Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologie
Mention Mathématiques et Applications

M2 Algèbre et Géométrie 2007-2008
Introduction aux groupes et algèbres de Lie

Patrick Polo

I. ALGÈBRES DE LIE ET REPRÉSENTATIONS, LE CAS DE $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

SÉANCES DU 25 ET 27/9

1. Algèbres de Lie et représentations

1.1. Algèbres de Lie. — [1] On fixe un corps de base k, pour le moment arbitraire. Une fois les généralités posées, on se placera dans le cas où k est de caractéristique nulle, par exemple, $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, pour certains résultats (existence de valeurs propres), on aura besoin de supposer k *algébriquement clos*, et donc dans ce cas on prendra $k = \mathbb{C}$.

Définition 1.1. — Une k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application k-blinéaire

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (x, y) \mapsto [x, y],$$

appelée le *crochet de Lie*, vérifiant les deux conditions suivantes :

1) Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a $[x, x] = 0$, c.-à-d., le crochet est **alterné**, et donc **antisymétrique** :

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \qquad [y, x] = -[x, y].$$

(Ceci découle de $0 = [x + y, x + y]$.)

Le crochet vérifie la **relation de Jacobi** : pour $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Noter que dans cette formule les crochets ne bougent pas, et ce sont les lettres x, y, z qui sont permutées de façon circulaire.

Évidemment, une **sous-algèbre de Lie** de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace $\mathfrak{h}$ qui est stable par le crochet, c.-à-d., qui vérifie $[x, y] \in \mathfrak{h}$ pour tout $x, y \in \mathfrak{h}$.

---

[1] version du 10 octobre, avec corrections dans la preuve du théorème 1.48.

Notation 1.2. — Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on note $\operatorname{ad} x$ ou $\operatorname{ad}(x)$ l'application k-linéaire $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $y \mapsto (\operatorname{ad} x)(y) = [x, y]$.

Une autre façon de formuler (et de retenir) la relation de Jacobi est la suivante.

***Définition 1.3* (Dérivations)**. — Soit V un k-espace vectoriel muni d'une loi de composition k-bilinéaire

$$\mu : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad (u, v) \mapsto \mu(u, v).$$

Une **dérivation** de (V, μ) (ou simplement de V, si la loi μ est sous-entendue), est un élément $\mathrm{D} \in \operatorname{End}_k(\mathrm{V})$ vérifiant la « règle de Leibniz », c.-à-d.,

$$\forall\, u, v \in \mathrm{V}, \qquad \mathrm{D}(\mu(u, v)) = \mu(\mathrm{D}(u), v) + \mu(u, \mathrm{D}(v)).$$

Si l'on écrit simplement $u \cdot v$ au lieu de $\mu(u, v)$, la formule se récrit :

$$\mathrm{D}(u \cdot v) = \mathrm{D}(u) \cdot v + u \cdot \mathrm{D}(v).$$

Attention ! La « multiplication » n'est pas supposée commutative ni même associative, donc attention, on ne modifie pas l'ordre des facteurs.

***Définition 1.4* (Jacobi et dérivations)**. — On voit facilement que la condition de Jacobi équivaut à dire que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} x$ est une **dérivation** de $\mathfrak{g}$, c.-à-d.,

$$\forall\, y, z \in \mathfrak{g}, \qquad (\operatorname{ad} x)([y, z]) = [(\operatorname{ad} x)(y), z] + [y, (\operatorname{ad} x)(z)].$$

***Exemple 1.5* (Algèbres associatives)**. — Soit A une k-algèbre associative. Alors, A est une algèbre de Lie pour le crochet égal au commutateur :

$$\forall\, a, b \in \mathrm{A}, \qquad [a, b] := ab - ba.$$

On a bien $[a, a] = 0$ et $[b, a] = -[a, b]$, et l'on vérifie facilement la relation de Jacobi par un calcul direct. On notera $\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$ l'algèbre de Lie ainsi obtenue.

De plus, pour tout $a \in \mathrm{A}$, $\operatorname{ad} a$ est une dérivation de A pour la *multiplication* : en effet,

$$[a, bc] = a(bc) - (bc)a = abc - bac + bac - bca = [a, b]c + b[a, c].$$

Donc, *a fortiori*, $\operatorname{ad} a$ est une dérivation du crochet commutateur, puisque

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] = [a, bc] - [a, cb] &= [a, b]c + b[a, c] - [a, c]b - c[a, b] \\ &= [[a, b], c] + [b, [a, c]]. \end{aligned}$$

Ceci fournit une autre vérification de l'identité de Jacobi (qui apporte l'information plus précise que $\operatorname{ad} a$ est une dérivation du produit).

***Exemple 1.6* (Algèbres d'endomorphismes)**. — Un cas particulier important est le suivant. Soit V un k-espace vectoriel et soit $\mathscr{A} = \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ l'algèbre des endomorphismes de V. C'est une algèbre de Lie pour le crochet :

$$[u, v] = uv - vu.$$

On la note souvent $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. Si V est de dimension finie n, alors $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ s'identifie à l'algèbre des matrices $\mathrm{M}_n(k)$, et l'algèbre de Lie $\mathrm{M}_n(k)_{\mathrm{Lie}}$ est notée $\mathfrak{gl}_n(k)$ (ou simplement $\mathfrak{gl}_n$ si k est sous-entendu).

Exemple 1.7. — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Alors

$$\mathfrak{sl}_n(k) := \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(k) \mid \mathrm{Tr}\,\mathrm{A} = 0\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(k)$, car on a

$$\mathrm{Tr}([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = \mathrm{Tr}(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{AB}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{BA}) = 0$$

pour tout A, B dans $\mathfrak{gl}_n(k)$, donc *a fortiori* pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{sl}_n(k)$.

***Définition 1.8* (Morphismes)**. — Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux k-algèbres de Lie. Un morphisme d'algèbres de Lie est une application k-linéaire $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ qui préserve les crochets de Lie, c.-à-d., qui vérifie :

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \qquad \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)].$$

***Définition 1.9* (Idéaux et quotients)**. — Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. Un sous-espace I de $\mathfrak{g}$ est un **idéal** de $\mathfrak{g}$ s'il est stable par l'action adjointe de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., s'il vérifie :

$$\forall\, x \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{I} \supseteq (\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{I}) = [x, \mathrm{I}];$$

soit en abrégé : $[\mathfrak{g}, \mathrm{I}] \subseteq \mathrm{I}$.

Dans ce cas, l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathrm{I}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie définie par :

$$[x + \mathrm{I}, y + \mathrm{I}] = [x, y] + \mathrm{I},$$

et la projection canonique $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{I}$ est un morphisme d'algèbres de Lie (vérifications laissées au lecteur).

Exemple 1.10. — $\mathfrak{sl}_n(k)$ est un idéal de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(k)$, puisque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{sl}_n(k)$.

Proposition 1.11. — *Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morphisme d'algèbres de Lie. Il est clair que* $\mathrm{Ker}\,\phi$ *est un idéal de $\mathfrak{g}$. D'autre part,* $\mathrm{Im}(\phi) = \phi(\mathfrak{g})$ *est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$, et l'on a un isomorphisme d'algèbres de Lie :*

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathrm{Ker}\,\phi} \xrightarrow{\sim} \phi(\mathfrak{g}).$$

Pour la suite, on convient que « k-algèbre » signifie « k-algèbre associative ».

Remarque 1.12. — Soit A une k-algèbre. Alors A est commutative si et seulement si le crochet commutateur est nul.

Définition 1.13. — On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est **abélienne** si le crochet $[\ ,\ ]$ est identiquement nul, c.-à-d., si $[x, y] = 0$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

1.2. Représentations. —

Définition 1.14. — Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. Une **représentation** de $\mathfrak{g}$ dans un k-espace vectoriel V est une application k-linéaire $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ qui vérifie :

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \qquad \rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = [\rho(x), \rho(y)],$$

c.-à-d., ρ est un *morphisme d'algèbres de Lie* de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$.

Dans ce cas, on dit aussi que V est un **$\mathfrak{g}$-module**, et on note simplement $x \cdot v$ ou même xv au lieu de $\rho(x)v$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathrm{V}$.

Un **sous-module** de V est un sous-espace vectoriel W qui est stable par l'action de $\mathfrak{g}$, c.-à-d. : $x \cdot w \in \mathrm{W}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $w \in \mathrm{W}$ (dans ce cas, on dit aussi que W est une sous-représentation de V). Alors, l'espace vectoriel quotient V/W est muni d'une structure de **$\mathfrak{g}$-module quotient**, définie par $x \cdot (v + \mathrm{W}) = (x \cdot v) + \mathrm{W}$.

Définition 1.15. — Soient V, V' des $\mathfrak{g}$-modules. Une application linéaire $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules, ou simplement un **$\mathfrak{g}$-morphisme**, si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathrm{V}$, l'on a

$$x \cdot \phi(v) = \phi(x \cdot v).$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ l'ensemble de ces morphismes.

***Proposition 1.16* (Représentation adjointe)**. — *On note* ad *l'application* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *définie par :*

$$(\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y], \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

C'est un morphisme d'algèbres de Lie, de sorte qu'on obtient une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, appelée la représentation adjointe. Un sous-$\mathfrak{g}$-module de $\mathfrak{g}$ n'est autre qu'un idéal de $\mathfrak{g}$.

Le noyau de ad *est le* **centre de $\mathfrak{g}$**, *noté $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$:*

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall\, y \in \mathfrak{g},\ [x, y] = 0\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

et l'on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \operatorname{ad}\mathfrak{g},$$

où $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *est la sous-algèbre de* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *image de* ad.

Démonstration. — Montrons que ad est bien une représentation, c.-à-d., que

$$\operatorname{ad}[x,y] = \operatorname{ad}(x)\circ\operatorname{ad}(y) - \operatorname{ad}(y)\circ\operatorname{ad}(x).$$

Ceci résulte résulte de l'identité de Jacobi (et lui est en fait équivalent), car pour tout $z \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\begin{aligned}&(\operatorname{ad}[x,y] - \operatorname{ad}(x)\circ\operatorname{ad}(y) + \operatorname{ad}(y)\circ\operatorname{ad}(x))\,(z) = \\ &\qquad [[x,y],z] - [x,[y,z]] + [y,[x,z]] = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0.\end{aligned}$$

Le reste de la proposition est clair. □

***Définition 1.17* (Module dual).** — Soit V un $\mathfrak{g}$-module. L'espace vectoriel dual

$$\mathrm{V}^* = \operatorname{Hom}_k(\mathrm{V}, k)$$

est un $\mathfrak{g}$-module, pour l'action suivante : pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathrm{V}^*$, $x \cdot \lambda$ est défini par

$$(*) \qquad \forall\, v \in \mathrm{V}, \qquad (x\cdot\lambda)(v) = -\lambda(x\cdot v).$$

Noter le signe $-$, qui est nécessaire pour que ceci fasse de V^* un $\mathfrak{g}$-module.

En termes de représentations, si $\rho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}_k(\mathrm{V})$ est la représentation donnée, et si on note $\rho^* : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}_k(\mathrm{V}^*)$ la représentation qu'on vient de définir, on voit que :

$$\forall\, x \in \mathfrak{g}, \qquad \rho^*(x) = -{}^t\rho(x),$$

où ${}^t\rho(x)$ désigne la transposée de $\rho(x)$.

Démonstration. — Soient $x, y \in \mathfrak{g}$. On vérifie que :

$$\begin{aligned}(x\cdot(y\cdot\lambda) - y\cdot(x\cdot\lambda))\,(v) &= (y\cdot\lambda)(-x\cdot v) - (x\cdot\lambda)(-y\cdot v)\\ &= \lambda(y\cdot x\cdot v) - \lambda(x\cdot y\cdot v)\\ &= \lambda([y,x]\cdot v)\\ &= -\lambda([x,y]\cdot v) = ([x,y]\cdot\lambda)(v)\end{aligned}$$

□

Donnons des exemples de $\mathfrak{g}$-modules.

***Exemple 1.18* (Modules triviaux et invariants).** — $\mathrm{V} = k$ avec *action triviale* de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., $x \cdot v = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et $v \in \mathrm{V}$ (i.e. $\rho = 0$), est un $\mathfrak{g}$-module, appelé le module trivial (de dimension 1).

Plus généralement, si V est un k-espace vectoriel de dimension arbitraire avec action triviale de $\mathfrak{g}$ (c.-à-d., à nouveau, $x \cdot v = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et $v \in \mathrm{V}$), on dit que V est un $\mathfrak{g}$-module trivial. Prenant une base de V, on voit que V est une somme directe de copies du module trivial k.

Maintenant, soit V un $\mathfrak{g}$-module arbitraire. Alors, le **sous-espace des invariants** :

$$\mathrm{V}^{\mathfrak{g}} = \{v \in \mathrm{V} \mid x \cdot v = 0, \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}\}$$

est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V, éventuellement nul, avec action triviale de $\mathfrak{g}$.

***Exemple 1.19*.** — $\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}}$ est le **centre** de $\mathfrak{g}$, noté $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. On a déjà vu que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim}$ $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

***Définition 1.20* (Restriction des scalaires).** — Soit $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ un morphisme d'algèbres de Lie et soit V un $\mathfrak{g}$-module. Alors V est, par « restriction à $\mathfrak{h}$ », un $\mathfrak{h}$-module via ϕ :

$$x \cdot v = \phi(x) \cdot v, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{h},\ v \in \mathrm{V}.$$

Si l'on introduit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, alors la structure de $\mathfrak{h}$-module correspond à $\rho \circ \phi$.

***Exemple 1.21*.** — Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors, par restriction, $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{h}$-module, et $\mathfrak{h}$ en est un sous-module. Par conséquent, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est un $\mathfrak{h}$-module.

***Exemple 1.22*.** — Soient A une k-algèbre associative, M un A-module, et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$. Alors M est, par restriction, un $\mathfrak{g}$-module (vérification laissée au lecteur).

***Exemple 1.23* (Représentation naturelle de $\mathfrak{sl}_n$).** — L'inclusion $\mathfrak{sl}_n \hookrightarrow \mathrm{M}_n(k)$ est un morphisme d'algèbres de Lie et fait de k^n un $\mathfrak{sl}_n$-module, appelé la *représentation naturelle* de $\mathfrak{sl}_n$. (C'est aussi un cas particulier de l'exemple précédent, appliqué à $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(k)$ et $\mathrm{M} = k^n$).

***Exemple 1.24*.** — Soit $\mathfrak{g} = k\mathrm{X}$ de dimension 1, donc nécessairement abélienne (car $[\mathrm{X}, \mathrm{X}] = 0$). Soit V un k-espace vectoriel. Se donner sur V une structure de $\mathfrak{g}$-module $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ est la même chose que se donner un endomorphisme $u = \rho(\mathrm{X}) \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, et ceci est la même chose que se donner sur V une structure de module sur l'anneau de polynômes $k[\mathrm{X}]$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(k)$ a pour base les éléments suivants :

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{21}$$
$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{11} - \mathrm{E}_{22}$$
$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{12}$$

(où E_{ij} désigne la matrice « élémentaire » dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1), et les crochets dans $\mathfrak{sl}_2$ sont donnés par :

$$[\mathrm{E}, \mathrm{F}] = \mathrm{E}_{11} - \mathrm{E}_{22} = \mathrm{H},$$
$$[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = \mathrm{HE} - \mathrm{EH} = 2\mathrm{E},$$
$$[\mathrm{H}, \mathrm{F}] = \mathrm{HF} - \mathrm{FH} = -2\mathrm{F}.$$

On va étudier en détail plus bas les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(k)$, lorsque $\mathrm{car}(k) = 0$; pour cela il est utile de représenter $\mathfrak{sl}_2$ par des dérivations de l'anneau de polynômes $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

1.3. Dérivations et opérateurs différentiels. — Soit A une k-algèbre commutative, par exemple un anneau de polynômes $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. On rappelle qu'une **dérivation** de A est une application k-linéaire $\mathrm{D} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ qui vérifie la règle de Leibniz :

$$\forall\, a, b \in \mathrm{A}, \qquad \mathrm{D}(ab) = \mathrm{D}(a)b + a\mathrm{D}(b).$$

On voit facilement que les dérivations de A forment un sous-espace vectoriel, noté $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$. D'autre part, pour tout $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$, l'égalité $\mathrm{D}(1) = \mathrm{D}(1 \cdot 1) = \mathrm{D}(1) + \mathrm{D}(1)$ donne $\mathrm{D}(1) = 0$.

Proposition 1.25. — $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$.

Démonstration. — Soient $\mathrm{D}, \mathrm{D}' \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ et soient $a, b \in \mathrm{A}$. Alors :

$$\mathrm{DD}'(ab) = \mathrm{D}(\mathrm{D}'(a)b + a\mathrm{D}'(b)) = \mathrm{DD}'(a)b + \mathrm{D}'(a)\mathrm{D}(b) + \mathrm{D}(a)\mathrm{D}'(b) + a\mathrm{DD}'(b).$$

On voit que les termes du milieu sont symétriques en D et D′, donc lorsqu'on retranche $\mathrm{D}'\mathrm{D}(ab)$ on obtient :

$$(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(ab) = (\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(a)b + a(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(b).$$

Ceci montre que $[\mathrm{D}, \mathrm{D}'] = \mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D}$ est une dérivation de A. □

Remarquons que l'action de A sur lui-même par multiplication permet d'identifier A à un sous-anneau de $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$, c.-à-d., on identifie $a \in \mathrm{A}$ et l'opérateur de multiplication $\mu_a : b \mapsto ab$. Par cette identification, 1_A est identifié à $\mu_1 = \mathrm{id}_\mathrm{A}$.

Notons $\mathscr{D}_1(\mathrm{A})$ le sous-espace $\mathrm{A}+\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ de $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$. La somme est directe, car tout $u \in \mathscr{D}_1(\mathrm{A})$ s'écrit de façon unique

$$u = \mu_a + \mathrm{D},$$

où $a = u(1)$ et $\mathrm{D} = u - \mu_a$. Pour tout $a \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$, on a :

$$(\dagger) \qquad [\mathrm{D}, \mu_a] = \mu_{\mathrm{D}(a)}.$$

En effet, pour tout $b \in \mathrm{A}$,

$$(\mathrm{D}\mu_a - \mu_a\mathrm{D})(b) = \mathrm{D}(ab) - a\mathrm{D}(b) = \mathrm{D}(a)b.$$

Donc, avec l'identification $a = \mu_a$, (†) se récrit

$$(\ddagger) \qquad [\mathrm{D}, a] = \mathrm{D}(a).$$

On a ainsi obtenu la proposition suivante.

Proposition 1.26. — *$\mathscr{D}_1(\mathrm{A})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$ et c'est le* produit semi-direct *de A et $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$, c.-à-d.,*

$$\mathscr{D}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \bigoplus \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$$

et A est un idéal de $\mathscr{D}_1(\mathrm{A})$.

Remarque 1.27. — 1) Si $a \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$, on voit facilement que $a\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$, donc $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ est aussi un A-module (à gauche).

2) Attention ! La structure de k-algèbre de Lie sur $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ n'est pas A-bilinéaire, puisque $[\mathrm{D}, a] = \mathrm{D}(a)$.

Considérons maintenant l'algèbre de polynômes $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$.

Proposition 1.28. — *L'application $\phi : \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]) \to k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]^{\oplus n}$,*

$$\mathrm{D} \mapsto (\mathrm{D}(\mathrm{X}_1), \dots, \mathrm{D}(\mathrm{X}_n))$$

est un isomorphisme de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$-modules. Par conséquent, les dérivations $\partial_i := \partial/\partial\mathrm{X}_i$, pour $i = 1, \dots, n$, forment une base du $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$-module $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$; c.-à-d., toute dérivation D de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$ s'écrit de façon unique

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}_1\partial_1 + \cdots + \mathrm{P}_n\partial_n,$$

avec $\mathrm{P}_i \in k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. Il est clair que ϕ est un morphisme de A-modules.

Il résulte de la règle de Leibniz $\mathrm{D}(ab) = \mathrm{D}(a)b + a\mathrm{D}(b)$ que toute dérivation de A est déterminée par ses valeurs sur les générateurs $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$. Par conséquent, le morphisme ϕ est injectif.

Réciproquement, pour tout $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n \in \mathrm{A}$, on voit facilement que $\mathrm{D} = \sum_{i_1}^{n} \mathrm{P}_i \partial_i$ est une dérivation, telle que $\mathrm{D}(\mathrm{X}_i) = \mathrm{P}_i$. Ceci montre que ϕ est surjectif, donc un isomorphisme. La proposition est démontrée. □

Désormais, on suppose k de caractéristique nulle, et on le note $\mathbb{K}$. Par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.29. — Soit $\mathrm{A} = \mathbb{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. L'anneau $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ des opérateurs différentiels de A est le sous-anneau de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{A})$ engendré par A et $\mathrm{Dér}_{\mathbb{K}}(\mathrm{A})$, c.-à-d., par les X_i et les ∂_i :

$$\mathrm{A}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \partial_1, \ldots, \partial_n] \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]).$$

On a les relations de commutation : $[\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j] = 0 = [\partial_i, \partial_j]$ et

$$[\partial_i, \mathrm{X}_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i, \end{cases}$$

en se rappelant que (la multiplication par) 1 est l'application identique de A.

Les algèbres $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ s'appellent les algèbres de Weyl (sur $\mathbb{K}$).

On peut maintenant revenir, dans les paragraphe suivants, aux représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

1.4. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. — Considérons la représentation naturelle $\mathbb{K}^2$ de $\mathfrak{sl}_2$. Soit (e_1, e_2) la base standard de $\mathbb{K}^2$. On a :

$$\begin{tikzcd} e_1 \arrow[d, shift right, "\mathrm{F}"'] \\ e_2 \arrow[u, shift right, "\mathrm{E}"'] \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{H}e_1 = e_1$, $\mathrm{H}e_2 = -e_2$.

Considérons la base duale (e_1^*, e_2^*). Par définition du module dual, l'on a :

$$(\mathrm{E} \cdot e_1^*)(\alpha e_1 + \beta e_2) = -e_1^*(\mathrm{E} \cdot (\alpha e_1 + \beta e_2)) = -\beta,$$

d'où $\mathrm{E} \cdot e_1^* = -e_2^*$. On obtient de même : $\mathrm{F} \cdot e_2^* = -e_1^*$ et $\mathrm{H} \cdot e_1^* = -e_1^*$, $\mathrm{H} \cdot e_2^* = e_2^*$.

Posons $\mathrm{Y} = -e_2^*$ et $\mathrm{X} = e_1^*$. Alors $\mathrm{H} \cdot \mathrm{Y} = \mathrm{Y}$, $\mathrm{H} \cdot \mathrm{X} = -\mathrm{X}$ et

$$\begin{array}{c} \mathrm{Y} \\ {\scriptstyle \mathrm{F}}\big\downarrow \quad \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{E}} \\ \mathrm{X} \end{array}$$

Considérons l'anneau gradué

$$\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_n,$$

où $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_n$ désigne l'espace des polynômes homogènes de degré n : il a pour base les monômes :

$$\mathrm{Y}^n, \mathrm{Y}^{n-1}\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{Y}^{n-i}\mathrm{X}^i, \ldots, \mathrm{X}^n$$

et est de dimension $n+1$. Considérons l'algèbre de Weyl

$$\mathrm{A}_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y},\partial_\mathrm{X},\partial_\mathrm{Y}] \subset \mathrm{End}_\mathbb{K}(\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]).$$

Proposition 1.30. — *L'application linéaire $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \to \mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\rho(\mathrm{E}) = \mathrm{Y}\partial_\mathrm{X}, \qquad \rho(\mathrm{F}) = \mathrm{X}\partial_\mathrm{Y}, \qquad \rho(\mathrm{H}) = \mathrm{Y}\partial_\mathrm{Y} - \mathrm{X}\partial_\mathrm{X}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, et définit donc une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$. De plus, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ agit par dérivations *de l'algèbre $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$, c.-à-d., pour tout $\xi \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$, on a*

$$\xi \cdot (\mathrm{PQ}) = (\xi \cdot \mathrm{P})\mathrm{Q} + \mathrm{P}(\xi \cdot \mathrm{Q}).$$

Démonstration. — Il faut vérifier que

$$[\rho(\mathrm{E}),\rho(\mathrm{F})] = \rho([\mathrm{E},\mathrm{F}]) = \rho(\mathrm{H}), \tag{1}$$

$$[\rho(\mathrm{H}),\rho(\mathrm{E})] = \rho([\mathrm{H},\mathrm{E}]) = 2\rho(\mathrm{E}), \tag{2}$$

$$[\rho(\mathrm{H}),\rho(\mathrm{F})] = \rho([\mathrm{H},\mathrm{F}]) = -2\rho(\mathrm{F}). \tag{3}$$

Or

$$\begin{aligned}[]
[\mathrm{Y}\partial_\mathrm{X},\mathrm{X}\partial_\mathrm{Y}] &= [\mathrm{Y}\partial_\mathrm{X},\mathrm{X}]\partial_\mathrm{Y} + \mathrm{X}[\mathrm{Y}\partial_\mathrm{X},\partial_\mathrm{Y}] \\
&= \mathrm{Y}\partial_\mathrm{Y} - \mathrm{X}\partial_\mathrm{X},
\end{aligned}$$

où, pour la 2ème égalité, on a utilisé les relations :

$$[\mathrm{Y},\mathrm{X}] = 0 = [\partial_\mathrm{X},\partial_\mathrm{Y}], \qquad [\partial_\mathrm{X},\mathrm{X}] = 1 = -[\mathrm{Y},\partial_\mathrm{Y}].$$

Ceci montre l'égalité (1). On vérifie de même les égalités (2) et (3).

Enfin, ρ envoie E,F et H sur des dérivations de $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ donc, par linéarité, on a $\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})) \subset \mathrm{Dér}_\mathbb{K}(\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}])$. Ceci prouve la dernière assertion. □

De plus, $\mathbb{K}[X, Y]$ est un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module *gradué* : comme les endomorphismes $\rho(E)$, $\rho(F)$, $\rho(H)$ préservent le degré, chaque sous-espace $\mathbb{K}[X, Y]_n$ est un sous-$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module. On a donc obtenu le corollaire suivant.

Corollaire 1.31. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}[X, Y]_n$ est un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module de dimension $n + 1$.*

Définition 1.32. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie. Un $\mathfrak{g}$-module V est dit **simple** (ou, de façon équivalente, **irréductible**), si $V \neq (0)$ et si V n'a pas de sous-module autre que (0) et V.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $V(n) = \mathbb{K}[X, Y]_n$. Pour $i = 0, \ldots, n$, posons $v_i = Y^{n-i}X^i$. Alors $(v_0, \ldots, v_n)$ est une base de $V(n)$ formée de vecteurs propres de $\rho(H) = Y\partial_Y - X\partial_X$:

$$H \cdot v_i = (n - 2i)v_i,$$

et, puisque $\rho(F) = X\partial_Y$ et $\rho(E) = Y\partial_X$, l'on a :

$$(*) \qquad F \cdot v_i = (n - i)v_{i+1}, \qquad E \cdot v_i = iv_{i-1},$$

avec la convention $v_{n+1} = 0 = v_{-1}$. Donc, notant $V(n)_i = \mathbb{K}v_i$ l'espace propre de H pour la valeur propre $\lambda_i := n - 2i$, on a :

$$V(n) = \bigoplus_{i=0}^{n} V(n)_i.$$

Lemme 1.33. — *Soit* W *un sous-espace* H*-stable de* $V(n)$*. Alors* W *est une somme directe d'espaces propres* $V(n)_i$*.*

Démonstration. — Soit w un élément non nul de W. Dans $V(n)$, on peut décomposer

$$w = v_{i_1} + \cdots + v_{i_r},$$

avec $r \geqslant 1$ et $v_{i_k} \in V(n)_{i_k} \setminus \{0\}$. Montrons, par récurrence sur r, que chaque v_{i_k} appartient à W. Il n'y a rien à montrer si $r = 1$, donc on peut supposer $r \geqslant 2$ et le résultat établi pour $r - 1$. Alors W contient

$$H \cdot w - \lambda_{i_r} w = \sum_{k=1}^{r-1} (\lambda_{i_k} - \lambda_{i_r}) v_{i_k}.$$

Donc, par hypothèse de récurrence W contient chaque v_{i_k}, pour $k < r$, et par suite W contient aussi v_{i_r}. Ceci prouve le lemme. $\square$

Proposition 1.34. — *Chaque* $V(n) = \mathbb{K}[X, Y]$ *est un* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$*-module simple.*

Démonstration. — Soit W un sous-module non nul de $\mathrm{V}(n)$. D'après le lemme précédent, W contient au moins l'un des $v_i = \mathrm{Y}^{n-i}\mathrm{X}^i$. Comme

$$\mathrm{E} \cdot v_i = i v_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} \cdot v_i = (n-i)v_{i+1},$$

et comme $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 0$, on obtient, par applications répétées de E ou F, que W contient tous les v_i, d'où $\mathrm{W} = \mathrm{V}(n)$. Ceci prouve la proposition. □

1.5. Algèbres enveloppantes. — Revenons dans ce paragraphe à un corps de base k arbitraire. Soit V un k-espace vectoriel. Rappelons que l'*algèbre tensorielle* de V est

$$\mathrm{T}(\mathrm{V}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{V}^{\otimes n},$$

où $\mathrm{V}^{\otimes 0} = k$, $\mathrm{V}^{\otimes n} = \mathrm{V} \otimes_k \cdots \otimes_k \mathrm{V}$ (n facteurs) ; le produit étant défini par :

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q.$$

***Théorème 1.35* (Propriété universelle de $\mathrm{T}(\mathrm{V})$).** — *Pour toute k-algèbre associative* B, *on a :*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}vect}(\mathrm{V}, \mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(\mathrm{T}(\mathrm{V}), \mathrm{B}),$$

c.-à-d., tout $\rho : \mathrm{V} \to \mathrm{B}$ se prolonge de façon unique en un morphisme de k-algèbres $\psi_\rho : \mathrm{T}(\mathrm{V}) \to \mathrm{B}$ tel que

$$\psi_\rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = \rho(v_1) \cdots \rho(v_p).$$

Prenons $\mathrm{V} = \mathfrak{g}$. Soit J l'idéal bilatère de $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

(Ici, $x \otimes y$ et $y \otimes x$ appartiennent à $\mathrm{T}^2(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, tandis que $[x, y] \in \mathrm{T}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.) Rappelons que J est l'ensemble de toutes les sommes *finies*

$$\sum_i a_i(x_i \otimes y_i - y_i \otimes x_i - [x_i, y_i])b_i,$$

où $x_i, y_i \in \mathfrak{g}$, $a_i, b_i \in \mathrm{T}(\mathfrak{g})$.

***Définition 1.36*.** — L'**algèbre enveloppante** $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre quotient

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}.$$

Notons π la projection $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et τ la composée de π avec l'inclusion $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathfrak{g})$. Alors, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est engendrée comme k-algèbre par $\tau(\mathfrak{g})$.

Si B est une k-algèbre associative arbitraire, on note $\mathrm{B}_{\mathrm{Lie}} = \mathrm{B}$ regardée comme algèbre de Lie via le crochet $[b, c] = bc - cb$.

***Théorème 1.37* (Propriété universelle de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$).** — *Pour toute k-algèbre associative* B, *on a :*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}Lie}(\mathfrak{g}, \mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{B}),$$

c.-à-d., tout morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{B}_{Lie}$ se prolonge de façon unique en un morphisme de k-algèbres $\phi_\rho : \phi(\mathfrak{g}) \to \mathrm{B}$ tel que

$$\phi_\rho(\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)) = \rho(x_1) \cdots \rho(x_p), \qquad \forall\, x_i \in \mathfrak{g}.$$

Démonstration. — D'abord, comme $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est engendrée comme k-algèbre par les $\pi(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, alors ϕ, s'il existe, est uniquement déterminé par la condition ci-dessus.

Montrons l'existence. D'après la propriété universelle de $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$, il existe un (unique) morphisme de k-algèbres $\psi_\rho : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{B}$ tel que

$$\psi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \rho(x_1) \cdots \rho(x_p), \quad \forall\, x_i \in \mathfrak{g}.$$

Il faut voir que ψ_ρ passe au quotient modulo J, c.-à-d., voir que

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \qquad \psi_\rho(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0.$$

Or,

$$\psi_\rho(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) - \rho([x, y]),$$

et ceci est nul puisque $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{B}_{\mathrm{Lie}}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Donc ψ_ρ se factorise en un morphisme de k-algèbres

$$\phi_\rho : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{B},$$

vérifiant la propriété requise, et unique d'après ce qui précède. Le théorème est démontré. □

Un cas particulier important est le suivant. Soit V un k-espace vectoriel. Appliquant le théorème à la k-algèbre $\mathrm{B} = \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, on obtient le théorème ci-dessous.

***Théorème 1.38* (Représentations de $\mathfrak{g}$ = $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-modules).** — *Soit* M *un k-espace vectoriel. Se donner une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans* M *équivaut à se donner une structure de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$*-module sur* M. *Par conséquent :*

« un $\mathfrak{g}$-module est la même chose qu'un $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$*-module ».*

Démonstration. — Se donner sur M une structure de $\mathfrak{g}$-module équivaut à se donner un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{M})$; d'après la propriété universelle de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, ceci équivaut à se donner un morphisme de k-algèbres $\phi_\rho : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_k(\mathrm{M})$, c.-à-d., une structure de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-module sur M. □

Exemple 1.39. — Si $\mathfrak{g}$ est **abélienne**, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est le quotient de $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$, pour $x, y \in \mathfrak{g}$; c'est donc l'**algèbre symétrique** $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Si $\dim_k \mathfrak{g} = n$ et si l'on choisit une base $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de $\mathfrak{g}$, alors $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$.

Le théorème précèdent est rendu particulièrement intéressant par le théorème suivant, qui montre que l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, bien que non commutative (sauf si $\mathfrak{g}$ est abélienne), est un objet assez maniable. (De façon informelle, on peut dire que c'est une « algèbre de polynômes non commutative ».) Pour simplifier, on suppose $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur k.

***Théorème 1.40* (Poincaré-Birkhoff-Witt)**. — *Soit $(x_1, \ldots, x_r)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur k. Alors les monômes « ordonnés » :*

$$x_1^{\nu_1} \cdots x_r^{\nu_r} \quad \textit{(pris dans cet ordre)} \quad \textit{pour } (\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{N}^r,$$

forment une base de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ sur k.

Par conséquent, si l'on a des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}^-$ de $\mathfrak{g}$ telles que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \mathfrak{n}^+ \qquad \textit{comme espaces vectoriels},$$

alors

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n}^+) \qquad \textit{comme espaces vectoriels.}$$

Démonstration. — Pour la démonstration « classique » (qui n'est pas très intéressante), on renvoie à [**BL1**, § 2.7] ou [**Dix**, 2.1.11]. Pour une démonstration différente, on peut consulter l'article assez récent [**Pe**]. □

Notation 1.41. — En particulier, l'application canonique $\tau : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est injective. Désormais, on ne mentionnera plus τ et l'on identifiera $\mathfrak{g}$ à son image dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Par exemple, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, on considérera les générateurs $\mathrm{F}, \mathrm{H}, \mathrm{E}$ indifféremment comme des éléments de $\mathfrak{sl}_2$ ou de $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$.

Lemme 1.42. — *Soit A un anneau. Pour tout $a \in \mathrm{A}$, l'endomorphisme*

$$\operatorname{ad} a : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad b \mapsto [a, b] = ab - ba,$$

est une dérivation de A, et vérifie :

$$(\operatorname{ad} a)(b_1 \cdots b_n) = \sum_{i=1}^{n} b_1 \cdots b_{i-1} [a, b_i] b_{i+1} \cdots b_n, \qquad \forall\, b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{A}.$$

Démonstration. — Immédiat, par récurrence sur n. □

1.6. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. — Revenons au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, et notons simplement $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Soit $(\mathrm{F}, \mathrm{H}, \mathrm{E})$ la base standard de $\mathfrak{sl}_2$.

Notons

$$\mathfrak{b} = \mathbb{K}\mathrm{H} \oplus \mathbb{K}\mathrm{E}, \qquad \mathfrak{b}^- = \mathbb{K}\mathrm{H} \oplus \mathbb{K}\mathrm{F};$$

ce sont deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2$, puisque $[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = 2\mathrm{E}$ et $[\mathrm{H}, \mathrm{F}] = -2\mathrm{F}$. On déduit du lemme 1.42 le lemme suivant.

Lemme 1.43. — *Dans* $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$ *et* $\mathrm{U}(\mathfrak{b}^-)$, *on a les relations de commutation suivantes :*

$$[\mathrm{H}, \mathrm{E}^n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}^{i-1}[\mathrm{H}, \mathrm{E}]\mathrm{E}^{n-i} = 2n\mathrm{E}^n, \tag{1}$$

$$[\mathrm{H}, \mathrm{F}^n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}^{i-1}[\mathrm{H}, \mathrm{F}]\mathrm{F}^{n-i} = -2n\mathrm{F}^n, \tag{2}$$

Corollaire 1.44. — *Soit* $\rho : \mathfrak{b} \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V})$ *une représentation* de dimension finie *de* $\mathfrak{b}$. *Alors* $\rho(\mathrm{E})$ *est nilpotent.*

De plus, $\mathrm{V}^{\mathrm{E}} := \{v \in \mathrm{V} \mid \mathrm{E} \cdot v = 0\} = \mathrm{Ker}\,\rho(\mathrm{E})$ *est non nul et* H-*stable.*

Démonstration. — Il résulte du lemme précédent que, pour tout $n \geqslant 1$, on a dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V})$ l'égalité

$$[\rho(\mathrm{H}), \rho(\mathrm{E})^n] = 2n\rho(\mathrm{E})^n.$$

Prenant la trace on obtient $2n\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}\,\rho(\mathrm{E})^n = 0$ d'où, puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$,

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}\,\rho(\mathrm{E})^n = 0, \qquad \forall\, n \geqslant 1.$$

Il est bien connu que ceci entraîne que $\rho(\mathrm{E})$ est nilpotent. Voici une démonstration élémentaire. Remplaçant V par

$$\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}},$$

où $\overline{\mathbb{K}}$ est une clotûre algébrique de $\mathbb{K}$, on se ramène au cas où $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. Il suffit alors de montrer que toutes les valeurs propres de $\rho(\mathrm{E})$ sont nulles. Raisonnant par l'absurde, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de $\rho(\mathrm{E})$, chacune étant de multiplicité $n_i \in \mathbb{N}^*$. Alors $(n_1, \dots, n_r)$ est une solution non nulle (puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$) du système linéaire :

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k = 0, \qquad k = 1, \dots, r,$$

dont le déterminant est

$$\lambda_1 \cdots \lambda_r \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Ceci est une contradiction. Donc la seule valeur propre de $\rho(\mathrm{E})$ est 0, et $\rho(\mathrm{E})$ est nilpotent.

Par conséquent, $\mathrm{V}^{\mathrm{E}} = \operatorname{Ker} \rho(\mathrm{E})$ est non nul. Montrons qu'il est H-stable. Soit $v \in \mathrm{V}^{\mathrm{E}}$. Comme $\mathrm{EH} = \mathrm{HE} + 2\mathrm{E}$, alors

$$\mathrm{EH}v = (\mathrm{H} + 2)\mathrm{E}v = 0,$$

et donc $\mathrm{H}v \in \mathrm{V}^{\mathrm{E}}$. □

Définition 1.45. — Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $\mathbb{K}_\lambda$ le $\mathfrak{b}$-module de dimension 1 sur lequel E agit par 0 et H par λ. (C'est bien un $\mathfrak{b}$-module !) Ces modules sont deux à deux non isomorphes.

Corollaire 1.46. — *On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Soit* V *un $\mathfrak{b}$-module simple de dimension finie. Alors* $\mathrm{V} \cong \mathbb{K}_\lambda$*, pour un unique* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. — D'après le corollaire précédent, V^{E} est un sous-$\mathfrak{b}$-module non nul, donc $\mathrm{V} = \mathrm{V}^{\mathrm{E}}$. Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \neq 0$ tels que $\mathrm{H}v = \lambda v$. Alors $\mathbb{K}v$ est un sous-module, isomorphe à $\mathbb{K}_\lambda$, et $\mathrm{V} = \mathbb{K}v$ puisque V est irréductible. □

Dans $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$, on a, d'après le lemme 1.43,

$$\mathrm{HF}^i = \mathrm{F}^i(\mathrm{H} - 2i), \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

d'où, puisque $[\mathrm{E}, \mathrm{F}] = \mathrm{H}$,

$$(3)\quad [\mathrm{E}, \mathrm{F}^n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}^{i-1}\mathrm{HF}^{n-i} = \mathrm{F}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{H} - 2(n-i)) = n\mathrm{F}^{n-1}(\mathrm{H} - n + 1).$$

Puisque $\operatorname{car}(\mathbb{K}) = 0$, on peut introduire dans $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$ les éléments suivants, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{F}^{(i)} = \frac{\mathrm{F}^i}{i!}, \qquad \mathrm{E}^{(i)} = \frac{\mathrm{E}^i}{i!}.$$

Alors, la formule (3) se récrit :

$$(4)\qquad \mathrm{EF}^{(n)} = \mathrm{F}^{(n)}\mathrm{E} + \mathrm{F}^{(n-1)}(\mathrm{H} - n + 1).$$

***Notation 1.47* (Vecteurs et espaces de poids)**. — Soient V un $\mathfrak{sl}_2$-module et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $v \in \mathrm{V}$ est un vecteur *de poids* λ si $v \neq 0$ et $\mathrm{H}v = \lambda v$. On pose

$$\mathrm{V}_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathrm{H} - \lambda)$$

et on l'appelle le sous-espace de poids λ.

Théorème 1.48. — *Soit* V *un* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$*-module de dimension finie. Alors* V *contient au moins un vecteur propre* $\neq 0$ *de* H *annulé par* E. *Si* v *est un tel vecteur, alors*

$$\mathrm{H}v = nv,$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$, *et le sous-module* W *engendré par* v *admet pour base les vecteurs* $\mathrm{F}^i v$, *pour* $i = 0, \ldots, n$, *et est isomorphe à* $\mathrm{V}(n) := \mathbb{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_n$.

En particulier, si V *est simple alors* V *est isomorphe à un module* $\mathrm{V}(n)$. *Ceux-ci sont deux à deux non-isomorphes, puisque* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{V}(n) = n + 1$.

Démonstration. — Soit V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module de dimension finie. D'après le corollaire 1.44, V^{E} est non nul et H-stable.

Soit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ et soient $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ et $v_0 \in \mathrm{V}^{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$, non nul, tels que

$$\mathrm{H}v_0 = \lambda v_0 \qquad (\text{et} \quad \mathrm{E}v_0 = 0).$$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{HF}^i v_0 = \mathrm{F}^i(\mathrm{H} - 2i)v_0 = (\lambda - 2i)\mathrm{F}^i v_0$$

et donc les $\mathrm{F}^i v_0$ non nuls sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{K}}$. Comme

$$\dim_{\overline{\mathbb{K}}} \mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{V} < \infty,$$

il existe donc un (unique) $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{F}^n v_0 \neq 0$ et $\mathrm{F}^{n+1} v_0 = 0$. Alors, en utilisant l'égalité (3) plus haut et $\mathrm{E}v_0 = 0$, on obtient

$$0 = \mathrm{EF}^{n+1} v_0 = (n+1)\mathrm{F}^n(\mathrm{H} - n)v_0 = (\lambda - n)(n+1)\mathrm{F}^n v_0.$$

Comme $(n+1)\mathrm{F}^n v_0 \neq 0$, il vient $\lambda = n$. Donc, H possède déjà dans V^{E} un vecteur propre $v_0 \neq 0$ pour la valeur propre n.

Soit W le sous-module engendré par v_0, c.-à-d.,

$$\mathrm{W} = \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)v_0 := \{\text{sommes finies } \sum_i u_i v_0 \mid u_i \in \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)\}.$$

Comme les monômes $\mathrm{F}^p\mathrm{H}^q\mathrm{E}^r$ forment une base de $\mathrm{U} := \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$ et comme

$$\mathrm{H}^q\mathrm{E}^r v_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geqslant 1, \\ n^q v_0 & \text{si } r = 0, \end{cases}$$

les vecteurs $\mathrm{F}^i v_0$ engendrent W. Comme chacun est de poids $n - 2i$, l'argument utilisé plus haut montre qu'il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $\mathrm{F}^k v_0 \neq 0$ et $\mathrm{F}^{k+1} v_0 = 0$, et que $k = n$. Par conséquent, les vecteurs

$$v_i := \mathrm{F}^{(i)} v_0 = \frac{\mathrm{F}^i}{i!} v_0, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

forment une $\mathbb{K}$-base de W, et l'on a :

$$\mathrm{F}v_i = (i+1)v_{i+1}, \qquad \mathrm{H}v_i = (n-2i)v_i, \qquad \mathrm{E}v_i = (n-i+1)v_{i-1},$$

la dernière égalité résultant de (4) plus haut.

On en déduit que l'application $\mathbb{K}$-linéaire $\phi : \mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_n \to \mathrm{W}$ définie par

$$\mathrm{F}^{(i)}\mathrm{Y}^n \mapsto v_i = \mathrm{F}^{(i)}v_0$$

est un isomorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$-modules. Le théorème est démontré. □

Remarques 1.49. — 1) Dans $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$, il est commode de poser $\mathrm{X}^{(r)} = \mathrm{X}^r/r!$ et $\mathrm{Y}^{(s)} = \mathrm{Y}^s/s!$; alors on a

$$\mathrm{F}^{(i)} \cdot \mathrm{Y}^{(n)} = \mathrm{Y}^{(n-i)}\mathrm{X}^{(i)} = \mathrm{E}^{(n-i)} \cdot \mathrm{X}^{(n)}, \qquad \forall\, i = 0, \dots, n.$$

2) On verra plus loin une démonstration plus conceptuelle de l'isomorphisme $\mathbb{K}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_n \cong \mathrm{W}$, utilisant les « modules de Verma » (voir [**Dix**, § 7.1] ou [**Hu**, § 20]).

2. Généralités sur les modules

2.1. Modules simples et suites de composition. — Soit A une k-algèbre et M un A-module (à gauche).

Définition 2.1. — On dit que M est **simple**, ou **irréductible**, si $\mathrm{M} \neq (0)$ et si M n'a pas d'autre sous-modules que (0) et M.

Une **suite de composition** de M, si elle existe, est une suite finie de sous-modules

$$0 = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{M}_n = \mathrm{M}$$

telle que chaque module quotient $\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1}$ soit simple.

Remarque 2.2. — 1) Il se peut que M n'admette pas de sous-module simple, donc *a fortiori* pas de suite de composition. Par exemple, si $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$ le A-module A n'admet pas de sous-module simple, car tout idéal non nul (P) est isomorphe à A et contient strictement, par exemple, le sous-module (XP).

2) Si M est de dimension finie sur k, alors M admet une suite de composition : prendre M_1 un sous-module non nul de dimension minimale, donc simple, puis faire de même dans le quotient M/M_1, etc. On construit ainsi une suite de sous-modules

$$0 = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}_2 \subset \cdots$$

avec chaque $\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1}$ simple, et comme $\dim_k \mathrm{M} < \infty$ le processus s'arrête à un certain cran r.

***Théorème 2.3* (Jordan-Hölder).** — *Supposons que* M *admette une suite de composition*

$$0 = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{M}_n = \mathrm{M}.$$

Alors, les sous-quotients simples

$$\{\mathrm{S}_i := \mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

ne dépendent que de M*, c.-à-d., si*

$$0 = \mathrm{M}'_0 \subset \mathrm{M}'_1 \subset \cdots \subset \mathrm{M}'_r = \mathrm{M}$$

est une autre suite de composition de M*, alors $r = n$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ telle que*

$$\mathrm{M}'_i/\mathrm{M}'_{i-1} \cong \mathrm{M}_{\sigma(i)}/\mathrm{M}_{\sigma(i)-1}.$$

Les S_i*, $i = 1, \ldots, n$, s'appellent les* **facteurs de composition** *de* M *et n s'appelle la* **longueur** *de* M*.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**CR**, § 13] ou [**Pie**, § 2.6]. □

Enfin, pour la culture, signalons la caractérisation suivante, dont nous ne nous servirons pas (au moins, pas dans l'immédiat).

***Définition 2.4*.** — On dit que M est noethérien (resp. artinien) si toute suite croissante (resp. décroissante) de sous-modules est stationnaire.

***Proposition 2.5*.** — M *admet une suite de composition si et seulement si il est noethérien et artinien. Dans ce cas, on dit que* M *est de longueur finie* (*cf.* *le théorème précédent*)*.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**CR**, § 13] ou [**Pie**, § 2.6]. □

2.2. Modules semi-simples et socles. — Comme précédemment, soient A une k-algèbre et M un A-module.

***Définition 2.6*.** — On dit que M est **semi-simple**, ou **complètement réductible**, si tout sous-module de M est *facteur direct*, c.-à-d., si pour tout sous-module N de M il existe un sous-module N′ tel que

$$\mathrm{M} = \mathrm{N} \bigoplus \mathrm{N}'.$$

***Théorème 2.7*.** — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) M *est semi-simple* (*au sens ci-dessus*) *;*

2) M *est une somme directe de sous-modules simples ;*

3) M *est une somme* (*non nécessairement directe*) *de sous-modules simples.*

Si ces conditions sont vérifiées, et si N *est un sous-module de* M*, alors* N *et* M/N *sont semi-simples.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Bl**, § II.1] ou [**CR**, § 15] ou [**Pie**, § 2.4] ou [**La**, § XVII.2]. □

Définition 2.8. — On appelle **socle** de M et l'on note Soc(M), la somme de tous les sous-modules simples de M. D'après le théorème précédent, Soc(M) est le plus grand sous-module semi-simple de M, et est une somme directe de modules simples.

En particulier, M est semi-simple si et seulement si M = Soc(M).

Exemple 2.9. — Dans l'exemple $\mathrm{A} = \mathrm{M} = k[\mathrm{X}]$ vu plus haut (cf. 2.2), on a $\mathrm{Soc}(\mathrm{M}) = (0)$.

Exemple 2.10. — Même si M est de longueur finie, on peut fort bien avoir $\mathrm{M} \neq \mathrm{Soc}(\mathrm{M})$. Par exemple, toujours pour l'algèbre commutative $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$, considérons le module

$$\mathrm{M} = k[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2).$$

Alors on voit facilement que M a exactement trois sous-modules : (0), M et le sous-module simple $\mathrm{N} = k\overline{\mathrm{X}}$, où $\overline{\mathrm{X}}$ désigne l'image de X dans M. Donc $\mathrm{Soc}(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$ et M n'est pas semi-simple.

3. Semi-simplicité des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules de dimension finie

On revient à un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, et l'on note $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

3.1. Élément de Casimir. —

Définition 3.1. — On appelle élément de Casimir l'élément suivant de $\mathrm{U} := \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$:

$$\mathrm{C} = 2(\mathrm{FE} + \mathrm{EF} + \frac{\mathrm{H}^2}{2}) = 4\mathrm{FE} + \mathrm{H}(\mathrm{H}+2).$$

(On a utilisé l'égalité $\mathrm{EF} = \mathrm{FE} + \mathrm{H}$).

Proposition 3.2. — C *est un élément* **central** *de* U*, c.-à-d.,* $u\mathrm{C} = \mathrm{C}u$ *pour tout* $u \in \mathrm{U}$.

Démonstration. — Comme U est engendrée comme $\mathbb{K}$-algèbre par les éléments $\mathrm{H}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$, il suffit de vérifier que

$$[\mathrm{H}, \mathrm{C}] = 0 = [\mathrm{E}, \mathrm{C}] = [\mathrm{F}, \mathrm{C}].$$

Or $[\mathrm{H}, \mathrm{C}] = 4[\mathrm{H}, \mathrm{F}]\mathrm{E} + 4\mathrm{F}[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = -8\mathrm{FE} + 8\mathrm{FE} = 0$, et

$$[\mathrm{E}, \mathrm{C}] = 4[\mathrm{E}, \mathrm{F}]\mathrm{E} + [\mathrm{E}, \mathrm{H}](\mathrm{H} + 2) + \mathrm{H}[\mathrm{E}, \mathrm{H}] = 4\mathrm{HE} - 2\mathrm{E}(\mathrm{H} + 2) - 2\mathrm{HE} = 0,$$

car $\mathrm{E}(\mathrm{H} + 2) = \mathrm{HE}$. De même, $[\mathrm{F}, \mathrm{C}] = 0$. □

Théorème 3.3. — *C agit sur le U-module simple $\mathrm{V}(n)$ par le scalaire $n(n+2) = (n + 1)^2 - 1$.*

Démonstration. — On a $\mathrm{V}(n)^{\mathrm{E}} = \mathbb{K}v_0$, où v_0 vérifie $\mathrm{H}v_0 = nv_0$. Comme $\mathrm{C} = 4\mathrm{FE} + \mathrm{H}(\mathrm{H} + 2)$, on obtient

$$\mathrm{C}v_0 = n(n + 2)v_0.$$

Comme C est central dans U, alors

$$\mathrm{C}uv_0 = u\mathrm{C}v_0 = n(n + 2)uv_0, \qquad \forall\, u \in \mathrm{U},$$

et comme V est engendré comme U-module par v_0, on obtient que C agit sur V par le scalaire $n(n + 2)$. □

Notation 3.4. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\chi_n(\mathrm{C}) = n(n + 2)$.

Corollaire 3.5. — *Soit V un U-module de dimension finie d. Alors V est la somme directe des sous-modules*

$$\mathrm{V}_{\chi_n} := \{v \in \mathrm{V} \mid (\mathrm{C} - \chi_n(\mathrm{C}))^d\, v = 0\}.$$

Ces sous-modules sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux, et chaque V_{χ_n} non nul a une suite de composition dont tous les quotients sont isomorphes à $\mathrm{V}(n)$.

Démonstration. — Soit $0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_r = \mathrm{V}$ une suite de composition de V. Alors, chaque quotient $\mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i-1}$ est isomorphe à un certain module simple $\mathrm{V}(n_i)$. Comme $\mathrm{C} - \chi_{n_i}(\mathrm{C})$ annule $\mathrm{V}(n_i)$, alors :

$$(\mathrm{C} - \chi_{n_i}(\mathrm{C}))\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}$$

et donc $\prod_{i=1}^{r}(\mathrm{C} - \chi_{n_i}(\mathrm{C}))$ annule V. Écrivons

$$\prod_{i=1}^{r}(\mathrm{C} - \chi_{n_i}(\mathrm{C})) = \prod_{j=1}^{p}(\mathrm{C} - \chi_{k_j}(\mathrm{C}))^{m_j},$$

avec les k_j deux à deux distincts ; c.-à-d., les k_j sont les entiers distincts apparaissant parmi les n_i, et chacun est de multiplicité m_j.

Alors, il résulte du théorème des restes chinois que, comme espace vectoriel (et comme $\mathbb{K}[C]$-module)

$$V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\chi_{k_j}},$$

où $V_{\chi_{k_j}} = \mathrm{Ker}(C - \chi_{k_j})^{m_j}$. Et comme $m_j \leqslant d$ et $C - \chi_{k_j}$ agit de façon inversible sur chaque $V_{\chi_{k_\ell}}$ pour $\ell \neq j$, on a bien

$$V_{\chi_{k_j}} = \mathrm{Ker}(C - \chi_{k_j})^d.$$

De plus, si $v \in V_{\chi_{k_j}}$ et $u \in U$ alors, comme C est central,

$$(C - \chi_{k_j})^d\, uv = u(C - \chi_{k_j})^d\, v = 0,$$

donc $uv \in V_{\chi_{k_j}}$. Ceci montre que chaque $V_{\chi_{k_j}}$ est un sous-U-module de V.

Fixons un indice $j \in \{1, \dots, p\}$ et posons $\mu = \chi_{k_j}(C)$ et $W = V_{\chi_{k_j}}$. Considérons une suite de composition

$$(*) \qquad 0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\ell = W.$$

Alors C agit sur chaque quotient $W_i/W_{i-1} \cong V(t_i)$ par le scalaire $\lambda_i = t_i(t_i + 2)$. Donc, dans toute base de W adaptée à la suite $(*)$, la matrice de C est triangulaire, avec les λ_i sur la diagonale. Comme, d'autre part, $C - \mu$ est nilpotent sur W, on a nécessairement, pour tout $i = 1, \dots, \ell$,

$$(t_i + 1)^2 - 1 = \mu = (k_j + 1)^2 - 1,$$

d'où $t_i = k_j$. Donc tous les facteurs de composition de W sont isomorphes à $V(k_j)$. Ceci achève la preuve du corollaire. □

3.2. Le théorème de semi-simplicité. — Dans $U(\mathfrak{sl}_2)$, on a déjà défini les éléments

$$E^{(n)} = \frac{E^n}{n!}, \qquad F^{(n)} = \frac{F^n}{n!},$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Introduisons aussi les éléments

$$\binom{H}{n} = \frac{h(h-1)\cdots(h-n+1)}{n!},$$

avec la convention $\binom{H}{0} = 1$.

Remarque 3.6. — On vérifie sans peine que $\binom{H+1}{n+1} = \binom{H}{n+1} + \binom{H}{n}$.

Lemme 3.7. — *Pour tout* $r, s \in \mathbb{N}^*$, *on a :* [(2)]

$$\mathrm{E}^{(r)}\mathrm{F}^{(s)} = \sum_{i=0}^{\min(r,s)} \mathrm{F}^{(s-i)} \binom{\mathrm{H} - r - s + 2i}{i} \mathrm{E}^{(r-i)}.$$

Démonstration. — Voir [**Hu**, § 26.2]. □

Théorème 3.8. — *Toute représentation de dimension finie de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ *est semi-simple, et donc somme directe de modules* $\mathbb{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_n$.

D'après le paragraphe précédent, il suffit de montrer la proposition ci-dessous.

Proposition 3.9. — *Soit* V *un* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$*-module admettant une suite de composition*

$$0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_r = \mathrm{V}$$

où $\mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i-1} \cong \mathrm{V}(n)$ *pour tout* i *(d'où* $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{V} = r(n+1)$*). Alors* V *est isomorphe à la somme directe de* r *copies de* $\mathrm{V}(n)$.

On va démontrer la proposition par récurrence sur r. Pour $r = 1$, il n'y a rien démontrer. Donc on peut supposer $r \geqslant 2$ et la proposition établie pour $r - 1$. Alors, le sous-module V_{r-1} est isomorphe à la somme directe de $(r-1)$ copies de $\mathrm{V}(n)$, et donc on est ramené à démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.10. — *Supposons qu'on ait une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{V}(n)^{\oplus(r-1)} \longrightarrow \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}(n) \longrightarrow 0.$$

Alors $\mathrm{V} \cong \mathrm{V}(n)^{\oplus r}$.

Démonstration. — Notons N le sous-module $\mathrm{V}(n)^{\oplus(r-1)}$ et Q le quotient. Alors H agit dans N et Q de façon semi-simple, avec les poids $n-2i$, pour $i = 0, \ldots, n$, chaque espace de poids N_{n-2i}, resp. Q_{n-2i}, étant de dimension $r - 1$, resp. 1. Introduisant les espaces de poids généralisés

$$\mathrm{V}_{(n-2i)} = \{v \in \mathrm{V} \mid (\mathrm{H} - n + 2i)^2\, v = 0\},$$

on en déduit que

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{V}_{(n-2i)},$$

et que pour tout i on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}_{n-2i} \longrightarrow \mathrm{V}_{(n-2i)} \longrightarrow \mathrm{Q}_{n-2i} \longrightarrow 0,$$

(2) la formule donnée en cours le 27/9 était erronée !

d'où $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{V}_{(n-2i)} = 2$. De plus, de

$$\mathrm{HE} = \mathrm{E}(\mathrm{H}+2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{HF} = \mathrm{F}(\mathrm{H}-2),$$

on déduit que

$$\mathrm{P}(\mathrm{H})\mathrm{E} = \mathrm{EP}(\mathrm{H}+2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{H})\mathrm{F} = \mathrm{FP}(\mathrm{H}-2),$$

pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{H}]$. Il en résulte que

$$\mathrm{EV}_{(n-2i)} \subseteq \mathrm{V}_{(n-2i+2)}, \qquad \mathrm{FV}_{(n-2i)} \subseteq \mathrm{V}_{(n-2i-2)}$$

pour tout i. En particulier, on a :

$$\mathrm{EV}_{(n)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}^{(n+1)}\mathrm{V} = 0.$$

On déduit alors du lemme 3.7 que $\mathrm{V}_{(n)}$ est annulé par

$$\binom{\mathrm{H}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\mathrm{H}-i).$$

Donc, la restriction de H à $\mathrm{V}_{(n)}$ est semi-simple (car annulé par un polynôme à racines distinctes), et donc H agit sur $\mathrm{V}_{(n)}$ par le scalaire n, c.-à-d., cet espace propre généralisé est en fait égal à l'espace propre V_n de H.

Notons π la projection $\mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{N} = \mathrm{Q}$. Soit $v_0 \in \mathrm{V}_n$ tel que $v_0 \notin \mathrm{N}_n$. D'après la preuve du théorème 1.48, le sous-module S de V engendré par v_0 est isomorphe à $\mathrm{V}(n)$. D'autre part, comme $v_0 \notin \mathrm{N}$, alors $\pi(v)$ est non nul donc engendre le module simple $\mathrm{Q} \cong \mathrm{V}(n)$. Par conséquent, la restriction de π à S est surjective, donc *bijective* pour une raison de dimension. Donc l'intersection

$$\mathrm{S} \bigcap \operatorname{Ker}\pi = \mathrm{S} \bigcap \mathrm{N}$$

est nulle, et donc, pour une raison de dimension à nouveau, on a

$$\mathrm{V} = \mathrm{N} \bigoplus \mathrm{S} \cong \mathrm{V}(n)^{\oplus r}.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.10 et donc du théorème 3.8. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

I. Algèbres de Lie et représentations, le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Séances du 25 et 27/9 1
1. Algèbres de Lie et représentations 1
   1.1. Algèbres de Lie 1
   1.2. Représentations 4
   1.3. Dérivations et opérateurs différentiels 7
   1.4. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ 9
   1.5. Algèbres enveloppantes 12
   1.6. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ 15
2. Généralités sur les modules 18
   2.1. Modules simples et suites de composition 18
   2.2. Modules semi-simples et socles 19
3. Semi-simplicité des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules de dimension finie 20
   3.1. Élément de Casimir 20
   3.2. Le théorème de semi-simplicité 22

Bibliographie ii

Bibliographie

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Bu] D. Bump, Lie groups, Springer, 2004.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, John Wiley & Sons, 1962.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Mn] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes (Tableaux de Young, cône nilpotent, représentations des algèbres de Lie semi-simples), Calvage & Mounet, 2006.

[Pe] E. Petracci, Universal representations of Lie algebras by coderivations, Bull. Sci. Math. 127 (2003), no. 5, 439-465.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pic] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Pie] R. S. Pierce, Associative algebras, Springer, 1982.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.