

### III. $\mathbb{C}$ -ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES ET SYSTÈMES DE RACINES SÉANCES DU 9, 11 ET 12/10

<sup>(4)</sup> Dans ce chapitre, on prend  $\mathbb{C}$  comme corps de base pour alléger l'écriture, mais les résultats sont valables pour tout corps  $\mathbb{K}$  algébriquement clos de caractéristique nulle.

#### 8. $\mathbb{C}$ -algèbres de Lie semi-simples

**8.0. Sous-algèbres torales maximales et espaces de poids.** — Soit  $\mathfrak{g}$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie de dimension finie semi-simple. D'après le théorème 6.18, la forme de Killing  $K_{\mathfrak{g}}$  est non-dégénérée. Par conséquent, on peut récrire la proposition 7.15 comme suit.

**Définition 8.1.** — Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , il existe un couple unique  $(x_s, x_n) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  tel que  $x = x_s + x_n$  et

$$\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$$

est la décomposition de Jordan de  $\operatorname{ad} x$  dans  $\operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$ . De plus,  $[x_s, x_n] = 0$ .

On appelle  $x_s$  (resp.  $x_n$ ) la **partie semi-simple** (resp. **nilpotente**) de  $x$ . On dit que  $x$  est **semi-simple** (resp. **nilpotent**) si  $x = x_s$ , c.-à-d., si  $\operatorname{ad} x$  est semi-simple (resp. si  $x = x_n$ , c.-à-d., si  $\operatorname{ad} x$  est nilpotent).

Si  $x$  est à la fois semi-simple et nilpotent, alors  $x = 0$ .

**Définition 8.2.** — Une sous-algèbre  $\mathfrak{t}$  de  $\mathfrak{g}$  est dite **torale** si elle est formée uniquement d'éléments semi-simples.

**Remarque 8.3.** — Il existe des sous-algèbres torales  $\neq (0)$ . En effet, si tout  $x \in \mathfrak{g}$  était nilpotent, alors d'après le théorème d'Engel,  $\mathfrak{g}$  serait nilpotente, une contradiction. Donc il existe  $x \in \mathfrak{g}$  dont la composante semi-simple  $x_s$  est  $\neq 0$ . Alors la sous-algèbre de Lie (abélienne)  $\mathbb{C}x_s$  est torale.

---

<sup>(4)</sup>version du 21/10, avec ajout d'un lemme dans la définition 8.17.

**Proposition 8.4.** — Soit  $\mathfrak{t}$  une sous-algèbre de Lie torale de  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{t}$  est abélienne, c.-à-d.,  $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0$ .

*Démonstration.* — Soit  $x \in \mathfrak{t}$  arbitraire ; par hypothèse,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$  est semi-simple, donc *a fortiori* sa restriction  $\text{ad}_{\mathfrak{t}} x$  à  $\mathfrak{t}$  est semi-simple.

Pour montrer que  $\mathfrak{t}$  est abélienne, il suffit de montrer que  $\text{ad}_{\mathfrak{t}} x = 0$ , et comme  $\text{ad}_{\mathfrak{t}} x$  est semi-simple il suffit de montrer qu'il n'a pas de valeur propre  $\lambda \neq 0$ .

Supposons au contraire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $y \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  tels que

$$[x, y] = \lambda y.$$

Alors  $[y, x] = -\lambda y$  et donc  $(\text{ad } y)^2(x) = 0$ , c.-à-d.,  $x$  appartient au nil-espace de  $\text{ad}_{\mathfrak{t}} y$ . Mais comme  $\text{ad}_{\mathfrak{t}} y$  est, lui aussi, semi-simple, ce nil-espace égale  $\text{Ker } \text{ad}_{\mathfrak{t}} y$ , et donc  $[y, x] = 0$ , une contradiction. Cette contradiction montre que  $\mathfrak{t}$  est abélienne.  $\square$

**Lemme 8.5.** — Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{C}$  une famille commutative d'endomorphismes de  $V$ . Alors

a)  $\mathcal{C}$  est trigonalisable.

b) Soit  $\mathcal{D}$  une sous-famille formée d'éléments semi-simples. Alors il existe une base de  $V$  où  $\mathcal{D}$  est diagonale et  $\mathcal{C}$  triangulaire.

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $\dim_k V$ . Si  $\mathcal{C}$  est formé d'homothéties, les assertions sont vérifiées. On peut donc supposer qu'il existe  $f \in \mathcal{C}$  et  $a \in k$  tels que  $W := \text{Ker}(f - a \text{ id})$  soit non-nul et distinct de  $V$ . Alors  $W$  est stable par  $\mathcal{C}$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $e_1 \in W$ , vecteur propre pour  $\mathcal{C}$ , et une base triangulaire pour  $\mathcal{C}$  dans  $V/ke_1$ . En relevant cette base dans  $V$ , on obtient une base triangulaire pour  $\mathcal{C}$ , d'où a).

Voyons b). Si  $\mathcal{D}$  est formée d'homothéties, le résultat découle de a). Sinon, soit  $f \in \mathcal{D}$  n'étant pas une homothétie. Alors  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  (espaces propres de  $f$ ), et les  $V_i$  sont  $\mathcal{C}$ -stables, distincts de  $V$ , et on conclut par récurrence.  $\square$

Revenons à notre  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ , et soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre torale de  $\mathfrak{g}$  **maximale** (par exemple, de dimension maximale). D'après la proposition 8.4,  $\mathfrak{h}$  est *abélienne*, donc les endomorphismes semi-simples  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ , pour  $x \in \mathfrak{h}$ , commutent. Il résulte alors du lemme précédent qu'il existe des formes linéaires *non nulles*  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{h}^*$  telles que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_{\alpha_i},$$

où  $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$  est l'espace **de poids**  $\alpha_i$  pour l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$ , c.-à-d.,

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha_i(h)x, \quad \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

et  $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\}$  est l'espace de poids 0, c.-à-d., le centralisateur de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ , noté  $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .

Posons  $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Alors la décomposition précédente se récrit :

$$(1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Elle entraîne la proposition suivante.

**Proposition 8.6.** — 1) Pour tout  $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ , on a  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

2) Pour tout  $\alpha \in R$  et  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $\text{ad } x$  est nilpotent.

3) Pour tout  $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ , on a :

$$K_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0 \quad \text{si } \alpha + \beta \neq 0.$$

4) La restriction de  $K = K_{\mathfrak{g}}$  à  $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$  est non-dégénérée et, pour tout  $\alpha \in R$ ,  $K_{\mathfrak{g}}$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \cong (\mathfrak{g}_{\alpha})^*$ .

En particulier, si  $\alpha \in R$  alors  $-\alpha \in R$  et  $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ .

*Démonstration.* — 1) Soient  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $y \in \mathfrak{g}_{\beta}$  et  $h \in \mathfrak{h}$ . Alors

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = (\alpha + \beta)(h)[x, y].$$

Ceci prouve que  $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , d'où (1).

Le point 2) en découle. En effet, soient  $\alpha \in R$  et  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ , et soit  $\beta \in R \cup \{0\}$ . D'après 1), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'on a :

$$(\text{ad } x)^n(\mathfrak{g}_{\beta}) \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}.$$

Comme  $\alpha \neq 0$ , les formes linéaires  $\beta + n\alpha$  sont deux à deux distinctes, donc n'appartiennent à l'ensemble fini  $R \cup \{0\}$  que pour un nombre fini d'entiers  $n$ . Donc il existe  $n_0$  tel que

$$\mathfrak{g}_{\beta+n_0\alpha} = 0 \quad \text{et donc} \quad (\text{ad } x)^n = 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Le point 3) peut se montrer de même. Ou bien : supposons  $\alpha + \beta \neq 0$  et soit  $h \in \mathfrak{h}$  tel que  $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$ . Alors, pour tout  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  et  $y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ , on a :

$$0 = K_{\mathfrak{g}}([h, x], y) + K_{\mathfrak{g}}(x, [h, y]) = (\alpha + \beta)(h)K_{\mathfrak{g}}(x, y),$$

d'où  $K_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0$ .

Comme  $K_{\mathfrak{g}}$  est non dégénérée, le point 4) découle du point 3).  $\square$

**Théorème 8.7.** — On a  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . Par conséquent,

$$(**) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

*Démonstration.* — La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1) Soit  $x \in \mathfrak{g}_0$  et soit  $x = s + n$  sa décomposition de Jordan dans  $\mathfrak{g}$ . On sait qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  **sans terme constant** tel que

$$\text{ad } s = P(\text{ad } x).$$

Comme  $(\text{ad } x)(\mathfrak{h}) = 0$ , il en résulte  $(\text{ad } s)(\mathfrak{h}) = 0$ , d'où  $s \in \mathfrak{g}_0$ , et aussi  $n = x - s \in \mathfrak{g}_0$ . Donc  $\mathfrak{g}_0$  contient les composantes semi-simple et nilpotente de chacun de ses éléments.

2) Soit  $s \in \mathfrak{g}_0$  semi-simple. Alors  $s \in \mathfrak{h}$ . En effet, comme  $s \in \mathfrak{g}_0$  alors les éléments semi-simples  $\text{ad } s$  et  $\text{ad } h$  commutent, pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ , et il en résulte que tout élément de la sous-algèbre de Lie (abélienne!)  $\mathfrak{h} + \mathbb{C}s$  est semi-simple. Comme  $\mathfrak{h}$  est torale maximale, il vient  $s \in \mathfrak{h}$ .

3) La restriction de  $K_{\mathfrak{g}}$  à  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  est non-dégénérée. En effet, soit  $h \in \mathfrak{h}$  tel que

$$(\perp) \quad K_{\mathfrak{g}}(h, \mathfrak{h}) = 0.$$

Soit  $x \in \mathfrak{g}_0$ , et soit  $x = s + n$  sa décomposition de Jordan. D'après les points 1) et 2), on a  $n \in \mathfrak{g}_0$  et  $s \in \mathfrak{h}$ . L'hypothèse  $(\perp)$  entraîne alors :

$$K_{\mathfrak{g}}(h, x) = K_{\mathfrak{g}}(h, n) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}}((\text{ad } h)(\text{ad } n));$$

or  $\text{ad } n$  est nilpotent, et commute à  $\text{ad } h$  puisque  $n \in \mathfrak{g}_0$ . Donc  $(\text{ad } h)(\text{ad } n)$  est aussi nilpotent, donc de trace nulle, d'où

$$K_{\mathfrak{g}}(h, x) = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g}_0.$$

Comme la restriction de  $K_{\mathfrak{g}}$  à  $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$  est non dégénérée, ceci entraîne  $h = 0$ .

4)  $\mathfrak{g}_0$  est une algèbre de Lie *nilpotente*. En effet, soit  $x \in \mathfrak{g}_0$  et soit  $x = s + n$  sa décomposition de Jordan. D'après les points 1) et 2),  $h \in \mathfrak{h}$ , et donc la restriction  $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0} h$  de  $\text{ad } h$  à  $\mathfrak{g}_0$  est nulle, puisque  $[h, \mathfrak{g}_0] = 0$ . Donc

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}_0} x = \text{ad}_{\mathfrak{g}_0} n \quad \text{est nilpotent.}$$

D'après le théorème d'Engel, ceci entraîne que  $\mathfrak{g}_0$  est nilpotente.

5) Montrons que  $\mathfrak{g}_0$  est **abélienne**, c.-à-d., que

$$0 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_0).$$

Supposons au contraire  $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_0) \neq 0$  et soit  $n \geq 2$  le plus grand entier tel que

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_0) \neq 0.$$

Alors  $[\mathfrak{g}_0, \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_0)] = \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}_0)$  est un idéal central  $\neq 0$ .

Soit  $z \in \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_0) \subseteq [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$  non nul, et soit  $z = s + n$  sa décomposition de Jordan. Alors  $n \neq 0$ , car sinon on aurait, d'une part,  $z = s \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ , et, d'autre part,

$$z = \sum_i [x_i, y_i], \quad x_i, y_i \in \mathfrak{g}_0,$$

d'où, pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ ,

$$K_{\mathfrak{g}}(z, h) = \sum_i K_{\mathfrak{g}}([x_i, y_i], h) = \sum_i K_{\mathfrak{g}}(x_i, [y_i, h]) = 0$$

(puisque  $[y_i, h] = 0$ ), et  $z = s$  serait un élément non nul de  $\mathfrak{h}$  orthogonal à  $\mathfrak{h}$  pour  $K_{\mathfrak{g}}$ , contredisant 3). Cette contradiction montre que  $n \neq 0$ .

Or,  $\text{ad } n = P(\text{ad } z)$ , où  $P$  est un polynôme *sans terme constant*. Comme  $(\text{ad } z)(\mathfrak{h}) = 0 = (\text{ad } z)(\mathfrak{g}_0)$ , on obtient

$$(\text{ad } n)(\mathfrak{h}) = 0 = (\text{ad } n)(\mathfrak{g}_0),$$

d'où  $n \in \mathfrak{g}_0$ , puis  $n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ . Soit alors  $y \in \mathfrak{g}_0$  arbitraire. Comme  $\text{ad } n$  est nilpotent et commute à  $\text{ad } y$ , puisque  $n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ , alors  $(\text{ad } n)(\text{ad } y)$  est nilpotent, donc de trace nulle, d'où

$$K_{\mathfrak{g}}(n, y) = 0, \quad \forall y \in \mathfrak{g}_0.$$

Comme  $n \neq 0$ , ceci contredit le fait que  $K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$  est non dégénérée. Cette contradiction montre que  $\mathfrak{g}_0$  est abélienne.

6) On a  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ . En effet, soit  $x \in \mathfrak{g}_0$  et soit  $x = s + n$  sa décomposition de Jordan. D'après 1) et 2),  $n \in \mathfrak{g}_0$  et  $s \in \mathfrak{h}$ . Comme  $\mathfrak{g}_0$  est abélienne, alors

$$\forall y \in \mathfrak{g}_0, \quad K_{\mathfrak{g}}(n, y) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}}((\text{ad } n)(\text{ad } y)) = 0,$$

car  $\text{ad } n$  est nilpotent et commute à  $\text{ad } y$ . Comme  $\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{g}_0)^{\perp} = 0$ , il en résulte  $n = 0$  et  $x = s \in \mathfrak{h}$ . Le théorème est démontré.  $\square$

**Corollaire 8.8.** — Dans  $\mathfrak{h}$ , on a  $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker } \alpha = 0$ , et donc  $\mathbb{R}$  engendre  $\mathfrak{h}^*$ .

*Démonstration.* — Soit  $h \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker } \alpha$ . Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ , on a

$$[h, x] = \alpha(h)x = 0.$$

D'autre part,  $[h, \mathfrak{h}] = 0$  puisque  $\mathfrak{h}$  est abélienne. Donc  $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (0)$ . Ceci prouve la première assertion.

Enfin, soit  $V'$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{h}'$  engendré par  $\mathbb{R}$ . Son orthogonal pour la dualité entre  $\mathfrak{h}^*$  et  $\mathfrak{h}$  n'est autre que

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker } \alpha,$$

et la nullité de ce dernier entraîne  $V' = \mathfrak{h}^*$ . Le corollaire est démontré.  $\square$

**Définition 8.9.** — Notons  $K^{\#}$  l'isomorphisme  $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$  induit par  $K$ , c.-à-d.,  $K^{\#}(h)$  est la forme linéaire  $h' \mapsto K(h, h')$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on note  $H_{\alpha}$  l'unique élément de  $\mathfrak{h}$  tel que  $K^{\#}(H_{\alpha}) = \alpha$ .

**Lemme 8.10.** — Soit  $e_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus \{0\}$ . Pour tout  $f \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , on a

$$(4) \quad [e_{\alpha}, f] = K(e_{\alpha}, f)H_{\alpha}.$$

*Démonstration.* — Pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ , l'on a

$$K(h, [e_\alpha, f]) = K([h, e_\alpha], f) = \alpha(h)K(e_\alpha, f) = K(h, K(e_\alpha, f)H_\alpha).$$

Comme la restriction de  $K$  à  $\mathfrak{h}$  est non dégénérée, il en résulte que l'élément  $[e_\alpha, f] - K(e_\alpha, f)H_\alpha$  de  $\mathfrak{h}$  est nul.  $\square$

**Définition 8.11.** — On pose

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{-n\alpha}.$$

Comme, d'une part,  $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\gamma] \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+\gamma}$ , pour tout  $\beta, \gamma \in R \cup \{0\}$ , et, d'autre part,

$$[e_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathbb{C}H_\alpha,$$

d'après le lemme précédent, on voit que  $\mathfrak{s}_\alpha$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

Comme  $K$  induit une dualité parfaite entre  $\mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ , il existe  $f \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $K(e_\alpha, f) = 1$  et donc, d'après (4), on a :

$$H_\alpha = [e_\alpha, f] \in \mathcal{D}(\mathfrak{s}_\alpha).$$

**Proposition 8.12.** —  $\mathfrak{s}_\alpha$  n'est pas résoluble, et l'on a :  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ .

*Démonstration.* — On observe que  $e_\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{s}_\alpha)$  si et seulement si  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ . Supposons  $\alpha(H_\alpha) = 0$ . Alors,  $\mathcal{D}(\mathfrak{s}_\alpha) \subseteq \mathbb{C}H_\alpha \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{-n\alpha}$ , puis

$$\mathcal{D}^2(\mathfrak{s}_\alpha) \subseteq \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{-n\alpha}$$

et donc  $\mathcal{D}^2(\mathfrak{s}_\alpha)$  est nilpotente, et donc  $\mathfrak{s}_\alpha$  résoluble.

Alors, il résulte du théorème de Lie que  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$  est nilpotent, pour tout  $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{s}_\alpha)$ , en particulier pour  $x = H_\alpha$ . Donc, toutes les valeurs propres de  $H_\alpha$  sont nulles. Mais ceci est impossible, car

$$\bigcap_{\beta \in R} \text{Ker } \beta = (0),$$

donc il existe  $\beta \in R$  tel que  $\beta(H_\alpha) \neq 0$  et  $[H_\alpha, e_\beta] = \beta(H_\alpha)e_\beta$ .

Cette contradiction montre que  $\mathfrak{s}_\alpha$  n'est pas résoluble, et donc  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ . La proposition est démontrée.  $\square$

Considérons l'action adjointe de  $H_\alpha$  sur  $\mathfrak{s}_\alpha$ . Comme  $H_\alpha$  est un commutateur  $[e_\alpha, f]$ , avec  $f \in \mathfrak{s}_\alpha$ , on a

$$0 = \text{Tr}_{\mathfrak{s}_\alpha} \text{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(H_\alpha) = \alpha(H_\alpha) \left( 1 - \sum_{n \geq 1} n \dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} \right).$$

Comme  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$  et  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq (0)$ , on en déduit que :

$$\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{-n\alpha} = (0) \quad \text{pour } n > 1.$$

Remplaçant  $-\alpha$  par  $\alpha$ , on a donc obtenu la proposition suivante.

**Proposition 8.13.** — Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$  et

$$(5) \quad \mathbb{Z}\alpha \cap \mathbb{R} = \{\pm\alpha\}.$$

**Définition 8.14 (Les sous-algèbres  $\mathfrak{sl}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$ ).** — Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose

$$h_\alpha = \frac{2H_\alpha}{\alpha(H_\alpha)}, \quad \text{d'où} \quad [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha.$$

Comme  $K$  induit une dualité parfaite entre  $\mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ , il existe un unique  $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que

$$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha,$$

et l'on a de plus  $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$ . Il en résulte que la sous-algèbre

$$\mathfrak{sl}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathbb{C}f_\alpha$$

est isomorphe à  $\mathfrak{sl}_2$ , via

$$e_\alpha \leftrightarrow e, \quad h_\alpha \leftrightarrow h, \quad f_\alpha \leftrightarrow f,$$

où

$$(*) \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 8.15 (Théorème d'intégralité).** — Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* — Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Si  $\beta = \pm\alpha$  le théorème est vérifié; donc, d'après la proposition 8.13, on peut supposer que  $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$ .

Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$(\text{ad } e_\alpha)^n(e_\beta) \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}.$$

Soit  $n$  le plus petit entier  $\geq 0$  tel que  $(\text{ad } e_\alpha)^{n+1}(e_\beta) = 0$ , et posons

$$x = (\text{ad } e_\alpha)^n(e_\beta) \neq 0.$$

Alors  $x$  est un vecteur de poids  $\beta + n\alpha$ , annulé par  $e_\alpha$ .

D'après le théorème 1.48, ceci entraîne que le sous- $U(\mathfrak{sl}_\alpha)$ -module  $V$  de  $\mathfrak{g}$  engendré par  $x$  est isomorphe à  $V(m)$ , pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ , et, plus précisément, a pour base sur  $\mathbb{C}$  les vecteurs :

$$f_\alpha^i x, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m,$$

chacun étant de poids  $\beta + (n - i)\alpha$ . Alors

$$m = (\beta + n\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2n,$$

d'où  $\beta(h_\alpha) = m - 2n \in \mathbb{Z}$ , ce qui prouve la première assertion du théorème.

Pour montrer que  $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \mathbb{R}$ , on peut supposer, quitte à changer  $\beta$  en  $-\beta$ , que  $r := \beta(h_\alpha) \geq 0$ . Alors,  $m = r + 2n$ , et  $r + n$  est un entier  $\geq 0$  et  $\leq m$ ; par conséquent,  $f_\alpha^{r+n}x$  est un élément non nul de  $\mathfrak{g}$ , de poids

$$\beta - r\alpha = \beta - \beta(h_\alpha)\alpha.$$

Comme  $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$ , par hypothèse, ce poids est  $\neq 0$ , donc est un élément de  $\mathbb{R}$ . Le théorème est démontré.  $\square$

**Corollaire 8.16.** — Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{C}$  tels que  $t\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors  $t = \pm 1$ .

*Démonstration.* — Posons  $\beta = t\alpha$ . Alors  $t \neq 0$  et  $\alpha = (1/t)\beta$ . D'après le théorème,

$$\beta(h_\alpha) = 2t \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \alpha(h_\beta) = \frac{2}{t} \in \mathbb{Z}.$$

Alors  $t = n/2$ , avec  $\pm n \in \{1, 2, 4\}$ . Comme  $\pm 2\alpha$  et  $\pm 2\beta$  ne sont pas des racines, d'après 8.13 (5), alors  $\pm n = 4$  et  $\pm n = 1$  sont exclus. Donc  $n = \pm 2$  et  $t = \pm 1$ .  $\square$

**8.1. Passage à un  $\mathbb{R}$ -espace euclidien.** — On a vu que  $\mathbb{R}$  engendre  $\mathfrak{h}^*$ , par conséquent  $\mathfrak{h}$  est engendré par les  $H_\alpha$ , et donc aussi par les  $h_\alpha$ , puisque chaque  $h_\alpha$  est un multiple non nul de  $H_\alpha$ . Posons  $\ell = \dim \mathfrak{h}^* = \dim \mathfrak{h}$ .

**Définition 8.17.** — On note  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  le sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathfrak{h}$  engendré par les  $h_\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Il est de dimension  $\ell$ . En effet, comme  $\mathbb{R}$  engendre  $\mathfrak{h}^*$ , on peut choisir des racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  formant une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathfrak{h}^*$ . Notons  $h_1, \dots, h_\ell$  les éléments correspondants de  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ . Ils forment une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathfrak{h}$ , et d'après le lemme suivant ils forment une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ , d'où l'égalité

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_\mathbb{R} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \ell.$$

**Lemme.** — Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $h_\beta$  s'écrit de façon unique

$$h_\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_{\beta,i} h_i$$

avec les  $c_{\beta,i} \in \mathbb{Q}$  (donc a fortiori dans  $\mathbb{R}$ ).

*Démonstration.* — Fixons  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pour  $j = 1, \dots, \ell$ , on note  $H_j = H_{\alpha_j}$ , c.-à-d.,  $H_j = \alpha_j(H_j)h_j/2$ . Alors les  $c_{\beta,i}$ , a priori dans  $\mathbb{C}$ , sont solutions du système suivant, où  $K$  est la forme de Killing :

$$(*) \quad \forall j = 1, \dots, \ell, \quad \sum_{i=1}^{\ell} K(h_i, H_j) c_{\beta,i} = K(h_\beta, H_j) = \alpha_j(h_\beta) \in \mathbb{Z}.$$

La matrice

$$(K(h_i, H_j))_{i,j=1,\dots,\ell}$$



est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (donc a fortiori dans  $\mathbb{Q}$ ) puisque  $K(h_i, H_j) = \alpha_j(h_i) \in \mathbb{Z}$  par le théorème d'intégralité; de plus, comme  $H_j = (\alpha_j(H_j)/2)h_j$ , le déterminant de cette matrice est un multiple non nul du déterminant  $D$  de la matrice

$$(K(h_i, h_j))_{i,j=1,\dots,\ell},$$

et  $D \neq 0$  puisque la restriction de  $K$  à  $\mathfrak{h}$  est non-dégénérée. Donc  $(c_{\beta,i})_{i=1,\dots,\ell}$  est l'unique solution du système (\*), et comme ce dernier est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , la solution est dans  $\mathbb{Q}^\ell$ . Ceci prouve que chaque  $c_{\beta,i} \in \mathbb{Q}$ , d'où le lemme, et le résultat que  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  est engendré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel par une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathfrak{h}$ .  $\square$

Alors, le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dual de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  est

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

(Prendre une base  $(e_i)$  de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , c'est une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathfrak{h}$  et la base duale  $(e_i^*)$  est une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .)

Comme  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  contient  $\mathbb{R}$  (puisque  $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ), alors  $\mathbb{R}$  engendre  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Remarque.** — Pour une autre démonstration du fait que  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  est engendré par une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathfrak{h}$ , voir [BL4-6, § VI.1, Prop. 1].

Notons  $K_{\mathbb{R}}$  la restriction de  $K$  à  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

**Proposition 8.18.** — 1)  $K_{\mathbb{R}}$  est à valeurs réelles et est définie positive.

2)  $K_{\mathbb{R}}$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .

3) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a  $H_\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

*Démonstration.* — 1) Si  $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , alors  $h = \sum_{\alpha} x_{\alpha} h_{\alpha}$ , avec  $x_{\alpha} \in \mathbb{R}$ , d'où

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta(h) = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \beta(h_{\alpha}) \in \mathbb{R}.$$

Donc, pour  $h, h' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , on a, d'après (3) (avant 8.8) :

$$K(h, h') = \sum_{\beta \in \mathbb{R}} \beta(h) \beta(h') \in \mathbb{R}.$$

De plus, d'après 8.8, on a  $K(h, h) > 0$  si  $h \neq 0$ . Ceci prouve 1), et 2) en découle.

On déduit 3) de 2), comme suit :  $K_{\mathbb{R}}$  induit un isomorphisme

$$K_{\mathbb{R}}^{\#} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*,$$

qui est la restriction de  $K^{\#} : \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ . Comme  $\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ , alors

$$H_{\alpha} = (K_{\mathbb{R}}^{\#})^{-1}(\alpha) \in \mathfrak{h}.$$

La proposition est démontrée.  $\square$

**8.2. Le système de racines**  $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ . — On munit  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  du produit scalaire euclidien  $(\ , \ )$  obtenu via l'isomorphisme  $K_{\mathbb{R}}^{\#} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ . C.-à-d., si on pose  $H_{\lambda} = (K_{\mathbb{R}}^{\#})^{-1}(\lambda)$  alors :

$$(1) \quad (\lambda, \mu) = K_{\mathbb{R}}(H_{\lambda}, H_{\mu}) = \lambda(H_{\mu}) = \mu(H_{\lambda}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*.$$

Pour tout  $\alpha \in R$ , la **réflexion orthogonale** associée, c.-à-d., la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\mathcal{H}_{\alpha}$  orthogonal à  $\alpha$ , est donnée par la formule

$$\lambda \mapsto \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha;$$

en effet, si on note  $s_{\alpha}$  l'endomorphisme défini par cette formule, on a  $s_{\alpha}(\lambda) = \lambda$  pour  $\lambda \in \mathcal{H}_{\alpha}$ , et  $s_{\alpha}(\alpha) = -\alpha$ ; donc  $s_{\alpha}$  est bien la réflexion orthogonale par rapport à  $\mathcal{H}_{\alpha}$ . On a, bien sûr,  $s_{\alpha}^2 = \text{id}$ ; en particulier  $s_{\alpha}$  est bijectif.

Il est commode de poser  $\alpha^{\vee} = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ ; alors la formule ci-dessus se réécrit :

$$(2) \quad s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^{\vee})\alpha.$$

Observons aussi que  $\alpha^{\vee} = K_{\mathbb{R}}(h_{\alpha})$ , c.-à-d.,

$$(3) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*, \quad (\lambda, \alpha^{\vee}) = \lambda(h_{\alpha}).$$

En particulier, d'après le théorème d'intégralité 8.15, pour tout  $\beta \in R$ , on a

$$(4) \quad (\beta, \alpha^{\vee}) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad s_{\alpha}(\beta) = \beta - \beta(h_{\alpha})\alpha \in R.$$

Par conséquent, tenant compte du corollaire 8.16, on obtient que  $R$  vérifie les quatre propriétés de la définition ci-dessous; par conséquent,  $R$  est un **système de racines** dans  $V = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .

**Définition 8.19.** — Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire euclidien  $(\ , \ )$ . On dit qu'un sous-ensemble fini  $R$  de  $V$  est un **système de racines** dans  $V$  s'il vérifie les quatres axiomes suivants :

(R1)  $R$  ne contient pas  $0$  et engendre  $V$ ;

(R2) Pour tout  $\alpha \in R$ , la réflexion orthogonale associée, définie par

$$s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^{\vee})\alpha, \quad \text{où} \quad \alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)},$$

vérifie  $s_{\alpha}(R) = R$ ;

(R3) Pour tout  $\alpha, \beta \in R$ , on a  $(\beta, \alpha^{\vee}) \in \mathbb{Z}$ .

(R4) Soient  $\alpha \in R$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t\alpha \in R$ , alors  $t = \pm 1$ .

**Notation 8.20.** — Pour tout  $\alpha \in R$ , on appelle  $\alpha^{\vee}$  la **coracine** associée à  $\alpha$ .

Dans la section suivante, on va montrer que l'on peut classifier tous les systèmes de racines, d'une façon simple et élémentaire, et que le résultat obtenu (diagrammes de Dynkin, matrices de Cartan) est très joli.

**8.3. Le cas de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .** — On voit facilement que  $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  est une algèbre de Lie simple. Par exemple, tout idéal non nul  $I$  contient un vecteur propre de  $\text{ad } h$ , c.-à-d., contient  $f, h$ , ou  $e$ , d'où il résulte que  $I = \mathfrak{sl}_2$ . D'autre part, la sous-algèbre  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$  est torale, et la décomposition en espaces de poids

$$\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f$$

montre que  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre torale maximale et que les racines de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  sont  $\alpha$  et  $-\alpha$ , où  $\alpha$  est l'élément de  $\mathfrak{h}^*$  défini par  $\alpha(h) = 2$ . C'est le système de racines  $A_1$  qui est décrit plus bas.

## 9. Systèmes de racines

**9.1. Définitions.** — Commençons par rappeler la définition des systèmes de racines.

**Définition 9.1.** — Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire euclidien  $(\ , \ )$ . On dit qu'un sous-ensemble fini  $R$  de  $V$  est un **système de racines** dans  $V$  s'il vérifie les quatre axiomes suivants :

(R1)  $R$  ne contient pas  $0$  et engendre  $V$  ;

(R2) Pour tout  $\alpha \in R$ , la réflexion orthogonale associée, définie par

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha, \quad \text{où } \alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)},$$

vérifie  $s_\alpha(R) = R$  ;

(R3) Pour tout  $\alpha, \beta \in R$ , on a  $(\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$ .

(R4) Soient  $\alpha \in R$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t\alpha \in R$ , alors  $t = \pm 1$ .

Alors, on appelle **rang de  $R$**  la dimension de  $V$ .

**Notation 9.2.** — Pour tout  $\alpha \in R$ , on appelle  $\alpha^\vee$  la **coracine** associée à  $\alpha$ .

**Définition 9.3 (Isomorphismes).** — Si  $R'$  est un système de racines dans un espace  $V'$ , on dit que  $R$  et  $R'$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\phi : V \xrightarrow{\sim} V'$  appliquant  $R$  sur  $R'$ .

Il est clair qu'à isomorphisme près il n'existe qu'un seul système de racines de rang 1, formé d'un vecteur  $\alpha \neq 0$  et de son opposé  $-\alpha$  ; on le note  $A_1$ . C'est le système de racines de la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie simple  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

**Lemme 9.4 (Sous-systèmes de racines).** — Soit  $X$  une partie de  $R$  et soit  $V_X$  le sous-espace engendré par  $X$ . Alors  $R \cap V_X$  est un système de racines dans  $V_X$ .

*Démonstration.* — (R1) est vérifié car  $R \cap V_X$  est fini, ne contient pas 0, et engendre  $V_X$  car il contient  $X$ . (R3) et (R4) sont évidents. Voyons (R2). Pour tout  $\alpha \in R \cap V_X$ , la réflexion  $s_\alpha$  laisse stable  $V_X$ ; de plus, si  $\beta \in R \cap V_X$ , alors  $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha$  appartient à  $R \cap V_X$ . Ceci montre que (R2) est vérifié. Le lemme est démontré.  $\square$

En particulier, soit  $R$  un système de racines de rang  $\geq 2$  et soient  $\alpha, \beta \in R$  non proportionnelles. Alors  $\alpha$  et  $\beta$  engendrent un sous-système de racines de rang 2. On va voir dans le paragraphe suivant qu'on peut facilement classifier les systèmes de racines de rang 2.

Auparavant, notons le corollaire suivant.

**Corollaire 9.5.** — *Soit  $V_1$  un sous-espace de  $V$ . Alors  $R \cap V_1$  est un système de racines dans le sous-espace  $V_2$  engendré par  $R \cap V_1$ .*

*Démonstration.* — Ceci résulte du lemme, appliqué à  $X = R \cap V_1$ .  $\square$

**9.2. Systèmes de racines de rang 2.** — Soit  $R$  un système de racines de rang 2 et soient  $\alpha, \beta \in R$  non proportionnelles. Notons  $\theta$  l'angle (non-orienté) des droites  $\mathbb{R}\alpha$  et  $\mathbb{R}\beta$ . On a

$$\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad \frac{(\beta, \alpha)^2}{(\beta, \beta)(\alpha, \alpha)} = \cos^2 \theta.$$

On obtient donc que

$$4 \cos^2 \theta = (\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee)$$

est un entier  $\geq 0$ , et  $< 4$ . (Comme  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas proportionnelles, on a  $\theta > 0$  et donc  $\cos^2 \theta < 1$ .) On obtient donc que le produit d'entiers :

$$(\bullet) \quad P = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)}$$

vaut 0, 1, 2 ou 3. Il est nul si et seulement si  $(\beta, \alpha) = 0$ ; dans ce cas il n'y a pas de condition imposée sur les normes de  $\alpha$  et  $\beta$ , et l'on obtient un système de racines noté  $A_1 \times A_1$ .

Pour la suite de la discussion, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$(*) \quad (\alpha, \alpha) \leq (\beta, \beta) \quad \text{et} \quad (\beta, \alpha) < 0.$$

Si  $P = 1$ , on a alors  $(\beta, \alpha^\vee) = -1 = (\alpha, \beta^\vee)$  et donc

$$\|\alpha\| = \|\beta\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

En prenant  $\alpha$  et  $\beta$  de norme 1 dans le plan complexe  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , on peut prendre  $\alpha = 1$  et  $\beta = \exp(i2\pi/3)$ . Alors  $s_\alpha$  est la réflexion orthogonale par rapport à

l'axe des ordonnées, et

$$s_\alpha(\beta) = \beta + \alpha = \exp(i\pi/3).$$

Désignant cette racine par  $\gamma$ , on a aussi  $\gamma = s_\beta(\alpha)$ , et on vérifie que

$$s_\gamma(\alpha) = \alpha - \gamma = -\beta.$$

On obtient ainsi que  $R = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$  est un système de racines de rang 2, formé par les sommets d'un hexagone régulier. On le note  $A_2$ . On verra plus loin que c'est le système de racines associé à la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie simple  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ .

Supposons maintenant  $P = 2$ . Alors, compte-tenu de notre hypothèse (\*), on a  $(\beta, \alpha^\vee) = -2$  et  $(\alpha, \beta^\vee) = -1$ , donc

$$\|\beta\| = \sqrt{2} \|\alpha\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Alors, dans  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , on peut prendre  $\alpha = 1$  et  $\beta = -1 + i$ . Alors  $s_\alpha$ , resp.  $s_\beta$  est la réflexion orthogonale par rapport à la droite des ordonnés, resp. la première diagonale ( $y = x$ ), et l'on a

$$s_\alpha(\beta) = \beta + 2\alpha = 1 + i; \quad s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = i.$$

Désignant ces racines par  $\delta$  et  $\gamma$ , respectivement, on vérifie que

$$\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta\}$$

est un système de racines, qu'on désigne par  $B_2$  ou  $C_2$ . Les huit racines correspondent aux sommets et milieux des côtés d'un carré. On verra plus loin que c'est le système de racines associé à la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie simple

$$\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) := \{A \in \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \mid A + {}^t A = 0\}.$$

Supposons enfin  $P = 3$ . Alors, compte-tenu de notre hypothèse (\*), on a  $(\beta, \alpha^\vee) = -3$  et  $(\alpha, \beta^\vee) = -1$ , donc

$$\|\beta\| = \sqrt{3} \|\alpha\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Alors, dans  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , on peut prendre  $\alpha = 1$  et

$$\beta = \sqrt{3} \exp(i5\pi/6) = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient alors les racines

$$\begin{aligned} \gamma &= s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = \exp(i2\pi/3), \\ \delta &= s_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha = \sqrt{3} \exp(i\pi/6), \end{aligned}$$

puis les racines

$$\begin{aligned}\gamma' &= s_\alpha(s_\beta(\alpha)) = \beta + 2\alpha = \exp(i\pi/3), \\ \delta' &= s_\gamma(s_\alpha(\beta)) = 2\beta + 3\alpha = i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

On vérifie qu'on obtient ainsi un système de racines formé de 6 racines **courtes** (de longueur 1)  $\{\pm\alpha, \pm\gamma, \pm\gamma'\}$  formant les sommets d'un hexagone régulier de côté 1, et de 6 racines **longues** (de longueur  $\sqrt{3}$ )  $\{\pm\beta, \pm\delta, \pm\delta'\}$ , formant elles-aussi un hexagone régulier, mais de côté  $\sqrt{3}$  et décalé d'un angle de  $\pi/6$  par rapport au précédent. On note  $G_2$  ce système de racines. On peut montrer que c'est le système de racines associé à la  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie simple, de dimension 14, formée des dérivations de la  $\mathbb{C}$ -algèbre (non associative!) des octonions, voir par exemple [Hu, § 19.3].

On obtient ainsi tous les systèmes de racines de rang 2. En effet, dans  $G_2$  l'angle entre deux racines successives est  $\pi/6$ , qui est le plus petit possible, donc on ne peut y rajouter aucune racine.

De même, dans  $B_2 = C_2$ , l'angle entre deux racines successives est  $\pi/4$ , et on ne peut pas y intercaler une racine intermédiaire, car l'un des angles serait  $\leq \pi/8$ , impossible.

Dans  $A_2$ , l'angle entre deux racines successives est  $\pi/3$ ; on peut y intercaler une racine au milieu, formant ainsi deux angles de  $\pi/6$ : on se retrouve dans le cas  $G_2$ .

Enfin, si on part de  $A_1 \times A_1$ , on peut y rajouter une racine, et l'on crée ainsi des angles de  $\pi/4$  ou bien  $\pi/3$  et  $\pi/6$ , et l'on se retrouve, respectivement, dans le cas  $B_2$  ou bien  $G_2$ .

On a donc obtenu la liste complète des systèmes de racines de rang 2 :

$$A_1 \times A_1, \quad A_2, \quad B_2, \quad G_2.$$

Pour classifier les systèmes de racines de rang arbitraire, on aura besoin du résultat suivant, qui est un corollaire de la discussion précédente concernant le produit  $P \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Corollaire 9.6.** — *Supposons  $(\alpha, \beta) > 0$ . Alors  $\alpha - \beta$  et  $\beta - \alpha$  sont des racines.*

*Démonstration.* — Les entiers  $(\alpha, \beta^\vee)$  et  $(\beta, \alpha^\vee)$  sont positifs et leur produit est égal à 1, 2 ou 3. Quitte à échanger  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut donc supposer que  $(\beta, \alpha^\vee) = 1$ . Alors

$$s_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha = \beta - \alpha$$

est une racine, de même que  $\alpha - \beta$ . □

### 9.3. Bases d'un système de racines. —

**Définition 9.7.** — Soit  $R$  un système de racines dans  $V$ . Une partie  $\Delta$  de  $R$  est appelée une **base** de  $R$  si :

- (1)  $\Delta$  est une base de l'espace vectoriel  $V$  ;
- (2) tout  $\beta \in R$  s'écrit comme combinaison linéaire  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$ , où les  $m_\alpha$  sont des entiers de même signe (c.-à-d., tous  $\geq 0$  ou bien tous  $\leq 0$ ).

On va montrer qu'il existe des bases de  $R$ . Plus précisément, on va montrer que tout hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $V$  ne rencontrant pas  $R$  détermine une base de  $R$ , et que toute base est obtenue de cette façon. En fait,  $\mathcal{H}$  détermine deux demi-espaces  $\mathcal{H}^+$  et  $\mathcal{H}^-$ , chacun contient une base, disons  $\Delta^+$  et  $\Delta^-$ , et l'on a  $\Delta^- = -\Delta^+$ . Pour spécifier le demi-espace « positif »  $\mathcal{H}^+$ , on choisit l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à  $\mathcal{H}$ . Ceci conduit à la définition suivante.

**Définition 9.8.** — On dit que  $y \in V$  est **régulier** si  $(y, \alpha) \neq 0$ , pour tout  $\alpha \in R$ . Dans ce cas, on a une partition

$$R = R^+(y) \sqcup R^-(y),$$

où  $R^+(y) = \{\alpha \in R \mid (y, \alpha) > 0\}$ , et  $R^-(y) = -R^+(y)$ ,

et l'on note  $\Delta(y)$  l'ensemble des  $\alpha \in R^+(y)$  qui sont **indécomposables**, c.-à-d., qui ne peuvent pas s'écrire  $\alpha = \beta + \gamma$  avec  $\beta, \gamma \in R^+(y)$ .

**Lemme 9.9.** — *Tout élément de  $R^+(y)$  est combinaison linéaire à coefficients entiers  $\geq 0$  d'éléments de  $\Delta(y)$ . En particulier,  $\Delta(y)$  engendre  $V$ .*

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{I}$  l'ensemble des  $\gamma \in R^+(y)$  qui ne sont pas somme d'éléments de  $\Delta(y)$ , et supposons  $\mathcal{I} \neq \emptyset$ .

Alors, il existe  $\gamma \in \mathcal{I}$  tel que  $(y, \gamma)$  soit minimal, et  $\gamma$  n'est pas indécomposable (sinon il serait dans  $\Delta(y)$ ), donc il existe  $\alpha, \beta \in R^+(y)$  tels que  $\gamma = \alpha + \beta$ , et donc

$$(y, \gamma) = (y, \alpha) + (y, \beta).$$

Comme  $\alpha, \beta \in R^+(y)$ , chaque terme du membre de droite est  $> 0$  et donc chacun est  $< (y, \gamma)$ . Par minimalité de  $\gamma$  on a donc  $\alpha \notin \mathcal{I}$  et  $\beta \notin \mathcal{I}$ , d'où il résulte que  $\gamma \notin \mathcal{I}$ , contradiction. Ceci montre que  $\mathcal{I} = \emptyset$ , d'où la première assertion. La seconde en résulte, puisque  $R^+(y)$  engendre  $V$ .  $\square$

**Lemme 9.10.** — *Soient  $y$  régulier et  $\alpha, \beta \in \Delta(y)$ . Alors  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .*

*Démonstration.* — Sinon, d'après le corollaire 9.6,  $\gamma := \alpha - \beta$  et  $-\gamma$  seraient des racines. On aurait alors : ou bien  $\gamma \in R^+(y)$ , et  $\alpha = \gamma + \beta$  serait décomposable, ou bien  $-\gamma \in R^+(y)$  et  $\beta = -\gamma + \alpha$  serait décomposable ; une contradiction dans les deux cas. Ceci prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 9.11.** — Soit  $A$  une partie de  $V$  telle que :

(i)  $(b, c) \leq 0$ , pour tout  $b, c \in A$  ;

(ii) il existe  $z \in V$  vérifiant  $(z, a) > 0$ , pour tout  $a \in A$ .

Alors les éléments de  $A$  sont linéairement indépendants.

*Démonstration.* — Sinon, on aurait une égalité

$$\sum_{b \in B} t_b b = \sum_{c \in C} u_c c,$$

où  $B$  et  $C$  sont des parties finies, disjointes, de  $A$  et où les  $t_b$ , les  $u_c$  sont des réels  $> 0$ , et, disons,  $B \neq \emptyset$ . Posons  $x = \sum_{b \in B} t_b b$ . Alors

$$(x, x) = \sum_{b, c} t_b u_c (b, c) \leq 0,$$

d'après (ii), d'où  $x = 0$ . Donc

$$0 = (z, x) = \sum_{b \in B} t_b (z, b).$$

Or, par hypothèse,  $B \neq \emptyset$  et les  $t_b$  et  $(z, b)$  sont  $> 0$ , d'où une contradiction. Ceci prouve le lemme.  $\square$

**Théorème 9.12 (Bases de  $R$ ).** — Il existe des bases de  $R$ . Plus précisément, pour tout  $y \in V$  régulier,  $\Delta(y)$  est une base de  $R$ , et réciproquement, toute base est de cette forme.

*Démonstration.* — Si  $y \in V$  est régulier, il résulte des trois lemmes précédents que  $\Delta(y)$  est une base de  $R$ . Montrons la réciproque.

Soit  $\Delta$  une base de  $R$  et soit  $R^+$ , resp.  $R^-$ , l'ensemble des  $\gamma \in R$  qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers  $\geq 0$ , resp.  $\leq 0$ , des éléments de  $\Delta$ . Comme  $\Delta$  est une base de  $V$ , il existe  $y \in V$  tel que  $(y, \alpha) = 1$  pour tout  $\alpha \in \Delta$ . Alors  $y$  est régulier et l'on a

$$R^+ \subseteq R^+(y) \quad \text{et} \quad R^- \subseteq R^-(y).$$

Puisque  $R = R^+ \cup R^-$  et  $R^+(y) \cap R^-(y) = \emptyset$ , on en déduit que  $R^+ = R^+(y)$ .

Alors, comme les éléments de  $\Delta$  sont indécomposables dans  $R^+$ , ils le sont aussi dans  $R^+(y)$ , c.-à-d., on a l'inclusion  $\Delta \subseteq \Delta(y)$ . Comme ces ensembles ont même cardinal (la dimension de  $V$ ), il en résulte  $\Delta = \Delta(y)$ . Ceci termine la démonstration du théorème.  $\square$



**9.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin.** — Soit  $R$  un système de racines et soit  $\Delta$  une base de  $R$ .

**Définition 9.13.** — On appelle **matrice de Cartan de  $R$**  (relativement à  $\Delta$ ) la matrice  $((\beta, \alpha^\vee))_{\alpha, \beta \in \Delta}$ , c.-à-d., si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  est une numérotation des éléments de  $\Delta$ , c'est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & (\alpha_1, \alpha_2^\vee) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n^\vee) \\ (\alpha_2, \alpha_1^\vee) & 2 & & (\alpha_2, \alpha_n^\vee) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1^\vee) & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

**Définition 9.14.** — On appelle **graphe de Coxeter de  $R$**  (relativement à  $\Delta$ ), et l'on note  $\mathcal{C}(R)$ , le graphe dont les sommets sont les éléments de  $\Delta$ , deux sommets distincts  $\alpha$  et  $\beta$  étant reliés par 0, 1, 2 ou 3 arêtes suivant que le produit  $(\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee)$  est égal à 0, 1, 2 ou 3.

**Remarque 9.15.** — On verra plus loin que  $\mathcal{C}(R)$  ne dépend pas du choix de la base  $\Delta$ , ce qui justifie la notation.

**Définition 9.16.** — On dit que  $R$  est **irréductible** si le graphe  $\mathcal{C}(R)$  est connexe.

**Définition 9.17.** — On appelle **diagramme de Dynkin de  $R$**  (relativement à  $\Delta$ ) le diagramme noté  $D(R)$  et obtenu à partir du graphe de Coxeter de  $R$  de la façon suivante. Soient  $\alpha, \beta$  deux sommets tels que :

$$P = (\beta, \alpha^\vee)(\alpha, \beta^\vee) = 2 \text{ ou } 3;$$

alors on a :

$$(\beta, \alpha^\vee) = -P \Leftrightarrow (\beta, \beta) = P \cdot (\alpha, \alpha),$$

et dans ce cas on rajoute sur l'arête (de multiplicité  $P$ ) reliant  $\alpha$  à  $\beta$ , un signe  $>$  pointant vers  $\alpha$  (c.-à-d., le signe  $>$  indique que  $(\beta, \beta) > (\alpha, \alpha)$ ).

**Remarque 9.18.** — On verra plus loin que  $D(R)$  ne dépend pas de  $\Delta$ , ce qui justifie la notation. D'autre part, il est clair que  $D(R)$  contient exactement la même information que la matrice de Cartan de  $R$ .

**Définition 9.19.** — On dit que  $D(R)$  est connexe si le graphe de Coxeter sous-jacent l'est.

Pour classifier les graphes de Coxeter (et les diagrammes de Dynkin), il est commode d'introduire la notion suivante.

**Définition 9.20.** — Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien. On appelle **ensemble de vecteurs admissible** dans  $E$  un ensemble  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  de vecteurs *unitaires* linéairement indépendants et tels que, pour tout  $i \neq j$ , on ait

$$(e_i, e_j) \leq 0, \quad \text{et} \quad 4(e_i, e_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

À un tel  $\mathcal{E}$  on associe le graphe  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$  dont les sommets sont les  $e_i$ , et où deux sommets distincts  $e_i$  et  $e_j$  sont reliés par  $4(e_i, e_j)^2$  arêtes. Un tel graphe est appelé un **graphe admissible**.

Si  $R$  est un système de racines et  $\Delta$  une base de  $R$ , alors l'ensemble  $\mathcal{E}$  des vecteurs unitaires  $\alpha/|\alpha|$ ,  $\alpha \in \Delta$ , est admissible, et  $\Gamma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}(R)$ . Par conséquent, pour classifier les graphes de Coxeter  $\mathcal{C}(R)$ , il suffit de classifier les graphes admissibles. Ceci est l'objet de la section suivante.

## 10. Classification des graphes admissibles

**10.1. Premières réductions.** — Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble de vecteurs admissibles et soit  $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$ .

**Définition 10.1.** — Si  $x$  est un sommet de  $\Gamma$ , on appelle **valence de  $x$** , et on note  $v(x)$ , le nombre d'arêtes partant de  $x$ , comptées avec leur multiplicité.

**Lemme 10.2.** — Si  $\mathcal{E}'$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$ , alors  $\mathcal{E}'$  est admissible et  $\Gamma(\mathcal{E}')$  est le sous-graphe de  $\Gamma(\mathcal{E})$  supporté par  $\mathcal{E}'$ .

*Démonstration.* — C'est clair. □

**Lemme 10.3.** — Le nombre  $p(E)$  de paires de sommets dans  $\Gamma(\mathcal{E})$  reliés par au moins une arête est  $< \#\mathcal{E}$ .

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  et soit  $\varepsilon = \sum_{i=1}^n e_i$ . Comme les  $e_i$  sont linéairement indépendants, on a  $\varepsilon \neq 0$  et donc

$$(*) \quad 0 < (\varepsilon, \varepsilon) = n + 2 \sum_{i < j} (e_i, e_j).$$

Si deux sommets distincts  $e_i$  et  $e_j$  sont reliés,  $4(e_i, e_j)^2$  est égal à 1, 2 ou 3, et donc  $2(e_i, e_j)$  est  $\leq -1$ . Par conséquent, (\*) montre qu'il y a au plus  $n - 1$  paires de sommets reliés. □

**Lemme 10.4.** —  $\Gamma(\mathcal{E})$  ne contient pas de cycles.

*Démonstration.* — Supposons que  $\Gamma(\mathcal{E})$  contienne un cycle  $C$ , de cardinal  $m \geq 3$ . Soit  $\mathcal{E}'$  le support de  $C$ . Alors  $\mathcal{E}'$  est un ensemble admissible, et l'on a  $p(\mathcal{E}') \geq m = \#\mathcal{E}'$ , contradiction. □

**Lemme 10.5.** — (a) *Tout sommet de  $\Gamma$  est de valence  $\leq 3$ .*

(b) *Si  $\Gamma$  est connexe et contient une arête triple, alors  $\Gamma$  est le graphe  $\text{O}\equiv\text{O}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $x$  un sommet de  $\Gamma$ , et soient  $y_1, \dots, y_r$  les sommets reliés à  $x$ . On a  $(x, y_i) < 0$  pour tout  $i$ . Soient  $F$  le sous-espace engendré par les  $y_i$ , et  $x'$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ . Comme  $x$  et les  $y_i$  sont linéairement indépendants, on a  $x \neq x'$  et donc  $(x', x') < (x, x) = 1$ .

D'autre part, comme  $\Gamma$  ne contient pas de cycles, on a  $(y_i, y_j) = 0$  pour  $i \neq j$ . Il en résulte que  $x' = \sum_i (x, y_i) y_i$ . Par conséquent, on a

$$\sum_i (x, y_i)^2 = (x', x') < 1, \quad \text{d'où} \quad \sum_i 4(x, y_i)^2 < 4.$$

Or  $\sum_i 4(x, y_i)^2$  est la valence de  $x$ , d'où l'assertion (a).

S'il existe dans  $\Gamma$  deux sommets  $x$  et  $y$  reliés par une arête triple, c.-à-d., si  $4(x, y)^2 = 3$ , alors l'argument précédent montre que  $x$  et  $y$  ne sont reliés à aucun autre sommet de  $\Gamma$ . L'assertion (b) en découle.  $\square$

**Lemme 10.6.** — *Soit  $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  tel que  $\Gamma(\mathcal{E}')$  soit une chaîne formée d'arêtes simples. Posons*

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}') \cup \{\varepsilon\}.$$

*Alors  $\text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$  est admissible, et son graphe est obtenu à partir de celui de  $\Gamma(\mathcal{E})$  en contractant  $\Gamma(\mathcal{E}')$  en un seul point.*

*Démonstration.* — Par hypothèse, on a  $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$  pour  $i = 1, \dots, r-1$ , et les autres produits scalaires entre les  $\varepsilon_i$  sont nuls. Par conséquent, on a

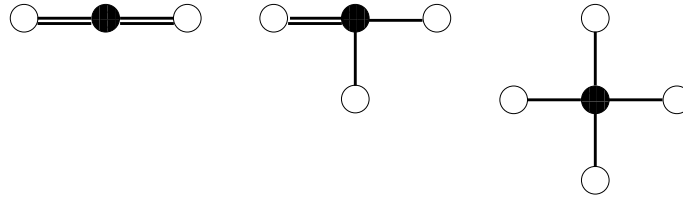
$$(\varepsilon, \varepsilon) = r + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = r - (r-1) = 1.$$

D'autre part, soit  $x$  un élément de  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$  relié dans  $\Gamma(\mathcal{E})$  à un élément  $\varepsilon_i$  de  $\mathcal{E}'$ . Comme  $\Gamma(\mathcal{E})$  ne contient pas de cycles, alors  $\varepsilon_i$  est l'unique élément de  $\mathcal{E}'$  relié à  $x$ . Par conséquent, on a  $(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon_i)$ . Ceci montre que  $\text{cont}_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$  est admissible, et que son graphe a la forme annoncée.  $\square$

**Définition 10.7.** — On appelle **point de bifurcation** un sommet de  $\Gamma$  qui est relié à au moins 3 autres sommets.

**Lemme 10.8.** — *Si  $\Gamma$  est connexe, il ne peut posséder deux arêtes doubles, ni une arête double et un point de bifurcation, ni deux points de bifurcation.*

*Démonstration.* — Sinon, on déduirait du lemme précédent qu'il existe des sous-ensembles  $\mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}''$  tels que l'ensemble admissible  $\text{cont}_{\mathcal{E}''}(\mathcal{E}')$  ait pour graphe l'un des graphes suivants :



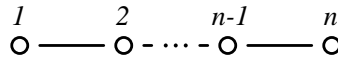
Mais alors le sommet  $\bullet$  serait de valence 4, contradiction. □

**10.2. Fin de la classification des graphes admissibles.** — Il résulte de ce qui précède que tout graphe admissible connexe est de l'un des types suivants.

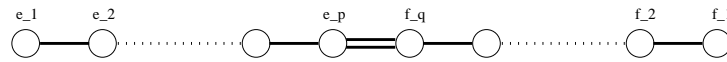
$G_2$



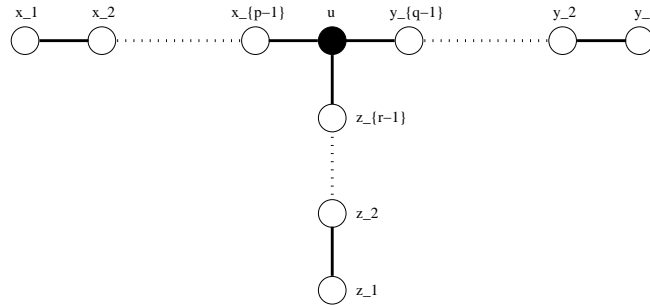
$A_n$



$I(p, q)$



$II(p, q, r)$



**Lemme 10.9.** — Soit  $\Gamma$  un graphe admissible de type  $I(p, q)$ , avec  $p \geq q \geq 1$ . Alors  $q = 1$  ou bien  $q = 2 = p$ .

*Démonstration.* — Posons  $e = \sum_{i=1}^p i e_i$  et  $f = \sum_{j=1}^q j f_j$ . On a  $2(e_i, e_{i+1}) = -1$ , pour  $i = 1, \dots, p - 1$ , et  $(e_i, e_j) = 0$  pour  $j \neq i + 1$ . Donc

$$(e, e) = \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2} \quad \text{et, de même,} \quad (f, f) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

D'autre part, comme

$$(e_i, f_j)^2 = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i = p \text{ et } j = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a  $(e, f)^2 = (pq)^2(e_p, f_q)^2 = (pq)^2/2$ .

Comme  $e$  et  $f$  sont linéairement indépendants, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que  $(e, f)^2 < (e, e)(f, f)$ , d'où  $2(pq)^2 < pq(p+1)(q+1)$ . On en déduit que  $(p-1)(q-1) < 2$ .

Comme  $p \geq q \geq 1$ , ceci n'est possible que si  $q = 1$ , ou  $q = 2 = p$ .  $\square$

**Lemme 10.10.** — Soit  $\Gamma$  un graphe admissible de type  $\text{II}(p, q, r)$ , avec  $p \geq q \geq r \geq 2$ . Alors ou bien  $q = r = 2$ , ou bien  $(p, q, r)$  est l'un des triplets suivants :  $(5, 3, 2)$ ,  $(4, 3, 2)$ ,  $(3, 3, 2)$ .

*Démonstration.* — Posons  $x = \sum_i ix_i$ ,  $y = \sum_j jy_j$ , et  $z = \sum_k kz_k$ . Comme dans le lemme précédent, on obtient :

$$(x, x) = \frac{(p-1)p}{2}, \quad (y, y) = \frac{(q-1)q}{2}, \quad (z, z) = \frac{(r-1)r}{2},$$

et

$$\begin{cases} (u, x) = (p-1)(u, x_{p-1}) = (p-1)/2, \\ (u, y) = (q-1)(u, y_{q-1}) = (q-1)/2, \\ (u, z) = (r-1)(u, z_{r-1}) = (r-1)/2. \end{cases}$$

Soit  $V'$  le sous-espace engendré par  $x, y, z$ , et soit  $u'$  la projection orthogonale de  $u$  sur  $V'$ . Puisque  $x, y, z$  sont deux à deux orthogonaux, on a

$$u' = (u, x) \frac{x}{(x, x)} + (u, y) \frac{y}{(y, y)} + (u, z) \frac{z}{(z, z)},$$

d'où

$$\begin{aligned} (u', u') &= \frac{(u, x)^2}{(x, x)} + \frac{(u, y)^2}{(y, y)} + \frac{(u, z)^2}{(z, z)} \\ &= \frac{(p-1)^2}{4} \frac{2}{(p-1)p} + \frac{(q-1)^2}{4} \frac{2}{(q-1)q} + \frac{(r-1)^2}{4} \frac{2}{(r-1)r} \\ &= \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Enfin, comme  $u \notin V'$ , on a  $(u', u') < (u, u) = 1$ . On en déduit que

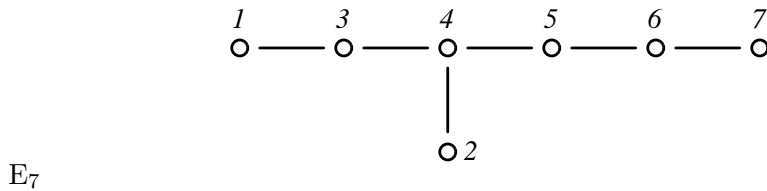
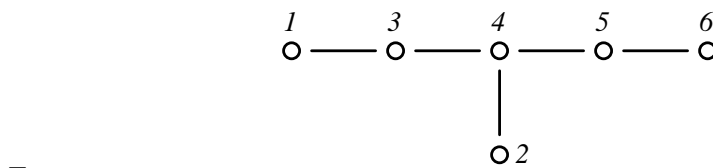
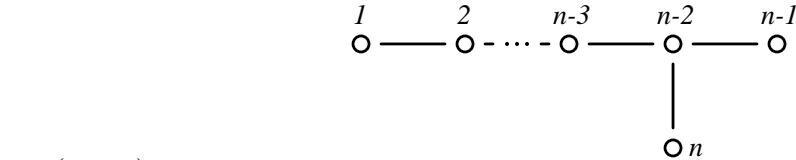
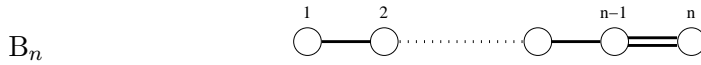
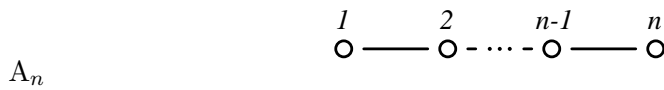
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

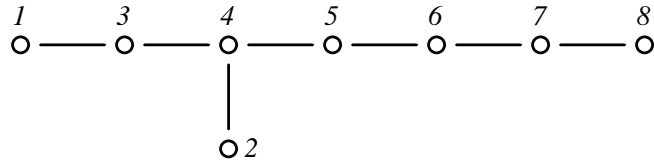
Comme  $p \geq q \geq r \geq 2$ , ceci entraîne que  $r = 2$  et  $q \leq 3$ . Si  $q = 2$  alors  $p$  est arbitraire, et si  $q = 3$  alors

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

et donc  $p \leq 5$ . Le lemme est démontré.  $\square$

On a donc obtenu que les graphes admissibles connexes sont les suivants. (La numérotation est celle de Bourbaki [BL4-6, Planches I-IX].)

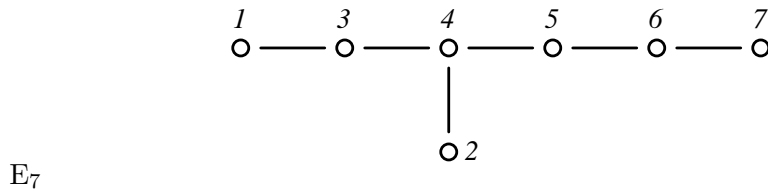
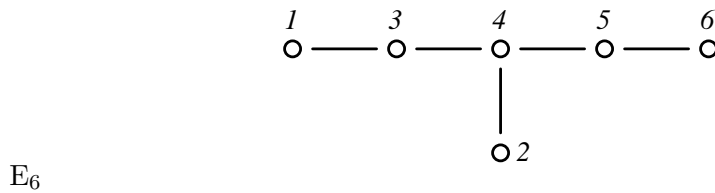
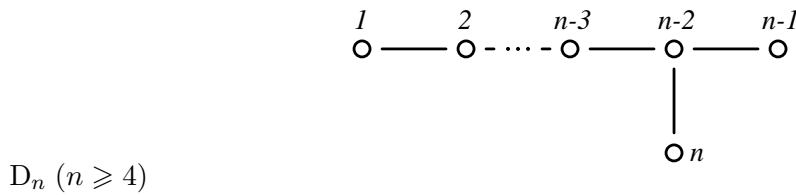
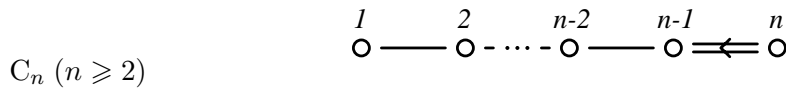
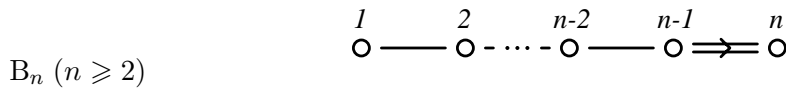
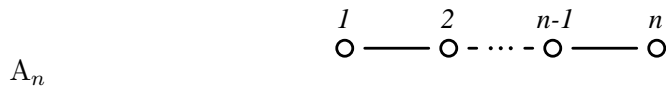


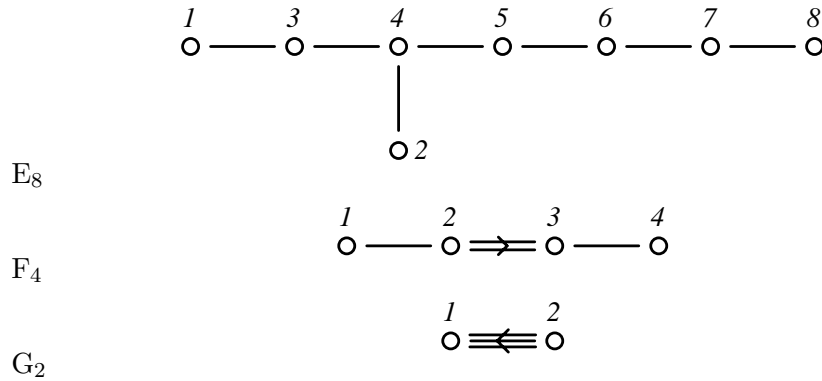


$E_8$

**10.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes.** — On obtient finalement le théorème ci-dessous, où la numérotation est celle de Bourbaki [BL4-6, Planches I-IX].

**Théorème 10.11.** — *Les diagrammes de Dynkin connexes sont exactement les diagrammes suivants, qui sont deux à deux non isomorphes, à l'exception de  $B_2 \cong C_2$  :*





### 11. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines

Pour terminer la classification des systèmes de racines, il reste à voir les deux points suivants.

(1) Le diagramme de Dynkin (ainsi que le graphe de Coxeter) ne dépend pas de la base de  $R$  choisie. Pour cela, on introduit le **groupe de Weyl de  $R$**  et l'on montre que toutes les bases de  $R$  sont conjuguées par  $W$ .

(2) Chacun des diagrammes de Dynkin obtenus plus haut provient d'un unique système de racines.

Pour ces deux points, on renvoie pour le moment au livre de Serre [Se, Ch. V, §§ 10–11 & 16] ou celui de Humphreys [Hu, §§ 10–12], voir aussi [BL4-6, Planches I–IX] pour une description plus détaillée des systèmes de racines.



# TABLE DES MATIÈRES

## I. Algèbres de Lie et représentations, le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

<i>Séances du 25 et 27/9</i> .....	1
1. Algèbres de Lie et représentations .....	1
1.1. Algèbres de Lie .....	1
1.2. Représentations .....	4
1.3. Dérivations et opérateurs différentiels .....	7
1.4. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ .....	9
1.5. Algèbres enveloppantes .....	11
1.6. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ .....	14
2. Généralités sur les modules .....	17
2.1. Modules simples et suites de composition .....	17
2.2. Modules semi-simples et socles .....	18
3. Semi-simplicité des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -modules de dimension finie .....	19
3.1. Élément de Casimir .....	19
3.2. Le théorème de semi-simplicité .....	21

## II. Algèbres de Lie résolubles ou semi-simples

<i>Séances du 2, 4 et 5/10</i> .....	25
4. Algèbres de Lie résolubles .....	25
4.1. Série dérivée .....	25
4.2. Algèbres de Lie nilpotentes .....	29
5. Théorèmes d'Engel et de Lie .....	31
5.1. Théorème d'Engel et applications .....	31
5.2. Théorème de Lie et conséquences .....	34
6. Forme de Killing et algèbres de Lie semi-simples .....	36
6.1. Algèbres de Lie semi-simples .....	36
6.2. Formes invariantes et forme de Killing .....	37

6.3. Critères de résolubilité et de semi-simplicité de Cartan .....	40
7. Décomposition de Jordan et dérivations .....	43
7.1. Dérivations .....	43
7.2. Décomposition de Jordan .....	45
<b>III. <math>\mathbb{C}</math>-algèbres de Lie semi-simples et systèmes de racines</b>	
<i>Séances du 9, 11 et 12/10</i> .....	49
8. $\mathbb{C}$ -algèbres de Lie semi-simples .....	49
8.0. Sous-algèbres torales maximales et espaces de poids .....	49
8.1. Passage à un $\mathbb{R}$ -espace euclidien .....	56
8.2. Le système de racines $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .....	58
8.3. Le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .....	59
9. Systèmes de racines .....	59
9.1. Définitions .....	59
9.2. Systèmes de racines de rang 2 .....	60
9.3. Bases d'un système de racines .....	63
9.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin .....	65
10. Classification des graphes admissibles .....	66
10.1. Premières réductions .....	66
10.2. Fin de la classification des graphes admissibles .....	68
10.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes .....	71
11. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines .....	72
Bibliographie .....	iii

**Bibliographie**

- [Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
- [BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.
- [BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
- [BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.
- [BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
- [BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.
- [BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
- [BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
- [Bu] D. Bump, Lie groups, Springer, 2004.
- [CR] C.W. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, John Wiley & Sons, 1962.
- [Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
- [DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
- [Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
- [Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
- [Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.
- [Her] I.N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
- [Hu] J.E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
- [Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
- [Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.
- [Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [Kna] A.W. Knap, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.
- [Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
- [La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
- [Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
- [Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.
- [MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

- [Mn] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes (Tableaux de Young, cône nilpotent, représentations des algèbres de Lie semi-simples), Calvage & Mounet, 2006.
- [Pe] E. Petracci, Universal representations of Lie algebras by coderivations, Bull. Sci. Math. 127 (2003), no. 5, 439-465.
- [Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, [www.math.jussieu.fr/~polo](http://www.math.jussieu.fr/~polo)
- [Pic] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.
- [Pie] R. S. Pierce, Associative algebras, Springer, 1982.
- [Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
- [Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.
- [Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.