engendré par les U_α, avec $\alpha \in R_i$. C'est un sous-groupe fermé connexe. De plus :

a) *Si $i \neq j$, G_i et G_j commutent. Par conséquent, chaque G_i est normal dans G, et donc semi-simple, et l'on a*

$$G = G_1 \cdots G_n.$$

De plus, ceci est un produit « presque direct », c.-à-d., pour chaque i, $G_i \cap \prod_{j \neq i} G_j$ est **fini**.

b) *Pour toute partie I de $\{1, \ldots, n\}$, soit G_I le produit des G_i (resp. R_I la réunion des R_i), pour $i \in I$. Alors, pour tout $\alpha \in R$, on a*

$$(*_I) \qquad U_\alpha \subseteq G_I \Leftrightarrow \alpha \in R_I,$$

d'où

$$\mathrm{Lie}(G_I) = \mathrm{Lie}(T_I) \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où l'on a posé $T_I = (T \cap G_I)^0$, et R_I est le système de racines de G_I.

c) *Tout sous-groupe fermé connexe normal de G est le produit des G_i qu'il contient. De plus, chaque G_i est quasi-simple.*

Démonstration. — G est engendré par les U_α, donc aussi par $G_1, \ldots, G_n$. D'après la proposition 23.9, U_α commute à U_β si $\alpha \in R_i$ et $\beta \in R_j$, avec $j \neq i$. Donc chaque G_i est centralisé par les G_j, pour $j \neq i$ (et est évidemment normalisé par lui-même), donc est normal dans G, donc semi-simple, et l'on a

$$G = G_1 \cdots G_n.$$

Démontrons maintenant les assertions b) et c). Soit I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$, propre et non vide, et soit J son complémentaire. Soient R_I, R_J et G_I, G_J comme dans le théorème. Alors G_I est normal. Donc d'après le lemme précédent, G_I est semi-simple et $T_I := (T \cap G_I)^0$ en est un tore maximal. Soit $\alpha \in R$ tel que

$$U_\alpha \subseteq G_I.$$

Soit $\beta \in R_J$ arbitraire. Alors $\beta^\vee(\mathbb{G}_m)$ est contenu dans le sous-groupe engendré par U_β et $U_{-\beta}$, donc commute à G_I et donc à U_α. Donc, pour tout $x \in k$ et $z \in k^\times$, on a

$$1 = \alpha^\vee(z)\theta_\beta(x)\alpha^\vee(z^{-1})\theta_\beta(-x) = \theta_\beta((z^{\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} - 1)x),$$

et il en résulte que $(\alpha, \beta) = 0$. Ceci montre que α est orthogonal à R_J, donc n'appartient pas à R_J, d'où $\alpha \in R_I$. Ceci prouve $(*_I)$.

Alors, d'après la proposition 22.12, on a

$$\mathrm{Lie}(G_I) = \mathrm{Lie}(T_I) \oplus \bigoplus_{\alpha\in R_I} \mathfrak{g}_\alpha.$$

De plus, la restriction à T_I de chaque $\alpha \in R_I$ est non-triviale, puisque T_I contient $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$. Donc R_I est bien le système de racines de (G_I, T_I). Ceci prouve b).

Soit $H \neq G$ un sous-groupe fermé connexe normal, de dimension > 0. D'après le lemme précédent, H est semi-simple et $T_H := (T \cap H)^0$ en est un tore maximal, et $\dim T_H > 0$, d'après la remarque 18.17. Posons

$$R(H) = \{\alpha \in R \mid U_\alpha \subseteq H\}.$$

On va voir dans un instant que $R(H) \neq \emptyset$. D'abord, comme $H \neq G$ alors $R(H) \neq R$, d'après le théorème 23.1. Donc $R' := R \setminus R(H)$ est non-vide. Notons H' le sous-groupe de G engendré par les U_β, pour $\beta \in R'$. Il est fermé et connexe, d'après la proposition 10.1.

Pour tout $\beta \in R'$, $t \in T_H$, $x \in \mathbb{G}_a$, on a

$$t\theta_\beta(x)t^{-1}\theta_\beta(-x) = \theta_\beta((\beta(t) - 1)x),$$

et ceci est dans H puisque t et $\theta_\beta(x)t^{-1}\theta_\beta(-x)$ y sont. Comme $U_\beta \not\subseteq H$, on en déduit que

$$(1) \qquad \forall\beta \in R', \qquad \mathrm{Ker}\,\beta \supseteq T_H.$$

Par conséquent, tout poids non-nul de T_H dans $\mathrm{Lie}(G)$, et a fortiori dans $\mathrm{Lie}(H)$, est la restriction à T_H d'un $\alpha \in R(H)$. Comme H est semi-simple, ceci montre en particulier que $R(H) \neq \emptyset$.

De plus, pour tout $\alpha \in R(H)$, la restriction de α à T_H est non triviale, car sinon U_α appartiendrait au centralisateur de T_H dans H, dont on sait qu'il égale T_H puisque H est semi-simple.

On a donc obtenu que $R(H)$ et R' sont tous deux non-vides, et il résulte de (1) que pour tout $\alpha \in R(H)$ et $\beta \in R'$, on a :

$$\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 0 = (\beta, \alpha).$$

Par conséquent, $R = R(H) \overset{\perp}{\sqcup} R'$, et il résulte donc de la proposition 23.6, que $R(H)$ et R' sont chacun une réunion de composantes irréductibles de R. La première assertion de c) est démontrée.

Ceci a la conséquence suivante. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$, propre et non vide, et soit J son complémentaire. Appliquant $(*_I)$ à I et J, on obtient que la composante connexe de $G_I \cap G_J$ ne contient aucun U_α, donc est triviale. Ceci montre que $G_I \cap G_J$ est fini, et donc le produit $G = G_1 \cdots G_n$ est bien « presque direct ». Ceci achève la preuve de l'assertion a).

Enfin, soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et soit H un sous-groupe fermé connexe normal de G_i. Alors H est normal dans G (car G_j commute à G_i pour $j \neq i$), donc engendré par les G_j qu'il contient. Mais d'après l'assertion b), G_i ne contient aucun G_j avec $j \neq i$, et donc H égale $\{1\}$ ou G_i. Ceci montre que G_i est quasi-simple. Le théorème est démontré. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

1. Groupes algébriques affines et algèbres de Hopf ... 1
1. Groupes algébriques affines et représentations ... 1
2. Représentations des groupes algébriques affines ... 7
3. Action d'un groupe algébrique sur une variété ... 13
4. Premiers résultats sur les groupes linéaires : composante neutre, théorème de l'image fermée et lemme de l'orbite fermée ... 15

2. Algèbres de Lie et différentielles ... 23
5. Espaces tangents et différentielles ... 23
6. Algèbre de Lie d'un groupe algébrique ... 30

3. Décomposition de Jordan, groupes diagonalisables, unipotents, résolubles ... 41
7. Décomposition de Jordan ... 41
8. Caractères et groupes diagonalisables ... 47
9. Le couplage $X(T) \times X^{\vee}(T) \to \mathbb{Z}$ ... 53
10. Résolubilité et nilpotence ... 55
11. Théorèmes de Lie-Kolchin ... 58
12. Structure des groupes résolubles connexes ... 61

4. Différentielles, lissité, séparabilité, quotients G/H ... 69
13. Différentielles, lissité et séparabilité ... 69
14. Quotients G/H ... 89

5. Sous-groupes de Borel et variétés de drapeaux ... 99
15. Théorème du point fixe et sous-groupes de Borel ... 99
16. Géométrie de la variété des drapeaux ... 111
17. Sous-groupes de Cartan d'un groupe réductif, d'après Luna ... 119

6. Groupes réductifs et données radicielles ... 125

18. Groupes réductifs et semi-simples : un aperçu 125
19. Fibrés vectoriels et applications 132
20. Groupes réductifs : rang 1 et donnée radicielle 145
21. Décomposition de Bialynicki-Birula 154
22. Structure des groupes réductifs et semi-simples 159
23. Structure des groupes semi-simples 171

Bibliographie iii

BIBLIOGRAPHIE

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[BLie] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4 à 6, Masson, 1981.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Ho] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer Verlag, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Basic Algebra II, W.H. Freeman & Co, 1980.

[Jan] J. C. Jantzen, Representation of algebraic groups, Academic Press, 1987, second edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkäuser, 1985.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Laf] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Las] Y. Laszlo, Introduction à la géométrie algébrique, cours de M2 (2004-2006), disponible à l'adresse www.math.polytechnique.fr/~laszlo

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin Cummings publishing company, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 à l'Université Paris 6, disponible à l'adresse www.math.jussieu.fr/~polo

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.