II. ALGÈBRES DE LIE RÉSOLUBLES OU SEMI-SIMPLES

SÉANCES DU 2, 4 ET 5/10

4. Algèbres de Lie résolubles

(3) On a vu précédemment que les représentations simples de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont les $\mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_n$, de dimension $n+1$, tandis que celles de $\mathfrak{b} := \mathbb{C}\mathrm{H} \oplus \mathbb{C}\mathrm{E}$ sont toutes de dimension 1 (cf. 1.48 et 1.46). Cette propriété de $\mathfrak{b}$ est commune à toutes les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie *résolubles*, comme on va le voir.

4.1. Série dérivée. —

Notation 4.1. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soient U, V deux sous-espaces de $\mathfrak{g}$. On note $[\mathrm{U}, \mathrm{V}]$ le sous-espace vectoriel engendré par les crochets $[u, v]$, pour $u \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{V}$. C'est donc l'ensemble des sommes finies $[u_1, v_1] + \cdots + [u_n, v_n]$.

Définition 4.2. — On pose $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. C'est clairement un idéal de $\mathfrak{g}$. On l'appelle l'idéal dérivé (ou la **sous-algèbre dérivée**) de $\mathfrak{g}$.

Il est clair que l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est abélienne. Réciproquement, on a le lemme suivant.

Lemme 4.3. — *Soit* I *un idéal de* $\mathfrak{g}$. *Alors l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}/\mathrm{I}$ *est abélienne si et seulement si* $\mathrm{I} \supseteq \mathscr{D}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — C'est clair, car :

$$\mathfrak{g}/\mathrm{I} \text{ abélienne } \Leftrightarrow \forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \quad [x, y] \in \mathrm{I} \Leftrightarrow \mathscr{D}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{I}.$$

□

Exemple 4.4. — On a déjà vu que $\mathscr{D}(\mathfrak{gl}_n(k)) \subseteq \mathfrak{sl}_n(k)$, puisque $\mathrm{Tr}([\mathrm{A}, \mathrm{B}]) = 0$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{gl}_n(k)$. Réciproquement, on voit que les matrices

$$(*) \qquad \mathrm{E}_{i,j}, \text{ pour } i \neq j, \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i+1,i+1}, \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1,$$

(3) version du 26 octobre, avec correction dans la preuve du Lemme 6.16.

forment une base de $\mathfrak{sl}_n(k)$, et l'on a, pour $i \neq j$,

$$(**) \qquad \mathrm{E}_{i,j} = [\mathrm{E}_{i,i}, \mathrm{E}_{i,j}], \qquad \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{j,j} = [\mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{j,i}].$$

Donc, tous les éléments de la base $(*)$ sont des crochets. Ceci montre que $\mathfrak{sl}_n(k) = \mathscr{D}(\mathfrak{gl}_n(k))$.

Définition 4.5 **(Dérivations et idéaux caractéristiques)**. — On note $\mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$ l'espace des dérivations de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., des endomorphismes k-linéaires $\mathrm{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tels que

$$\mathrm{D}([x, y]) = [\mathrm{D}(x), y] + [x, \mathrm{D}(y)], \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

D'après l'identité de Jacobi, chaque endomorphisme $\mathrm{ad}(z)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$.

Un **idéal caractéristique** de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace stable par toute dérivation de $\mathfrak{g}$.

Exemple 4.6. — Par exemple, l'idéal dérivé $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ et le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ sont des idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$ et soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Alors

$$\mathrm{D}([x, y]) = [\mathrm{D}(x), y] + [x, \mathrm{D}(y)] \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}),$$

donc $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est stable par D. D'autre part,

$$[\mathrm{D}(z), x] = \mathrm{D}([z, x]) - [z, \mathrm{D}(x)] = 0,$$

montre que $\mathrm{D}(z) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. □

Définition 4.7 **(Série dérivée)**. — On définit la **série dérivée** de $\mathfrak{g}$ par : $\mathscr{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathscr{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et, pour tout $i \geqslant 1$,

$$\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathscr{D}^i(\mathfrak{g}), \mathscr{D}^i(\mathfrak{g})].$$

Il est clair que chaque $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathscr{D}^{i-1}(\mathfrak{g})$, et que l'algèbre de Lie $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})/\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$ est abélienne. En fait, chaque $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$ est un **idéal caractéristique** de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Par récurrence sur i. On l'a vu plus haut pour $i = 1$. Supposons le résultat établi jusqu'au cran $i \geqslant 1$.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$. Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$ est stable par D, donc $\mathrm{D}' = \mathrm{D}|_{\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})}$ est une dérivation de $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$, et donc stabilise $\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$. □

Définition 4.8 **(Algèbres de Lie résolubles)**. — On dit que $\mathfrak{g}$ est **résoluble** s'il existe une suite finie de sous-algèbres

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n+1} = 0$$

telle que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i+1}$, pour $i = 0, \ldots, n$. (Ceci équivaut à dire que $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_i$ et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est abélienne.)

Proposition 4.9. — *$\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathscr{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = (0)$ pour un certain n.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n+1} = 0$ est une suite comme dans la définition 4.8, on voit par récurrence sur i que $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_i$, pour tout i, d'où $\mathscr{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = (0)$. La réciproque est évidente, en prenant $\mathfrak{g}_i = \mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$. $\square$

Exemples 4.10. — 1) Toute algèbre de Lie abélienne est résoluble.

2) L'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = k\mathrm{H} \oplus k\mathrm{E}$, avec $[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = \mathrm{E}$, est résoluble. En effet, $\mathscr{D}(\mathfrak{b}) = k\mathrm{E}$ et $\mathscr{D}^2(\mathfrak{b}) = 0$.

Exemple 4.11. — Supposons $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Alors $\mathfrak{sl}_2(k)$ n'est **pas** résoluble. En effet, on a

$$\mathrm{H} = [\mathrm{E}, \mathrm{F}], \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{2}[\mathrm{H}, \mathrm{E}], \qquad \mathrm{F} = \frac{1}{2}[\mathrm{F}, \mathrm{H}],$$

d'où $\mathfrak{sl}_2(k) = \mathscr{D}(\mathfrak{sl}_2(k))$, et donc $\mathfrak{sl}_2(k) = \mathscr{D}^n(\mathfrak{sl}_2(k))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.12. — *Soit $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morphisme surjectif d'algèbres de Lie. Pour tout $i \geqslant 0$, on a*

$$\pi(\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})) = \mathscr{D}^i(\mathfrak{g}').$$

Démonstration. — Par récurrence sur i. Pour $i = 0$, c'est l'hypothèse que π est surjectif. Supposons le résultat établi jusqu'au cran $i \geqslant 0$.

Comme $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$, il est clair que $\pi(\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g}')$. Réciproquement, $\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g}')$ est engendré sur k par les $[a, b]$, avec $a, b \in \mathscr{D}^i(\mathfrak{g}')$. Par hypothèse de récurrence, il existe $x, y \in \mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$ tels que $\pi(x) = a$, $\pi(y) = b$, et alors

$$[a, b] = \pi([x, y]) \in \pi(\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g})).$$

Ceci prouve le lemme. $\square$

Proposition 4.13. — 1) *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors toute sous-algèbre et toute algèbre quotient de $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

2) *Réciproquement, soit I un idéal de $\mathfrak{g}$. Si I et $\mathfrak{g}/\mathrm{I}$ sont résolubles, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

Démonstration. — 1) Supposons $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}) = 0$ et soient $\mathfrak{g}'$ une algèbre quotient, resp. $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. D'après le lemme précédent, $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}') = 0$, donc $\mathfrak{g}'$ est résoluble. De même, on voit facilement, par récurrence, que

$$(*) \qquad \mathscr{D}^i(\mathfrak{h}) \subseteq \mathscr{D}^i(\mathfrak{g}), \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Donc $\mathscr{D}^n(\mathfrak{h}) = 0$ et $\mathfrak{h}$ est résoluble.

2) Notons π la projection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathrm{I}$ et supposons

$$\mathscr{D}^r(\mathfrak{g}') = 0, \qquad \mathscr{D}^s(\mathrm{I}) = 0.$$

D'après le lemme précédent et $(*)$, on obtient $\mathscr{D}^r(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{I}$ puis

$$\mathscr{D}^{s+r}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathscr{D}^s(\mathrm{I}) = 0.$$

Donc $\mathfrak{g}$ est résoluble. □

Remarque 4.14. — Soit $\mathfrak{r}$ une algèbre de Lie résoluble et soit $\mathfrak{a} := \mathscr{D}^n(\mathfrak{r})$ le dernier terme non nul de la série dérivée de $\mathfrak{r}$ (c.-à-d., n est le plus grand entier tel que $\mathscr{D}^n(\mathfrak{r}) \neq 0$). Alors $\mathfrak{a}$ est un idéal caractéristique (cf. 4.6), et abélien puisque $\mathscr{D}(\mathfrak{a}) = \mathscr{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$. Ceci conduit à la proposition suivante, qui sera utile plus loin.

Proposition 4.15. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathfrak{g}$ *n'a pas d'idéal résoluble non nul,*
2) $\mathfrak{g}$ *n'a pas d'idéal résoluble non nul.*

Démonstration. — Il est clair que 1) ⇒ 2). Réciproquement, supposons que $\mathfrak{g}$ possède un idéal résoluble $\mathfrak{r} \neq 0$. Soit $\mathfrak{a} = \mathscr{D}^n(\mathfrak{r})$ le dernier terme non nul de la série dérivée de $\mathfrak{r}$; c'est un idéal abélien et caractéristique de $\mathfrak{r}$.

Soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors $[x, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$, puisque $\mathfrak{r}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; par conséquent,

$$\mathrm{D} = (\mathrm{ad}\, x)|_{\mathfrak{r}}$$

est une dérivation de $\mathfrak{r}$, donc stabilise $\mathfrak{a} = \mathscr{D}^n(\mathfrak{r})$. Ceci montre que $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. La proposition est démontrée. □

Pour être complet, terminons ce paragraphe avec la notion de **radical résoluble** ; on n'en aura pas vraiment besoin dans la suite.

Définition et proposition 4.16. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* k*-algèbre de Lie* de dimension finie*. Alors* $\mathfrak{g}$ *possède un plus grand idéal résoluble. On l'appelle le* **radical** (résoluble) *de* $\mathfrak{g}$*, et on le notera* $\mathscr{R}(\mathfrak{g})$*.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{r}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale, et soit $\mathfrak{s}$ un second idéal résoluble. Alors

$$\mathfrak{q} := \frac{\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}} \cong \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}\cap\mathfrak{s}}$$

est résoluble, et l'on a uen suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{r}+\mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, l'idéal $\mathfrak{r}+\mathfrak{s}$ est résoluble, donc égale $\mathfrak{r}$ par maximalité de ce dernier. Donc $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{r}$, et ceci montre que $\mathfrak{r}$ est le grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. □

Proposition 4.17. — *Le radical de* $\overline{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}/\mathscr{R}(\mathfrak{g})$ *est nul.*

Démonstration. — Soit $\bar{\mathfrak{r}}$ le radical de $\bar{\mathfrak{g}}$, il est de la forme

$$\bar{\mathfrak{r}} = \mathrm{I}/\mathscr{R}(\mathfrak{g}),$$

où I est un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathscr{R}(\mathfrak{g})$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{I} \longrightarrow \bar{\mathfrak{r}} \longrightarrow 0,$$

et donc, d'après la proposition 4.13, I est résoluble. Mais alors $\mathrm{I} = \mathscr{R}(\mathfrak{g})$, et donc $\bar{\mathfrak{r}} = 0$. □

4.2. Algèbres de Lie nilpotentes. —

***Définition 4.18* (Série centrale descendante).** — On définit la **série centrale descendante** de $\mathfrak{g}$ par : $\mathscr{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et, pour tout $i \geqslant 2$,

$$\mathscr{C}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^i(\mathfrak{g})].$$

On voit facilement, par récurrence sur i, que chaque $\mathscr{C}^i(\mathfrak{g})$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$, et que $\mathscr{C}^i(\mathfrak{g})/\mathscr{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$ est un idéal **central** (c.-à-d., contenu dans le centre) de $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$.

***Remarque 4.19*.** — La notation $\mathscr{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, etc. est choisie de façon à ce que l'on ait, pour tout $i, j \geqslant 1$:

$$\big[\mathscr{C}^i(\mathfrak{g}), \mathscr{C}^j(\mathfrak{g})\big] \subseteq \mathscr{C}^{i+j}(\mathfrak{g}).$$

***Définition 4.20* (Algèbres de Lie nilpotentes).** — On dit que $\mathfrak{g}$ est **nilpotente** s'il existe n tel que $\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}) = (0)$.

***Remarques 4.21*.** — 1) Il est clair que : abélienne ⇒ nilpotente.

2) On montre facilement, par récurrence sur n, que $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathscr{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$. Par conséquent : nilpotente⇒ résoluble. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

***Exemple 4.22*.** — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne. Alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nécessairement de dimension 1, et l'on vérifie que $\mathfrak{g}$ admet une base (x, y) telle que $[x, y] = y$. Alors $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) = ky = \mathscr{C}^2(\mathfrak{g})$, et

$$\mathscr{D}^2(\mathfrak{g}) = [ky, ky] = 0, \quad \text{mais} \quad \mathscr{C}^3(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, ky] = ky,$$

et donc $\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}) = ky$ pour tout $n \geqslant 2$. Donc $\mathfrak{g}$ est résoluble mais pas nilpotente.

***Proposition 4.23*.** — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Alors toute sous-algèbre et toute algèbre quotient de $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Démonstration. — Similaire à celle du point 1) de la proposition 4.13, et laissée au lecteur. □

Remarque 4.24. — **Attention !** L'analogue du point 2) de la proposition 4.13 n'est **pas vrai** pour les algèbres de Lie nilpotentes : considérons à nouveau l'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = k\mathrm{H} \oplus k\mathrm{E}$, avec $[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = \mathrm{E}$. Alors $k\mathrm{E}$ est un idéal abélien, et le quotient est de dimension 1, donc aussi abélien, mais on a vu que $\mathfrak{b}$ n'est pas nilpotente.

Toutefois, on a la proposition suivante.

Proposition 4.25. — *Soit* $\mathfrak{c}$ *un idéal* **central** *de* $\mathfrak{g}$. *Si* $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ *est nilpotente, alors* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente.*

En particulier, si $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *est nilpotente, alors* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente.*

Démonstration. — Supposons $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ nilpotente, disons $\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{c}) = (0)$. Alors,

$$\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{c},$$

et comme $\mathfrak{c}$ est central il vient $\mathscr{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) = (0)$. Ceci prouve la première assertion. Comme $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (cf. 1.16), la seconde en découle. □

***Proposition 4.26* (Matrices triangulaires)**. — *Notons* $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_n(k)$*, resp.* $\mathfrak{n}_n = \mathfrak{n}_n(k)$*, la sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{M}_n(k)$ *formée des matrices triangulaires, resp. triangulaires avec des* 0 *sur la diagonale. Alors :*

1) $[\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n] \subseteq \mathfrak{n}_n$.
2) $\mathfrak{n}_n$ *est nilpotente ; plus précisément, on a* $\mathscr{C}^n(\mathfrak{n}_n) = 0$.
3) $\mathfrak{b}_n$ *est résoluble.*

Démonstration. — Soient A, B deux matrices triangulaires supérieures, et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_n$) les termes diagonaux de A (resp. de B). Alors la matrice AB est triangulaire supérieure, de termes diagonaux :

$$\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n.$$

D'une part, ceci entraîne que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} \in \mathfrak{n}_n$, ce qui prouve 1).

D'autre part, ceci montre que : $\mathfrak{b}_n$ est une **sous-algèbre** de l'algèbre **associative** $\mathrm{M}_n(k)$, et que $\mathfrak{n}_n$ en est un **idéal**, qu'on notera J. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base standard de k^n et soit (V_i) le drapeau associé. On a

$$\mathrm{J} = \{x \in \mathfrak{b}_n\ midx\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n\},$$

et on en déduit, par récurrence sur r, que

$$\mathrm{J}^r = \{x \in \mathfrak{b}_n\ midx\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-r}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

En particulier, $\mathrm{J}^n = (0)$. Enfin, on voit facilement, par récurrence sur r, que

$$\mathscr{C}^r(\mathfrak{n}_n) \subseteq \mathrm{J}^r, \quad \forall\, r = 1, \ldots, n,$$

d'où $\mathscr{C}^n(\mathfrak{n}_n) = (0)$. Donc $\mathfrak{n}_n$ est nilpotente.

A fortiori, $\mathfrak{n}_n$ est résoluble, donc aussi $\mathfrak{b}_n$, puisque $\mathscr{D}(\mathfrak{b}_n) \subseteq \mathfrak{n}_n$ et donc $\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{b}_n) \subseteq \mathscr{D}^i(\mathfrak{n}_n)$ pour tout $i \geqslant 0$. □

Remarques 4.27. — 1) En fait, on a $\mathscr{D}(\mathfrak{b}_n) = \mathfrak{n}_n$, puisque $[\mathrm{E}_{ii}, \mathrm{E}_{ij}] = \mathrm{E}_{ij}$ pour tout $i < j$.

2) n est le plus petit entier r tel que $\mathscr{C}^r(\mathfrak{n}_n) = 0$, car on a :

$$[\cdots[[\mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,3}], \mathrm{E}_{3,4}], \cdots \mathrm{E}_{n-1,n}] = \mathrm{E}_{1,n}.$$

5. Théorèmes d'Engel et de Lie

5.1. Théorème d'Engel et applications. — Soit V un k-espace vectoriel non nul de dimension finie.

***Définition 5.1* (Drapeaux)**. — Un **drapeau** de V est une suite de sous-espaces vectoriels emboités :

$$0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_d = \mathrm{V},$$

tels que $\dim_k \mathrm{V}_i = i$ pour tout i. On note $\mathrm{V}^\bullet = (\mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_d)$.

On dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_d)$ est **adaptée** à $\mathrm{V}^\bullet$ si, pour tout i, les vecteurs $e_1, \ldots, e_i$ forment une base de V_i.

Définition 5.2. — Soit $u \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. On dit qu'un drapeau $\mathrm{V}^\bullet$ est **stable** par u si $u(\mathrm{V}_i) \subseteq \mathrm{V}_i$ pour tout i. Ceci équivaut à dire que pour *une* base $\mathscr{B}$ adaptée à $\mathrm{V}^\bullet$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure (et c'est alors le cas pour *toute* base adaptée à $\mathrm{V}^\bullet$).

Lemme 5.3. — *Soit $x \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ un endomorphisme nilpotent. Alors $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent.*

Démonstration. — Dans $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, considérons les translations à gauche et à droite, $\lambda(x)$ et $\rho(x)$, définies par

$$\lambda(x)(y) = xy, \qquad \rho(x)(y) = yx.$$

Elles commutent (c.-à-d., $\lambda(x) \circ \rho(x) = \rho(x) \circ \lambda(x)$), et l'on a $\mathrm{ad}(x) = \lambda(x) - \rho(x)$. Donc, d'après la formule du binôme, l'on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$(\mathrm{ad}\, x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \lambda(x)^{n-i} \rho(x)^i.$$

Par conséquent, si $x^m = 0$, on a $(\mathrm{ad}\, x)^{2m} = 0$. □

***Théorème 5.4* (Engel)**. — *Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ une représentation de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(x)$ soit nilpotent, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Alors :*

1) V *contient un vecteur $\mathfrak{g}$-invariant non nul.*

2) *Il existe un drapeau (V_i) de* V *tel que $\rho(\mathfrak{g})\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}$, pour tout i. De façon équivalente, il existe une base $\mathscr{B}$ de* V *dans laquelle tous les éléments de $\rho(\mathfrak{g})$ sont triangulaires, avec des* 0 *sur la diagonale.*

3) $\rho(\mathfrak{g})$ *est une sous-algèbre de Lie nilpotente de* $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$.

Démonstration. — Supposons 1) vérifiée, et montrons 2) par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. Par hypothèse, V possède un vecteur invariant $v_1 \neq 0$. Alors $\mathrm{V}_1 = kv_1$ est un sous-module de V, et la représentation $\overline{\rho}$ dans V/V_1 vérifie l'hypothèse du théorème (car si $\rho(x)^n = 0$ alors *a fortiori* $\overline{\rho}(x)^n = 0$). Donc, par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $(\mathrm{V}_i)_{i\geqslant 2}$ de sous-espaces contenant V_1, tel que $\rho(\mathfrak{g})\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}$, pour tout i, et le point 2) en découle.

Pour montrer le point 1), remplaçant $\mathfrak{g}$ par son image $\rho(\mathfrak{g})$, on se ramène au cas où $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. Procédons alors par récurrence sur $\dim_k \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} = kx$, avec x nilpotent, alors $\mathrm{Ker}\, x \neq 0$, donc 1) est vérifié.

On peut donc supposer $\dim \mathfrak{g} > 1$ et le théorème démontré pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.

Soit alors $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre propre de $\mathfrak{g}$, de dimension maximale. Tout $x \in \mathfrak{h}$ est un endomorphisme nilpotent de V, donc, d'après le lemme 5.3, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent. En particulier, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, l'action de $\mathrm{ad}(x)$ sur $\mathrm{U} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est nilpotente.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée au couple $(\mathfrak{h}, \mathrm{U})$, il existe un vecteur non nul de U annulé par $\mathfrak{h}$, c.-à-d., il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que

$$(*) \qquad x \notin \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, x] \subseteq \mathfrak{h}.$$

Alors, $\mathfrak{h}+kx$ est une sous-algèbre, et la maximalité de $\mathfrak{h}$ entraîne que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}+kx$, et alors $(*)$ montre que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Revenons à V. Par hypothèse de récurrence, à nouveau, le sous-espace

$$\mathrm{W} = \mathrm{V}^{\mathfrak{h}} = \{w \in \mathrm{V} \mid \forall\, y \in \mathfrak{h}, \quad yw = 0\}$$

est non nul. Il est stable par x, car pour $w \in \mathrm{W}$ et $y \in \mathfrak{h}$, on a

$$yxw = [y, x]w + xyw = 0,$$

ce qui montre que $xw \in \mathrm{W}$. Alors $x|_{\mathrm{W}}$ est un endomorphisme nilpotent, donc annule un vecteur $w_0 \neq 0$. Comme w_0 est annulé par $\mathfrak{h}$, il est annulé par $\mathfrak{g}$. Ceci achève la preuve du point 1), et donc du point 2).

Le point 3) en découle. En effet, s'étant ramené comme précédemment au cas où $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, il résulte du lemme 5.3, que chaque $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent. Donc d'après le point 2) appliqué à la représentation adjointe, il existe une suite d'idéaux

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_d = \mathfrak{g}$$

telle que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ pour tout i. Ceci entraîne que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. En effet, on voit par récurrence sur i que

$$\mathscr{C}^i(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_{d+1-i},$$

d'où $\mathscr{C}^{d+1}(\mathfrak{g}) = 0$. Le théorème est démontré. De plus, au cours de la démonstration du point 3), on a établi le corollaire ci-dessous. $\square$

***Corollaire 5.5* (Théorème d'Engel).** — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* k*-algèbre de Lie de dimension finie telle que* $\mathrm{ad}(x)$ *soit nilpotent, pour tout* $x \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente.*

Remarques 5.6. — **Attention !** Soit $\mathfrak{n}$ une k-algèbre de Lie nilpotente. Il ne faut pas croire que $\mathfrak{n}$ agit de façon nilpotente dans toute représentation !

1) Déjà dans le cas le plus simple où $\mathfrak{n} = k\mathrm{X}$ est de dimension 1, donc abélienne, on a $\mathrm{U}(\mathfrak{n}) = k[\mathrm{X}]$ et donc un $\mathfrak{n}$-module n'est autre qu'un $k[\mathrm{X}]$-module. En particulier, les $k\mathrm{X}$-modules irréductibles sont les $k[\mathrm{X}]/\mathfrak{m}$, pour $\mathfrak{m}$ idéal maximal de $k[\mathrm{X}]$. En particulier, on trouve déjà tous les modules

$$k_\lambda := k[\mathrm{X}]/(\mathrm{X} - \lambda), \qquad \text{pour } \lambda \in k.$$

Si k est algébriquement clos, ce sont les seuls ; sinon il y a tous les $k[\mathrm{X}]/(\mathrm{P})$ pour P polynôme irréductible unitaire.

2) Supposons k **algébriquement clos**. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, on verra plus loin que tout $\mathfrak{n}$-module irréductible de dimension finie est de dimension 1 (théorème de Lie), mais cela n'est pas vrai si $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Voici un exemple. On se place dans $\mathrm{M}_p(k)$ et, pour $i = 1, \ldots, p-1$, on note

$$\mathrm{X}_i = \mathrm{E}_{i,i+1}, \qquad \mathrm{Y}_i = \mathrm{E}_{i+1,i}, \qquad \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i+1,i+1}.$$

Alors $[\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i] = \mathrm{H}_i$ et $[\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j] = 0$ si $i \neq j$. D'autre part, la matrice identité égale :

$$\mathrm{id} = \mathrm{H}_1 + 2\mathrm{H}_2 + \cdots + (p-1)\mathrm{H}_{p-1}.$$

Posons $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{p-1} i\mathrm{X}_i$ et $\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{p-1} i\mathrm{Y}_i$, c.-à-d., X est la matrice ci-dessous

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & p-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et Y est sa transposée. On a $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{id}$, et donc $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{id})$ forment une base d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ de dimension 3, isomorphe à l'algèbre de Heisenberg. Montrons que $\mathrm{V} = k^p$ est un $\mathfrak{n}$-module irréductible. Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de k^p.

Soit E un sous-espace non nul de V stable par $\mathfrak{n}$. Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Y}) = (0)$, alors E ne peut être annulé à la fois par X et Y. On peut donc supposer $\mathrm{XE} \neq 0$. Alors E contient e_1, et les $\mathrm{Y}^i(e_1)$ pour $i = 1, \ldots, p-1$, d'où $\mathrm{E} = \mathrm{V}$. Ceci montre que V est un $\mathfrak{n}$-module simple, de dimension p.

5.2. Théorème de Lie et conséquences. — Dans ce paragraphe, le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.

Lemme 5.7. — *Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal, V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, et $v \in \mathrm{V}$, $v \neq 0$, tels que $yv = \lambda(y)v$ pour tout $y \in \mathfrak{h}$. Alors on a :*

$$\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]) = 0.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathfrak{g}$ et soit n le plus petit entier tel que les vecteurs $v, xv, \ldots, x^n v$ soient liés. On pose $\mathrm{W}_{-1} = 0$ et, pour $i = 0, \ldots, n-1$,

$$\mathrm{W}_i = \mathrm{Vect}\{v, \ldots, x^i v\}.$$

Montrons par récurrence sur i que :

$$(\dagger) \qquad \forall\, y \in \mathfrak{h}, \qquad yx^i v \in \lambda(y)x^i v + \mathrm{W}_{i-1}.$$

C'est vrai pour $i = 0$. Supposant le résultat démontré au cran i, on a

$$yx^{i+1}v = yxx^i v = [y, x]x^i v + xyx^i v.$$

Par hypothèse de récurrence, $[y, x]x^i v \in \mathrm{W}_i$ et

$$xyx^i v \in x\left(\lambda(y)x^i v + \mathrm{W}_{i-1}\right) \subseteq \lambda(y)x^{i+1}v + \mathrm{W}_i.$$

Ceci prouve l'assertion $(\dagger)$. Par conséquent, $\mathrm{W} = \mathrm{W}_{n-1}$ est stable par la sous-algèbre $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x$, et pour tout $z \in \mathfrak{h}$ l'on a :

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{W}}(z) = n\,\lambda(z).$$

Si $z = [x, y]$, alors $z|_{\mathrm{W}}$ est le commutateur de $x|_{\mathrm{W}}$ et de $y|_{\mathrm{W}}$, donc est de trace nulle. Comme $n \neq 0$, puisque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, on en déduit que

$$\forall\, y \in \mathfrak{h}, \qquad \lambda([x, y]) = 0.$$

Ceci prouve le lemme. □

***Théorème 5.8* (Lie)**. — *Supposons de plus* $\mathbb{K}$ algébriquement clos. *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie résoluble, et V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Alors :*

1) V *possède un sous-$\mathfrak{g}$-module de dimension* 1*, c.-à-d., il existe $v \in \mathrm{V}$ non nul et $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tels que :*

$$\forall\, x \in \mathfrak{g}, \qquad xv = \lambda(x)v.$$

(D'où, nécessairement, $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.)

2) *Il existe un drapeau (V_i) de V* **stable par** $\mathfrak{g}$*, c.-à-d., tel que $\rho(\mathfrak{g})\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_i$, pour tout i. De façon équivalente, il existe une base $\mathscr{B}$ de V dans laquelle tous les éléments de $\rho(\mathfrak{g})$ sont triangulaires.*

Démonstration. — Comme dans la démonstration du théorème d'Engel, le point 2) résulte du point 1), par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. Pour démontrer le point 1), on peut remplacer $\mathfrak{g}$ par son image dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V})$. On procède alors par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g} = \mathbb{K}x$, c'est OK car x est trigonalisable, puisque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. On peut donc supposer $\dim \mathfrak{g} > 1$ et le théorème démontré pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.

Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre propre, et tout sous-espace contenant $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient donc $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1, et $x \notin \mathfrak{h}$, de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \mathbb{K}x.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tel que

$$\mathrm{W} := \{w \in \mathrm{V} \mid \forall\, y \in \mathfrak{h}, \quad yw = \mu(y)w\}$$

soit non nul. Montrons que W est stable par x. Soit $w \in \mathrm{W}$; pour tout $y \in \mathfrak{h}$ on a :

$$yxw = [y,x]w + xyw = \mu(y)xw,$$

car $[y,x] \in \mathfrak{h}$ et $\mu([y,x]) = 0$ d'après le lemme précédent. Ceci montre que x stabilise W, donc il existe $w_0 \in \mathrm{W}$, non nul, et $t_0 \in \mathbb{K}$, tels que $xw_0 = t_0 w_0$. Soit λ la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par $\lambda|_{\mathfrak{h}} = \mu$ et $\lambda(x) = t_0$; alors pour tout $z \in \mathfrak{g}$ on a $zw_0 = \lambda(z)w_0$. Ceci prouve le point 1), et le théorème est démontré. □

Le point 1) du théorème contient comme cas particulier le corollaire suivant.

***Corollaire 5.9* (Théorème de Lie).** — *Soient $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie résoluble, et V un $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie. Alors $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{V} = 1$.*

***Proposition 5.10*.** — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie résoluble de dimension finie. Alors $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotente.*

Démonstration. — Soit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. Remplaçant $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$, on se ramène au cas où $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

Alors, d'après le théorème de Lie appliqué à la représentation adjointe, il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle tout $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ est triangulaire supérieur. Alors, pour tout $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale. Posant $\mathfrak{h} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ et notant $\mathrm{V}_i = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$, on en déduit que

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})(\mathrm{V}_i) \subseteq \mathrm{V}_{i-1}, \qquad \forall\, i,$$

puis, par récurrence sur r, que

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^r(\mathrm{V}_i) \subseteq \mathrm{V}_{i-r},$$

ce qui signifie :

$$\forall\, y_1, \ldots, y_r \in \mathfrak{h}, \quad \forall\, x \in \mathrm{V}_i, \qquad [y_r, \cdots [y_2, [y_1, x]] \cdots] \in \mathrm{V}_{i-r}.$$

Il en résulte que $\mathfrak{h} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est nilpotente. La proposition est démontrée. $\square$

6. Forme de Killing et algèbres de Lie semi-simples

6.1. Algèbres de Lie semi-simples. —

Définition 6.1 **(Algèbres de Lie simples)**. — Une k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **simple** si elle est **non abélienne** et simple comme $\mathfrak{g}$-module. Ceci équivaut à dire que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux autres que (0) et $\mathfrak{g}$, et est de dimension > 1 (c.-à-d., l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1 ne fait pas partie des algèbres de Lie simples).

En particulier, si $\mathfrak{g}$ est simple, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (0)$ et $\mathfrak{g} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$. Plus précisément, pour tout $x \neq 0$, on a $[\mathfrak{g}, x] \neq 0$, puisque x n'est pas central, et donc l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}, x]$ égale $\mathfrak{g}$.

Définition 6.2 **(Produit d'algèbres de Lie)**. — Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux k-algèbres de Lie. Alors l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie, pour le crochet défini par

$$\big[(x, x'), (y, y')\big] = \big([x, x'], [y, y']\big).$$

(La vérification est laissée au lecteur). Alors, $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) s'identifie à l'idéal $\mathfrak{g} \times \{0\}$ (resp. $\{0\} \times \mathfrak{g}'$), et l'on a :

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \bigoplus \mathfrak{g}', \qquad \text{avec } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] = 0.$$

Notation 6.3. — Il est souvent commode de désigner $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$. C'est le cas, par exemple, dans la proposition suivante.

Proposition 6.4 **(Unicité des composantes simples)**. — *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit le produit direct d'algèbres de Lie* **simples** $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ *; écrivons :*

$$(*) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n.$$

Alors, tout idéal de $\mathfrak{g}$ est la somme des $\mathfrak{g}_i$ qu'il contient. Par conséquent :

1) *Les $\mathfrak{g}_i$ sont uniquement déterminés : ce sont les idéaux non nuls minimaux de $\mathfrak{g}$.*

2) *$\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul.*

Démonstration. — Comme chaque $\mathfrak{g}_i$ est une algèbre de Lie simple, alors, pour tout $x_i \in \mathfrak{g}_i \setminus \{0\}$, on a $[\mathfrak{g}_i, x_i] \neq 0$, puisque x_i n'est pas central, et donc l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}_i, x_i]$ égale $\mathfrak{g}_i$.

Soit $\mathfrak{h}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}$. Notons π_i les projections $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ et soit

$$\mathrm{I} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \pi_i(\mathfrak{h}) \neq 0\}.$$

Soit $i \in \mathrm{I}$. Il existe $x \in \mathfrak{h}$ tel que

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \qquad \text{avec } x_j \in \mathfrak{g}_j, \text{ et } x_i \neq 0.$$

Alors $\mathfrak{h}$ contient l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}_i, x] = [\mathfrak{g}_i, x_i]$, qui égale $\mathfrak{g}_i$. Il en résulte que

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{g}_i.$$

On en déduit que les idéaux non nuls minimaux de $\mathfrak{g}$ sont exactement $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$.

D'autre part, comme $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ pour tout i, alors $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ et donc $\mathfrak{h}$ n'est pas résoluble. La proposition est démontrée. □

Remarque 6.5. — **Attention !** On pourrait être tenté de définir les algèbres de Lie *semi-simples* comme étant les produits directs d'algèbres de Lie simples. Mais ce n'est **pas** la définition « officielle », donnée plus bas. Toutefois, on verra plus bas que les deux définitions coïncident sur un corps de caractéristique nulle.

***Définition 6.6* (Algèbres de Lie semi-simples)**. — On dit qu'une k-algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ est *semi-simple* si elle ne contient pas d'idéal abélien non nul.

D'après la proposition 4.15 (et la définition 4.16), ceci équivaut à dire que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal résoluble non nul (c.-à-d., que $\mathscr{R}(\mathfrak{g}) = 0$).

***Exemple 6.7* (Pathologies pour $\mathrm{car}(k) > 0$)**. — Supposons $\mathrm{car}(k) = p \geqslant 3$. Alors, la matrice identité id $\in \mathrm{M}_p(k)$ appartient à $\mathfrak{sl}_p(k)$ et l'on peut montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_p(k)/k\,\mathrm{id}$ est simple, et est l'unique idéal propre non nul de $\mathfrak{gl}_p(k)/k\,\mathrm{id}$.

Par conséquent, $\mathfrak{gl}_p(k)/k\,\mathrm{id}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul, donc est semi-simple au sens de la définition précédente, mais mais n'est pas produit direct d'algèbres de Lie simples, car on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{sl}_p(k)}{k\,\mathrm{id}} \longrightarrow \frac{\mathfrak{gl}_p(k)}{k\,\mathrm{id}} \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

mais $\mathfrak{sl}_p(k)/k\,\mathrm{id}$ est le seul idéal propre non nul. Pour tout cela, voir l'exercice 24 de [**BL1**, § 6].

6.2. Formes invariantes et forme de Killing. —

***Définition 6.8* (Formes invariantes)**. — Soit $\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que ϕ est **invariante** si, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\phi([x, y], z) + \phi(x, [z, y]) = 0,$$

c.-à-d., de façon équivalente :

$$\phi([x, y], z) = \phi(x, [y, z]).$$

Dans ce cas,

$$\operatorname{Ker}\phi := \{x \in \mathfrak{g} \mid \phi(x,y) = 0, \quad \forall\, y \in \mathfrak{g}\}$$

est un **idéal** de $\mathfrak{g}$. En effet, si $x \in \operatorname{Ker}\phi$ et $y \in \mathfrak{g}$, alors pour tout $z \in \mathfrak{g}$ on a

$$\phi([x,y],z) = \phi(x,[y,z]) = 0, \qquad \text{d'où } [x,y] \in \operatorname{Ker}\phi.$$

Notation 6.9. — Pour la suite, on convient que « forme invariante » signifie « forme bilinéaire symétrique invariante ».

Proposition 6.10. — *Soit ϕ une forme invariante sur $\mathfrak{g}$ et soit I un idéal de $\mathfrak{g}$.*

1) *L'orthogonal $\mathrm{I}^{\perp}$ de I relativement à ϕ est un idéal de $\mathfrak{g}$.*
2) *Si ϕ est non dégénérée, alors $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}^{\perp}$ est un idéal abélien.*

Démonstration. — 1) Soient $y \in \mathrm{I}^{\perp}$ et $z \in \mathfrak{g}$. Puisque ϕ est invariante et que I est un idéal, on a, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\phi([y,z],x) = \phi(y,[z,x]) = 0.$$

Donc $[y,z] \in \mathrm{I}^{\perp}$. Ceci montre que $\mathrm{I}^{\perp}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

2) Posons $\mathfrak{a} = \mathrm{I} \cap \mathrm{I}^{\perp}$, et soient $x, y \in \mathfrak{a}$. Pour tout $z \in \mathfrak{g}$, on a

$$\phi([x,y],z) = \phi(x,[y,z]) = 0,$$

car $x \in \mathrm{I}$ et $[y,z] \in \mathrm{I}^{\perp}$. Ceci montre que $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. En particulier, si ϕ est non dégénérée, $\mathfrak{a}$ est abélien. □

***Définition 6.11* (Forme invariante associée à une représentation)**

Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On lui associe la forme bilinéaire symétrique K_ρ définie par

$$\mathrm{K}_\rho(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(x)\rho(y)) = \mathrm{K}_\rho(y,x).$$

Elle est invariante car, posant $\mathrm{A} = \rho(x)$, $\mathrm{B} = \rho(y)$, $\mathrm{C} = \rho(z)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_\rho([x,y],z) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}([\mathrm{A},\mathrm{B}]\mathrm{C}) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\mathrm{ABC} - \mathrm{BAC}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\mathrm{ABC} - \mathrm{ACB}) = \mathrm{K}_\rho(x,[y,z]).\end{aligned}$$

Désormais, on suppose que $\mathfrak{g}$ est de **dimension finie**.

***Définition 6.12* (Forme de Killing)**. — La forme de Killing, notée $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ ou simplement K, est la forme invariante associée à la représentation adjointe, c.-à-d.,

$$\mathrm{K}(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)).$$

Elle joue un rôle fondamental dans la théorie des algèbres de Lie. Pour commencer, on a la proposition suivante.

Proposition 6.13. — *Soit* I *un idéal de* $\mathfrak{g}$.

1) *Soit* K_I *la forme de Killing de* I. *Alors* K_I *est la restriction à* $I \times I$ *de* $K_{\mathfrak{g}}$.

2) *Si* I *est abélien, alors* $I \subseteq \operatorname{Ker} K_{\mathfrak{g}}$.

3) *Si* $K_{\mathfrak{g}}$ *est non dégénérée,* $\mathfrak{g}$ *ne contient pas d'idéal résoluble* $\neq 0$ *et, de plus,* $\mathfrak{g}$ *est produit direct d'algèbres de Lie simples.*

Démonstration. — Soit V un sous-espace supplémentaire de I dans $\mathfrak{g}$, et soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition $\mathfrak{g} = I \oplus V$. Soient $x \in I$ et $y \in \mathfrak{g}$.

Comme I est un idéal, la matrice dans $\mathscr{B}$ de $\operatorname{ad}(x)$, resp. $\operatorname{ad}(y)$, est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

où A, resp. B, est la matrice de la restriction $\operatorname{ad}(x)|_I$, resp. $\operatorname{ad}(y)|_I$. Alors,

$$\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y) = \begin{pmatrix} AB & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$K_{\mathfrak{g}}(x,y) = \operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)) = \operatorname{Tr}_I(\operatorname{ad}(x)|_I \operatorname{ad}(y)|_I).$$

En particulier, si $y = x' \in I$, alors le terme de droite n'est autre que $K_I(x,y)$, et l'on obtient donc

$$K_{\mathfrak{g}}(x,x') = K_I(x,x'), \qquad \forall\, x, x' \in I,$$

ce qui prouve 1).

D'autre part, si I est abélien alors $A = \operatorname{ad}(x)|_I = 0$, d'où $K_{\mathfrak{g}}(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$, et donc $I \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. Ceci prouve 2).

Supposons $K_{\mathfrak{g}}$ non dégénérée. Alors, d'après 2) et la proposition 4.15, $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul. Montrons enfin la dernière assertion de 3) par récurrence sur $\dim_k \mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}_1$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}$ de dimension minimale, et soit $\mathfrak{h}$ son orthogonal pour $K_{\mathfrak{g}}$. D'après la proposition 6.10, $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}$ est un idéal abélien, donc nul. On a donc une somme directe orthogonale

$$(*) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \mathfrak{h}, \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}] = 0.$$

Il en résulte que tout sous-espace de $\mathfrak{g}_1$ stable par $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}_1)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. La minimalité de $\mathfrak{g}_1$ entraîne donc que $\mathfrak{g}_1$ est une algèbre de Lie simple.

D'autre part, d'après 1), la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est la restriction de $K_{\mathfrak{g}}$ à $\mathfrak{h}$, et il résulte de $(*)$ que celle-ci est non dégénérée. Donc, par hypothèse de récurrence, $\mathfrak{h}$ se décompose en :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} \mathfrak{g}_n,$$

où chaque $\mathfrak{g}_i$ est une algèbre de Lie simple et $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ pour $i \neq j$. La proposition est démontrée. □

6.3. Critères de résolubilité et de semi-simplicité de Cartan. — Dans ce paragraphe, le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Commençons par la proposition suivante.

Corollaire 6.14. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie résoluble, et* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ *une représentation de dimension finie. Alors, on a*

$$\mathrm{K}_\rho(\mathfrak{g}, \mathscr{D}(\mathfrak{g})) = 0,$$

c.-à-d., $\mathrm{Tr}_\mathrm{V}(\rho(x)\rho(y)) = 0$*, pour tout* $x \in \mathfrak{g}$ *et* $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$*.*

Démonstration. — Soit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. Remplaçant V par $\mathrm{V} \otimes_\mathbb{K} \overline{\mathbb{K}}$, on se ramène au cas où $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

Alors, d'après le théorème de Lie 5.8, il existe une base $\mathscr{B}$ de V dans laquelle tout $\rho(x)$ est triangulaire supérieur. Alors, pour tout $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, $\rho(y)$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale, et il en est de même du produit $\rho(x)\rho(y)$. Par conséquent,

$$\mathrm{K}_\rho(x, y) = \mathrm{Tr}_\mathrm{V}(\rho(x)\rho(y)) = 0.$$

□

Réciproquement, on a le théorème suivant.

***Théorème 6.15* (Élie Cartan)**. — *Soit* V *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$*. On suppose :*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Tr}_\mathrm{V}(xy) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}),\ y \in \mathfrak{g}.$$

Alors $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ *est nilpotent, et donc* $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

Démonstration. — Soit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. On voit facilement que

$$\mathscr{D}(\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{K} \overline{\mathbb{K}}) = \mathscr{D}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{K} \overline{\mathbb{K}};$$

par conséquent, l'hypothèse (1) est préservée par l'extension des scalaires de $\mathbb{K}$ à $\overline{\mathbb{K}}$. De plus, si $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathbb{K} \overline{\mathbb{K}}$ est nilpotente, il en est de même de $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$. On se ramène ainsi à démontrer le théorème sous l'hypothèse additionnelle que $\mathbb{K}$ soit algébriquement clos ; hypothèse sous laquelle nous nous plaçons.

D'après le théorème d'Engel, il suffit de montrer que tout $x \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est un endomorphisme nilpotent de V. Considérons

$$\mathrm{T} := \{u \in \mathrm{End}_\mathbb{K}(\mathrm{V}) \mid [u, \mathfrak{g}] \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{g})\}$$

(c'est le « transporteur de A := $\mathfrak{g}$ dans B := $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$). Montrons que l'hypothèse (1) entraîne le résultat suivant :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Tr}_\mathrm{V}(xu) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}),\ u \in \mathrm{T}.$$

Soient $y, z \in \mathfrak{g}$ et $u \in \mathrm{T}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([y,z]u) = \mathrm{Tr}(yzu - zyu) &= \mathrm{Tr}(yzu - yuz)\\ &= \mathrm{Tr}(y[z,u]) = 0,\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que $[z,u] \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$. Ceci prouve (2). Le théorème découle alors du lemme très astucieux suivant.

Lemme 6.16. — *On suppose* $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. *Soient* $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *et soit*

$$\mathrm{T} = \{u \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid [u, \mathrm{A}] \subseteq \mathrm{B}\}.$$

Soit $x \in \mathrm{T}$ *tel que :*

$$(*) \qquad \mathrm{Tr}(xu) = 0, \qquad \forall\, u \in \mathrm{T}.$$

Alors x *est nilpotent.*

Démonstration du lemme. — D'après la décomposition de Jordan, x se décompose dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ de façon unique en :

$$x = s + n,$$

avec s semi-simple, n nilpotent, et $sn = ns$; de plus $s = \mathrm{Q}(x)$ où $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un polynôme sans terme constant (voir, par exemple, [**Hu**, Prop. 4.2]).

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de s est diagonale, de termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Soit E le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ engendré par les λ_i. Il s'agit de montrer que $\mathrm{E} = 0$. Pour cela, il suffit de montrer que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dual

$$\mathrm{E}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{E}, \mathbb{Q})$$

est nul. Soit donc $f : \mathrm{E} \to \mathbb{Q}$ une forme linéaire. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $\mathrm{P}_f \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(0) = 0$ et

$$\mathrm{P}_f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j).$$

Soit x_f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par $x_f(e_i) = f(\lambda_i)e_i$. Alors, on a

$$(\dagger) \qquad \mathrm{ad}\, x_f = \mathrm{P}_f(\mathrm{ad}\, x).$$

En effet, soient E_{ij} les matrices élémentaires correspondant à la base $\mathscr{B}$. Alors, d'une part,

$$(\mathrm{ad}\, x_f)(\mathrm{E}_{ij}) = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))\mathrm{E}_{ij} = f(\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{ij},$$

et, d'autre part, $(\mathrm{ad}\, s)(\mathrm{E}_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{ij}$ et donc

$$\mathrm{P}_f(\mathrm{ad}\, s)(\mathrm{E}_{ij}) = \mathrm{P}_f(\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{ij} = f(\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{ij}.$$

Ceci prouve (†). D'autre part, comme $\mathrm{ad}\, s$ est la partie semi-simple de $\mathrm{ad}\, x$, il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, sans terme constant, tel que $\mathrm{ad}\, s = \mathrm{R}(\mathrm{ad}\, x)$. Alors,

$$\mathrm{ad}\, x_f = \mathrm{P}_f(\mathrm{ad}\, s) = \mathrm{P}_f(\mathrm{R}(\mathrm{ad}\, x))$$

est un polynôme en $\operatorname{ad} x$ sans terme constant. Comme $(\operatorname{ad} x)(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$, il en résulte que

$$(\operatorname{ad} x_f)(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}, \qquad \text{c.-à-d.,} \quad x_f \in \mathrm{T}.$$

Alors l'hypothèse $(*)$ entraîne :

$$0 = \operatorname{Tr}(x x_f) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\lambda_i,$$

le terme de droite étant un élément de E. Appliquant la forme linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathbb{Q}$, on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)^2.$$

Comme les $f(\lambda_i)$ sont des rationnels, ceci implique $f(\lambda_i) = 0$ pour tout i, et donc la forme linéaire f est nulle.

Ceci montre que $\mathrm{E} = 0$, et donc $\lambda_i = 0$ pour tout i. Ceci prouve le lemme, et achève la preuve du théorème 6.15. □

□

***Corollaire 6.17* (Critère de résolubilité de Cartan).** — *Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie. Si*

$$\operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{g},\ y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}),$$

alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Démonstration. — D'après le théorème précédent appliqué à $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, on obtient que $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ est résoluble. Comme $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est abélien, il résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

que $\mathfrak{g}$ est résoluble (d'après la proposition 4.13). □

***Théorème 6.18* (Critère de semi-simplicité de Cartan).** — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *La forme de Killing $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée.*

b) *$\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples.*

c) *$\mathfrak{g}$ est semi-simple, c.-à-d., ne contient pas d'idéal résoluble $\neq 0$.*

Démonstration. — On a déjà vu que les implications a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sont vraies sur un corps arbitraire (propositions 6.13 et 6.4). Montrons que c) $\Rightarrow$ a) pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

Supposons que $\mathfrak{g}$ ne contienne pas d'idéal résoluble $\neq 0$. En particulier, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ et donc $\mathfrak{g}$ s'identifie à $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Notons $\mathfrak{h}$ le noyau de la forme de Killing ; c'est un idéal de $\mathfrak{g}$ (6.8) et pour tout $x \in \mathfrak{h}$ l'on a

$$0 = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)), \qquad \forall\, y \in \mathfrak{g},$$

donc *a fortiori* pour tout $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{h})$. Par conséquent, il résulte du théorème 6.15 que $\mathfrak{h}$ est résoluble, d'où $\mathfrak{h} = 0$. Le théorème est démontré. □

7. Décomposition de Jordan et dérivations

7.1. Dérivations. — Soit k un corps arbitraire. On rappelle la définition suivante (cf. 1.3).

Définition 7.1. — Soit A une k-algèbre *arbitraire*, c.-à-d., un k-espace vectoriel A muni d'une application k-bilinéaire

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A} \longrightarrow k, \qquad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

On dit que $\mathrm{D} \in \mathrm{End}_k(\mathrm{A})$ est une dérivation de A si :

$$\forall\, a, b \in \mathrm{A}, \qquad \mathrm{D}(a \cdot b) = \mathrm{D}(a) \cdot b + a \cdot \mathrm{D}(b).$$

Alors, les dérivations de A forment un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$, noté $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$.

De plus, la proposition 1.25 se généralise comme suit.

Proposition 7.2. — $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$.

Démonstration. — Identique à celle de la proposition 1.25. □

Lemme 7.3. — *Soient* $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ *et* $\lambda, \mu \in k$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *et* $a, b \in \mathrm{A}$, *l'on a :*

$$(\mathrm{D} - \lambda - \mu)^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathrm{D} - \lambda)^i(a) \cdot (\mathrm{D} - \mu)^{n-i}(b).$$

Démonstration. — Pour $n = 1$, la formule

$$(\mathrm{D} - \lambda - \mu)(a \cdot b) = (\mathrm{D} - \lambda)(a) \cdot b + a \cdot (\mathrm{D} - \mu)(b)$$

découle immédiatement du fait que D est une dérivation. Le cas général s'en déduit par récurrence sur n. □

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. Comme $\mathrm{ad}\, x$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, alors le morphisme d'algèbres de Lie

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$$

est à valeurs dans $\mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$.

Définition 7.4. — Les dérivations $\mathrm{ad}\, x$, pour $x \in \mathfrak{g}$, sont appelées les **dérivations intérieures** de $\mathfrak{g}$.

Lemme 7.5. — *Soient* $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$ *et* $x \in \mathfrak{g}$. *Alors,*

$$(*) \qquad [\mathrm{D}, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}\, \mathrm{D}(x).$$

Par conséquent, $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ *est un* **idéal** *de* $\mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — Pour tout $y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$([\mathrm{D}, \mathrm{ad}\, x])(y) = \mathrm{D}([x, y]) - [x, \mathrm{D}(y)] = [\mathrm{D}(x), y].$$

Ceci montre que $[\mathrm{D}, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}\, \mathrm{D}(x)$. □

D'autre part, le noyau de ad est le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Donc, si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (0)$, alors $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ des dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$.

Désormais, on suppose $\dim_k \mathfrak{g} < \infty$.

Théorème 7.6. — *Supposons la forme de Killing* $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *non dégénérée. Alors,*

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\, \mathfrak{g} = \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g}).$$

En particulier, toute dérivation de $\mathfrak{g}$ *est intérieure.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (0)$, d'où $\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$. Pour l'égalité $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} = \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$, donnons deux démonstrations.

1ère démonstration. Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$. Considérons la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})).$$

Comme $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée, il existe un unique $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ tel que

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})), \qquad \forall\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}.$$

Montrons que $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$. D'après le lemme 7.5, on a :

$$(*) \qquad \mathrm{ad}\, \mathrm{D}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) - \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{D}.$$

Donc, pour tout $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{K}(\mathrm{D}(\mathrm{Y}), \mathrm{Z})$ égale :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, \mathrm{D}(\mathrm{Y})\, \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) - \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}([\mathrm{Y}, \mathrm{Z}])) = \mathrm{K}(\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]) = \mathrm{K}([\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \mathrm{Z}). \end{aligned}$$

Comme K est non dégénérée, ceci entraîne $\mathrm{D}(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, pour tout Y, d'où $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$.

2ème démonstration. D'après le lemme 7.5, $\mathrm{A} := \mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathscr{D} := \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g})$; notons $\mathrm{I} = \mathrm{A}^{\perp}$ son orthogonal pour la forme de Killing $\mathrm{K}_{\mathscr{D}}$ de $\mathscr{D}$. Alors I est un idéal de $\mathscr{D}$, et on a l'égalité « bien connue » :

$$(\dagger) \qquad \dim_k \mathrm{A} + \dim_k \mathrm{I} = \dim_k \mathscr{D} + \dim_k \mathrm{Ker}\, \mathrm{K}_{\mathscr{D}}.$$

D'autre part, d'après la proposition 6.13, la restriction à $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ de $\mathrm{K}_{\mathscr{D}}$ coïncide avec K_{A}, qui est non dégénérée puisque $\mathrm{A} \cong \mathfrak{g}$. Il en résulte que

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{I} = (0).$$

Comme A et I sont des idéaux, ceci entraîne $[\mathrm{I}, \mathrm{A}] = 0$. Donc, pour tout $\mathrm{D} \in \mathrm{I}$, on a d'après $(*)$:

$$0 = [\mathrm{D}, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} \mathrm{D}(x), \qquad \forall\, x \in \mathfrak{g}.$$

Comme ad est injective, il vient $\mathrm{D}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, et donc $\mathrm{D} = 0$. Ceci montre que $\mathrm{I} = 0$, et alors $(\dagger)$ entraîne que $\mathscr{D} = \mathrm{A}$. □

Corollaire 7.7. — *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie* semi-simple. *Alors*

$$\mathfrak{g} \cong \operatorname{ad} \mathfrak{g} = \mathrm{Dér}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — Ceci résulte des théorèmes 6.18 et 7.6. □

7.2. Décomposition de Jordan. — Dans ce paragraphe, le corps de base k est supposé **algébriquement clos**. Soit V un k-espace vectoriel. Pour un éventuel usage ultérieur, on va énoncer ci-dessous plusieurs versions de la décomposition de Jordan.

On n'aura besoin dans l'immédiat que de la décomposition de Jordan dans $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, pour V de dimension finie. Commençons par la définition suivante.

Définition 7.8. — On dit que $a \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ est :
1) **localement fini** si, pour tout $v \in \mathrm{V}$, le sous-espace engendré par les $a^i v$, $i \geqslant 0$, est de dimension finie.
2) **semi-simple** si V admet une base formée de vecteurs propres de a. Si $\dim_k \mathrm{V} < \infty$, ceci équivaut à : a est racine d'un polynôme $\mathrm{P} \in k[\mathrm{T}]$ sans racines multiples.
3) **nilpotent**, resp. **localement nilpotent**, s'il existe $n > 0$ tel que $a^n = 0$, resp. si pour tout $v \in \mathrm{V}$ il existe $n > 0$ tel que $a^n v = 0$.
4) **unipotent**, resp. **localement unipotent**, si $(a-1)^n = 0$ pour un certain $n > 0$, resp. si pour tout $v \in \mathrm{V}$ il existe $n > 0$ tel que $(a-1)^n v = 0$.

Remarque 7.9. — Supposons $\dim_k \mathrm{V} = d < \infty$. Si $a \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ est nilpotent (resp. unipotent), toutes ses valeurs propres sont nulles (resp. égales à 1) et donc son polynôme caractéristique est X^d (resp. $(\mathrm{X}-1)^d$) ; par conséquent on a :

$$a^d = 0, \qquad \text{resp.} \qquad (a-1)^d = 0.$$

Lemme 7.10. — *Supposons que $a, b \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ commutent.*
1) *Si a, b sont semi-simples, alors $a + b$ et ab le sont aussi.*
2) *Si a, b sont nilpotents, alors $a + b$ et ab le sont aussi.*
3) *Si a, b sont unipotents, alors ab l'est aussi.*

Démonstration. — 1) On voit facilement que b laisse stables les espaces propres de a, et donc V admet une base formée de vecteurs propres communs à a et b. L'assertion en découle.

2) Il existe n tel que $a^n = 0 = b^n$. Alors $(ab)^n = 0 = (a+b)^{2n}$.

3) Il existe n tel que $(a-1)^n = 0 = (b-1)^n$. Alors, comme $ab - 1 = (a-1)b + b - 1$, on a $(ab-1)^{2n} = 0$. $\square$

Proposition 7.11 **(Décomposition de Jordan additive)**. — *On suppose* V *de dimension finie. Soit* $a \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$.

(1) *Il existe* a_s *semi-simple et* a_n *nilpotent, tels que* $a_s a_n = a_n a_s$ *et* $a = a_s + a_n$. *Ces propriétés déterminent uniquement* a_s *et* a_n. *L'écriture* $a = a_s + a_n$ *s'appelle la décomposition de Jordan* (*additive*) *de* a.

(2) *Il existe des polynômes* P, Q *sans termes constants tels que* $a_s = \mathrm{P}(a)$ *et* $a_n = \mathrm{Q}(a)$. *Par conséquent, si* $\mathrm{W}' \subseteq \mathrm{W}$ *sont des sous-espaces de* V *tels que* $a(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W}'$, *on a aussi*

$$a_s(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W}', \qquad a_n(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W}'.$$

(3) *Si* $b \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *commute à* a *il commute aussi à* a_s *et* a_n.

(4) *Soient* E *un sous-espace de* V *stable par* a, *et* $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$. *Alors* E *est stable par* a_s *et* a_n, *et* $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} + a_{n|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} + a_{n|\mathrm{W}}$ *sont les décompositions de Jordan de* $a_{|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}}$.

Démonstration. — On renvoie à [**Hu**, § 4.2] pour les points (1)–(3). Montrons le point (4).

Si E est a-stable et si $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$, il est clair que $a_{n|\mathrm{E}}$ et $a_{n|\mathrm{W}}$ sont nilpotents, et $a_{s|\mathrm{E}}$ et $a_{s|\mathrm{W}}$ sont semi-simples car annulés par le polynôme minimal de a, qui est sans racines multiples. Évidemment, $a_{s|\mathrm{E}}$ et $a_{n|\mathrm{E}}$ commutent, de même que $a_{s|\mathrm{W}}$ et $a_{n|\mathrm{W}}$. Donc, par unicité, $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} + a_{n|\mathrm{E}}$ et $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} + a_{n|\mathrm{W}}$ sont les décompositions de Jordan de $a_{|\mathrm{E}}$ et $a_{|\mathrm{W}}$. $\square$

Corollaire 7.12 **(Décomposition de Jordan multiplicative)**

On suppose V *de dimension finie. Soit* $a \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

(1′) *Il existe* a_s *semi-simple et* a_u *unipotent, tels que* $a = a_s a_u = a_u a_s$. *Ces propriétés déterminent uniquement* a_s *et* a_u ; a_s *est la partie semi-simple de* a *définie plus haut, et* $a_u = \mathrm{id} + a_s^{-1} a_n$. *L'écriture* $a = a_s a_u$ *s'appelle la décomposition de Jordan multiplicative de* a.

(3′) *Si* $b \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ *commute à* a *il commute aussi à* a_s *et* a_u.

(4′) *Soient* E *un sous-espace de* V *stable par* a *et* $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$. *Alors* E *est stable par* a_s *et* a_u, *et* $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} a_{u|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} a_{u|\mathrm{W}}$ *sont les décompositions de Jordan de* $a_{|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}}$.

Démonstration. — Soient $a \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ et $a = a_s + a_n$ sa décomposition de Jordan additive dans $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. Comme a_s et a ont les mêmes valeurs propres, alors $a_s \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. On pose alors $a_u = \mathrm{id} + a_s^{-1} a_n$. Le reste de la démonstration est analogue à celle de la proposition précédente. □

Proposition 7.13 **(Décompositions pour un endomorphisme localement fini)**

Soient V *un* k*-espace vectoriel arbitraire et* a *un endomorphisme localement fini de* V.

(1) *Il existe* a_s *semi-simple et* a_n *localement nilpotent tels que* $a_s a_n = a_n a_s$ *et* $a = a_s + a_n$*, et ces propriétés déterminent uniquement* a_s *et* a_n*. L'écriture* $a = a_s + a_n$ *s'appelle la décomposition de Jordan (additive) de* a.

(3) *Si* $b \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ *commute à* a *il commute aussi à* a_s *et* a_n.

(4) *Soient* E *un sous-espace de* V *stable par* a *et* $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$*. Alors* E *est stable par* a_s *et* a_n*, et* $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} + a_{n|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} + a_{n|\mathrm{W}}$ *sont les décompositions de Jordan de* $a_{|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}}$.

De plus, si a *est* **inversible***, on a aussi* $(1')$, $(3')$, *et* $(4')$.

Démonstration. — Cela se déduit facilement du cas de la dimension finie. □

Proposition 7.14. — *Soit* A *une* k*-algèbre arbitraire de dimension finie. Soit* $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ *et soit* $\mathrm{D} = \mathrm{D}_s + \mathrm{D}_n$ *sa décomposition de Jordan dans* $\mathrm{End}_k(\mathrm{A})$*. Alors*

$$\mathrm{D}_s,\ \mathrm{D}_n \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A});$$

c.-à-d., $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$ *contient les composantes semi-simple et nilpotente de chacun de ses éléments.*

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in k$, notons $\mathrm{A}_{(\lambda)}$ l'espace propre généralisé de D associé à λ, c.-à-d., le nil-espace de $\mathrm{D} - \lambda$:

$$\mathrm{A}_{(\lambda)} = \{a \in \mathrm{A} \mid (\mathrm{D} - \lambda)^n(a) = 0, \quad \forall\, n \gg 0\}.$$

Comme k est algébriquement clos et $\dim_k \mathrm{A} < \infty$, alors

$$\mathrm{A} = \bigoplus_{\lambda} \mathrm{A}_{(\lambda)}, \tag{$\oplus$}$$

et la composante semi-simple D_s agit par λ sur chaque $\mathrm{A}_{(\lambda)}$. Ceci entraîne que

$$\mathrm{D}_s(a \cdot b) = \mathrm{D}_s(a) \cdot b + a \cdot \mathrm{D}_s(b), \qquad \forall\, a, b \in \mathrm{A}.$$

En effet, d'après $(\oplus)$ et par bilinéarité, il suffit de le vérifier pour $a \in \mathrm{A}_{(\lambda)}$ et $b \in \mathrm{A}_{(\mu)}$. Alors, $\mathrm{D}_s(a) = \lambda a$, $\mathrm{D}_s(b) = \mu b$, et d'après le lemme 7.3, on a :

$$a \cdot b \in \mathrm{A}_{(\lambda+\mu)},$$

d'où

$$\mathrm{D}_s(a \cdot b) = (\lambda + \mu)(a \cdot b) = \mathrm{D}_s(a) \cdot b + a \cdot \mathrm{D}_s(b).$$

Ceci montre que D_s appartient à $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A})$, et donc aussi $\mathrm{D}_n = \mathrm{D} - \mathrm{D}_s$. La proposition est démontrée. □

Définition et proposition 7.15. — *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. On suppose k algébriquement clos et la forme de Killing $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ non dégénérée.*

Alors, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, il existe un couple unique $(x_s, x_n) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tel que $x = x_s + x_n$ et

$$\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$$

soit la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad} x$ *dans* $\mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$. *De plus,* $[x_s, x_n] = 0$.

On appelle x_s (resp. x_n) la **partie semi-simple** (*resp.* **nilpotente**) *de x. On dit que x est* **semi-simple** (*resp.* **nilpotent**) *si $x = x_s$, c.-à-d., si* $\operatorname{ad} x$ *est semi-simple (resp. si $x = x_n$, c.-à-d., si* $\operatorname{ad} x$ *est nilpotent).*

Si x est à la fois semi-simple et nilpotent, alors $x = 0$.

Démonstration. — D'après le théorème 7.6, ad induit un isomorphisme

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{g}).$$

Donc, d'après la proposition 7.14, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, il existe un couple unique $(x_s, x_n) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tel que $x = x_s + x_n$ et

$$\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$$

soit la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad} x$ dans $\mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$, c.-à-d., $\operatorname{ad} x_s$ est semi-simple, $\operatorname{ad} x_n$ nilpotent, et l'on a

$$0 = [\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}\,[x_s, x_n].$$

Comme ad est injectif, ceci entraîne $[x_s, x_n] = 0$. De même, si x est à la fois semi-simple et nilpotent, il en est de même de $\operatorname{ad} x$, donc $\operatorname{ad} x = 0$ et $x = 0$. □

TABLE DES MATIÈRES

I. Algèbres de Lie et représentations, le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Séances du 25 et 27/9 1
1. Algèbres de Lie et représentations 1
   1.1. Algèbres de Lie 1
   1.2. Représentations 4
   1.3. Dérivations et opérateurs différentiels 7
   1.4. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ 9
   1.5. Algèbres enveloppantes 11
   1.6. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ 14
2. Généralités sur les modules 17
   2.1. Modules simples et suites de composition 17
   2.2. Modules semi-simples et socles 18
3. Semi-simplicité des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-modules de dimension finie 19
   3.1. Élément de Casimir 19
   3.2. Le théorème de semi-simplicité 21

II. Algèbres de Lie résolubles ou semi-simples

Séances du 2, 4 et 5/10 25
4. Algèbres de Lie résolubles 25
   4.1. Série dérivée 25
   4.2. Algèbres de Lie nilpotentes 29
5. Théorèmes d'Engel et de Lie 31
   5.1. Théorème d'Engel et applications 31
   5.2. Théorème de Lie et conséquences 34
6. Forme de Killing et algèbres de Lie semi-simples 36
   6.1. Algèbres de Lie semi-simples 36
   6.2. Formes invariantes et forme de Killing 37

6.3. Critères de résolubilité et de semi-simplicité de Cartan 40
7. Décomposition de Jordan et dérivations 43
7.1. Dérivations 43
7.2. Décomposition de Jordan 45
Bibliographie iii

Bibliographie

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Bu] D. Bump, Lie groups, Springer, 2004.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, John Wiley & Sons, 1962.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Mn] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes (Tableaux de Young, cône nilpotent, représentations des algèbres de Lie semi-simples), Calvage & Mounet, 2006.

[Pe] E. Petracci, Universal representations of Lie algebras by coderivations, Bull. Sci. Math. 127 (2003), no. 5, 439-465.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pic] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Pie] R. S. Pierce, Associative algebras, Springer, 1982.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.