III. $\mathbb{C}$-ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES (SUITE)

SÉANCES DU 18 ET 19/10

[5] **Un ajout dans le paragraphe 8.1.** Au début du paragraphe 8.1, il faut ajouter avant la définition 8.17 le paragraphe ci-dessous.

On note $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$ engendré par les h_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$. Comme R engendre $\mathfrak{h}^*$, on peut choisir des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ formant une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{h}^*$. Notons $h_1, \dots, h_\ell$ les éléments correspondants de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ils forment une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{h}$, et d'après le lemme suivant ils forment une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, d'où l'égalité $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \ell$.

Lemme. — *Pour tout $\beta \in \mathrm{R}$, h_β s'écrit de façon unique*

$$h_\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_{\beta,i} h_i$$

avec les $c_{\beta,i} \in \mathbb{Q}$ (donc a fortiori dans $\mathbb{R}$).

Démonstration. — Fixons $\beta \in \mathrm{R}$. Pour $j = 1, \dots, \ell$, on note $\mathrm{H}_j = \mathrm{H}_{\alpha_j}$, c.-à-d., $\mathrm{H}_j = \alpha_j(\mathrm{H}_j) h_j/2$. Alors les $c_{\beta,i}$, a priori dans $\mathbb{C}$, sont solutions du système suivant, où K est la forme de Killing :

$$(*) \qquad \forall\, j = 1, \dots, \ell, \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{K}(h_i, \mathrm{H}_j) c_{\beta,i} = \mathrm{K}(h_\beta, \mathrm{H}_j) = \alpha_j(h_\beta) \in \mathbb{Z}.$$

La matrice

$$(\mathrm{K}(h_i, \mathrm{H}_j))_{i,j=1,\dots,\ell}$$

est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (donc a fortiori dans $\mathbb{Q}$) puisque $\mathrm{K}(h_i, \mathrm{H}_j) = \alpha_j(h_i) \in \mathbb{Z}$ par le théorème d'intégralité ; de plus, comme $\mathrm{H}_j = (\alpha_j(\mathrm{H}_j)/2) h_j$, le déterminant de cette matrice est un multiple non nul du déterminant D de la matrice

$$(\mathrm{K}(h_i, h_j))_{i,j=1,\dots,\ell},$$

et $\mathrm{D} \neq 0$ puisque la restriction de K à $\mathfrak{h}$ est non-dégénérée. Donc $(c_{\beta,i})_{i=1,\dots,\ell}$ est l'unique solution du système $(*)$, et comme ce dernier est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, la solution est dans $\mathbb{Q}^\ell$. Ceci prouve que chaque $c_{\beta,i} \in \mathbb{Q}$, d'où le lemme, et le résultat que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est engendré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel par une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{h}$. $\square$

Pour une autre démonstration, voir [**BL4-6**, § VI.1, Prop. 1].

---

[5] version du 26/10, avec une note ajoutée dans la preuve du Th. 11.8.

11. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines

Dans le paragraphe 10.3, on a donné la liste des diagrammes de Dynkin, anticipant la fin de la classification des systèmes de racines. Pour terminer cette classification, il reste à voir les points suivants.

(1) Soit R un système de racines. Le diagramme de Dynkin D(R) (ainsi que le graphe de Coxeter $\mathscr{C}(\mathrm{R})$) ne dépend pas de la base de R choisie. Pour cela, on introduit le **groupe de Weyl de** R et l'on montre que toutes les bases de R sont conjuguées par W. Ceci est l'objet de cette section, dans laquelle on montre également que R est déterminé, à isomorphisme près, par son diagramme de Dynkin.

(2) D'autre part, d'après la classification des graphes admissibles obtenue en 10.2, les seuls diagrammes de Dynkin possibles sont ceux listés en 10.3. Il reste donc à montrer que chacun de ces diagrammes est effectivement le diagramme d'un système de racines R (nécessairement unique, d'après (1) ci-dessus).

Plutôt que de construire abstraitement les systèmes de racines, on construira dans la section suivante les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie simples « classiques », dont les systèmes de racines sont A_n, B_n, C_n, D_n, et l'on énoncera l'existence des cinq algèbres exceptionnelles de type $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$, F_4 et G_2.

Pour plus de détails sur les systèmes de racines, on renvoie au livre de Serre [**Se**, Ch. V, §§10–11 & 16] ou celui de Humphreys [**Hu**, §§10–12], voir aussi [**BL4-6**, Planches I–IX].

11.1. Groupe de Weyl et conjugaison des bases.

— Soit R un système de racines dans V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Définition 11.1 **(Automorphismes de** R**)**. — Soit A(R) le groupe des automorphismes de R (cf. Définition 9.3), c.-à-d.,

$$\mathrm{A}(\mathrm{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}) \mid g\mathrm{R} = \mathrm{R}\}.$$

Comme R engendre V, alors A(R) s'identifie à un sous-groupe du groupe des permutations de R ; c'est donc un groupe **fini**. D'après l'axiome (R2), on a $s_\alpha \in \mathrm{A}(\mathrm{R})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

Définition 11.2 **(Groupe de Weyl)**. — On appelle *groupe de Weyl de* R et on note W(R) ou simplement W, le sous-groupe de A(R) engendré par les réflexions s_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$.

Définition 11.3. — Une base Δ de R étant fixée, on note R^+ l'ensemble des racines qui sont somme d'éléments de Δ, et $\mathrm{R}^- = -\mathrm{R}^+$. Les éléments de Δ sont appelés les *racines simples*, ceux de R^+ et R^- les racines *positives* et *négatives*.

On pose

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \beta.$$

Notation 11.4. — Si α est une racine, on écrira parfois $\alpha > 0$ pour dire que $\alpha \in \mathrm{R}^+$, et de même $\alpha < 0$ pour dire que $\alpha \in \mathrm{R}^-$.

Lemme 11.5. — *Soit* $\alpha \in \Delta$. *Alors :* 1) s_α *laisse stable* $\mathrm{R}^+ \setminus \{\alpha\}$.

2) *On a* $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$, *et donc* $(\rho, \alpha^\vee) = 1$.

Démonstration. — 1) Soit $\gamma \in \mathrm{R}^+ \setminus \{\alpha\}$. On a $\gamma = \sum_{\beta \in \Delta} m_\beta \beta$, avec les $m_\beta \in \mathbb{N}$, et comme $\gamma \neq \alpha$, il existe $\beta \neq \alpha$ tel que $m_\beta \geqslant 1$. Comme

$$s_\alpha(\gamma) = \gamma - (\gamma, \alpha^\vee),$$

le coefficient de β dans $s_\alpha(\gamma)$ est inchangé, donc égal à $m_\beta \geqslant 1$. Donc $s_\alpha(\gamma)$ est une racine positive, distincte de α. Ceci prouve le point 1), et le point 2) en résulte. □

Notation 11.6. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on note $\mathscr{H}_\alpha$ l'hyperplan orthogonal à α :

$$\mathscr{H}_\alpha = \{\lambda \in \mathrm{V} \mid (\lambda, \alpha) = 0\}.$$

(Comme $\mathscr{H}_\alpha = \mathscr{H}_{-\alpha}$, on peut se limiter à considérer $\alpha \in \mathrm{R}^+$.) On note $\mathrm{V}_{\text{rég}}$ (cf. 9.8) le complémentaire de la réunion des $\mathscr{H}_\alpha$, c.-à-d.,

$$\mathrm{V}_{\text{rég}} = \mathrm{V} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathscr{H}_\alpha = \{\lambda \in \mathrm{V} \mid (\lambda, \alpha) \neq 0, \quad \forall\, \alpha \in \mathrm{R}\}.$$

***Définition 11.7* (Chambres de Weyl)**. — Les composantes connexes de $\mathrm{V}_{\text{rég}}$ s'appellent les *chambres de Weyl*. (Par exemple, en rang 2, ce sont des cônes ouverts triangulaires.)

La base Δ de R étant fixée, on pose

$$\mathrm{C} := \mathrm{C}^+(\Delta) = \{y \in \mathrm{V}_{\text{rég}} \mid (y, \alpha) > 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta\}.$$

On l'appelle la *chambre de Weyl dominante* (ou *positive*) associée à Δ. Réciproquement, avec la notation de 9.8, on a :

$$\forall\, y \in \mathrm{C}^+(\Delta), \qquad \Delta(y) = \Delta.$$

On rappelle que toute base de R est de la forme $\Delta(y)$, pour un certain $y \in \mathrm{V}_{\text{rég}}$ (théorème 9.12).

***Théorème 11.8* (Les bases de R sont conjugées)**. — *Soit* Δ *une base de* R.

(1) *Pour tout* $t \in \mathrm{V}_{\text{rég}}$, *il existe* $w \in \mathrm{W}$ *tel que* $w(t) \in \mathrm{C} := \mathrm{C}^+(\Delta)$. *Par conséquent,* W *agit transitivement sur l'ensemble des bases de* R.

(2) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *il existe* $w \in \mathrm{W}$ *tel que* $w(\alpha) \in \Delta$.

(3) W *est engendré par les réflexions* s_α, $\alpha \in \Delta$.

Démonstration. — Soit W′ le sous-groupe de W engendré par les s_α, $\alpha \in \Delta$. Nous allons d'abord démontrer (1)–(2) pour W′, puis en déduire que $\mathrm{W}' = \mathrm{W}$.

Soit $t \in \mathrm{V}_{\text{rég}}$, et soit $w \in \mathrm{W}$ tel que $(w(t), \rho)$ soit maximum (c'est possible puisque W est fini). Alors, pour tout $\alpha \in \Delta$ on a

$$(w(t), \rho) \geqslant (s_\alpha w(t), \rho) = (w(t), s_\alpha \rho) = (w(t), \rho) - (w(t), \alpha).$$

On en déduit que $(w(t), \alpha)$ est $\geqslant 0$, et en fait > 0 puisque $w(t)$ est régulier. Donc $w(t) \in \mathrm{C}$. Alors, $\Delta(w(t)) = \Delta$, et l'on en déduit que

$$\Delta(t) = w^{-1}\Delta = \{w^{-1}(\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}.$$

Ceci prouve (1).

Prouvons (2). Soit $\beta \in \mathrm{R}^+$, alors $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$, avec les $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur

$$\sum_\alpha n_\alpha, \qquad \text{appelé la } \textbf{hauteur} \text{ de } \beta,$$

qu'il existe $w \in \mathrm{W}'$ tel que $w'(\beta) \in \Delta$. D'abord, il existe $\alpha_0 \in \Delta$ tel que $(\beta, \alpha_0^\vee) > 0$, car sinon on aurait $(\beta, \beta) \leqslant 0$, impossible. Si $\beta = \alpha_0$, c'est gagné ; sinon

$$s_{\alpha_0}(\beta) = \beta - (\beta, \alpha_0^\vee)\alpha_0$$

est une racine positive de hauteur $<$ à celle de β, et donc par hypothèse de récurrence il existe $w' \in \mathrm{W}'$ tel que $w' s_{\alpha_0}(\beta) \in \Delta$. L'assertion (2) en découle.

(3) Montrons que $\mathrm{W}' = \mathrm{W}$. Par définition, W est engendré par les s_β, pour $\beta \in \mathrm{R}$. Comme $s_\beta = s_{-\beta}$, on peut se limiter à $\beta \in \mathrm{R}^+$. D'après (2), il existe $w \in \mathrm{W}'$ tel que $w(\beta) = \alpha \in \Delta$. Or, pour tout $\sigma \in \mathrm{W}$, on voit facilement que

$$\sigma s_\beta \sigma^{-1} = s_{\sigma(\beta)}.\text{[6]}$$

Par conséquent, s_β égale $w^{-1} s_\alpha w$ donc appartient à W′. Il en résulte que $\mathrm{W} = \mathrm{W}'$. Le théorème est démontré. □

Corollaire 11.9. — *Le graphe de Coxeter* $\mathscr{C}(\mathrm{R})$ *et le diagramme de Dynkin* D(R) *ne dépendent que de* R.

Démonstration. — Soit Δ' une autre base de R. D'après le théorème précédent, il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $\Delta' = w(\Delta)$. Comme w préserve le produit scalaire, on a

$$w(\alpha^\vee) = w(\alpha)^\vee \quad \text{et} \quad (w(\beta), w(\alpha)^\vee) = (\beta, \alpha^\vee), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \Delta.$$

Il en résulte que Δ et Δ' définissent les mêmes graphe de Coxeter et diagramme de Dynkin. □

[6] C'est vrai, plus généralement, pour tout $\sigma \in \mathrm{A}(\mathrm{R})$, cf. [**Hu**, Lemma 9.2] ; voir aussi [**BL4-6**, § VI.1] Lemme 1 et Proposition 16.

11.2. Isomorphismes de systèmes de racines. — Dans ce paragraphe, on va montrer qu'un système de racines R est entièrement déterminé par son diagramme de Dynkin. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 11.10. — *Soit* R' *un système de racines dans un espace euclidien* V'*, soit* Δ' *une base de* R'*, et supposons donnée une bijection* $\phi : \Delta \to \Delta'$ *telle que*

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)^\vee) = (\alpha, \beta^\vee) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \Delta;$$

(*c.-à-d.,* ϕ *est un isomorphisme entre les diagrammes de Dynkin*).

Comme Δ*, resp.* Δ' *est une base de* V*, resp.* V'*, alors* ϕ *se prolonge en un isomorphisme linéaire* $\mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}'$*, encore noté* ϕ*. Alors*

$$\phi(\mathrm{R}) = \mathrm{R}'$$

et donc R *et* R' *sont isomorphes.*

Démonstration. — Soient $\alpha, \beta \in \Delta$. Alors

$$(s_{\phi(\alpha)} \circ \phi)(\beta) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - (\phi(\beta), \phi(\alpha)^\vee)\phi(\alpha),$$

et

$$(\phi \circ s_\alpha)(\beta) = \phi(\beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha) = \phi(\beta) - (\beta, \alpha^\vee)\phi(\alpha).$$

Comme $(\phi(\beta), \phi(\alpha)^\vee) = (\beta, \alpha^\vee)$, ces deux expressions sont égales, et comme Δ engendre V on en déduit que

$$s_{\phi(\alpha)} = \phi \circ s_\alpha \circ \phi^{-1}, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta.$$

Comme, d'après 11.8, W (resp. W') est engendré par les s_α (resp. $s_{\phi(\alpha)}$), pour $\alpha \in \Delta$, il en résulte que l'application

$$w \mapsto \phi \circ w \circ \phi^{-1}$$

induit un isomorphisme $\mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}'$. Enfin, comme $\mathrm{R} = \mathrm{W}\Delta$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{W}'\Delta'$, d'après 11.8 à nouveau, on en tire que $\phi(\mathrm{R}) = \mathrm{R}'$. Ceci prouve le théorème. □

11.3. Fin de la classification des systèmes de racines. — Soit R un système de racines. On a vu que le diagramme de Dynkin D(R) est bien défini (c.-à-d., indépendant du choix d'une base) et détermine R. D'autre part, on a la proposition suivante.

Proposition 11.11. — *Soient* R *et* R' *des systèmes de racines dans* V *et* V'*. Alors* $\mathrm{R} \sqcup \mathrm{R}'$ (*réunion disjointe*) *est un système de racine dans la somme directe orthogonale*

$$\mathrm{V} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{V}',$$

et son diagramme de Dynkin est la réunion disjointe de $\mathrm{D}(\mathrm{R})$ *et* $\mathrm{D}(\mathrm{R}')$.

Démonstration. — On vérifie facilement que $R \sqcup R'$ est un système de racines et que, si Δ, resp. Δ' est une base de R, resp. R', alors

$$\Delta \sqcup \Delta' \quad \text{est une base de} \quad R \sqcup R'.$$

Comme $(\alpha, \beta) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Delta'$, il en résulte que le diagramme de Dynkin de $R \sqcup R'$ est la réunion disjointe de D(R) et D(R'). □

Notation 11.12. — On dit que $R \sqcup R'$ est la **somme directe** de R et R'. Pour plus de détails, voir [**BL4-6**, VI.1.2] ou [**Hu**, 10.4 & 11.3].

Par conséquent, pour terminer la classification des systèmes de racines, il suffit de montrer que chacun des diagrammes connexes énumérés au paragraphe 10.3 est effectivement le diagramme de Dynkin d'un système de racines.

Pour A_n, B_n, C_n, D_n, on va voir cela dans la section suivante. D'autre part, on a déjà vu (§ 9.2) le système de racines G_2 de rang 2. Avec les notations du § 9.2, les racines suivantes

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \sqrt{3}\, \exp(i5\pi/6) = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

forment une base de G_2. On a

$$(\beta, \alpha^\vee) = 2(\beta, \alpha) = -3,$$

et donc le diagramme de Dynkin associé est bien celui de type G_2.

Enfin, pour les systèmes de racines de type E_6, E_7, E_8 et F_4, on renvoie à [**BL4-6**, Planches I–IX].

12. Classification des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples

12.1. Sous-algèbres de Cartan. —

Définition 12.1. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie. Le **normalisateur** de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

Il résulte de l'identité de Jacobi que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Lie, et il est clair que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre torale maximale. On a vu que $\mathfrak{h}$ est abélienne (Proposition 8.4), et égale à son centralisateur (Théorème 8.7). De plus, il résulte de la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

que

$$\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}.$$

En effet, supposons que $x \in \mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ ait une composante x_α non nulle. Alors, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, $[h,x]$ appartient à $\mathfrak{h}$ et a pour composante $\alpha(h)x_\alpha$ sur $\mathfrak{g}_\alpha$. Choisissant h tel que $\alpha(h) \neq 0$, on obtient une contradiction. Par conséquent, $\mathfrak{h}$ est une **sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$** au sens de la définition suivante.

***Définition 12.2* (Sous-algèbres de Cartan).** — Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ telle que : 1) $\mathfrak{a}$ est nilpotente, 2) $\mathfrak{a} = \mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.

Définition 12.3. — Le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ est

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid [g\mathrm{X}, g\mathrm{Y}] = g([\mathrm{X},\mathrm{Y}]), \quad \forall\, \mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathfrak{g}\}.$$

Remarque 12.4. — Posons $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$. Alors $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe *algébrique* de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, c.-à-d., défini par des équations polynomiales.

En effet, soit $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Posons, pour $r,s = 1,\dots,n$,

$$[\mathrm{X}_r, \mathrm{X}_s] = \sum_{t=1}^{n} c_t^{r,s} \mathrm{X}_t.$$

(Les $c_t^{r,s}$ s'appellent les constantes de structure du crochet de Lie, dans la base $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$.) Soit $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ si et seulement si, pour tout r,s on a :

$$[g\mathrm{X}_r, g\mathrm{X}_s] = \sum_{t=1}^{n} c_t^{r,s} g\mathrm{X}_t,$$

et ceci équivaut à :

$$\forall\, r,s,k \qquad \sum_{i,j} g_{ir} g_{js} c_k^{i,j} = \sum_t c_t^{r,s} g_{kt}.$$

***Théorème 12.5* (Conjugaison des sous-algèbres de Cartan)**

Toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — On renvoie au livre de Serre : [**Se**, § III.4]. En fait, ce théorème est valable pour *toute* $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie (pas nécessairement semi-simple). □

Dans notre cas, où $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 12.6. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. Alors une sous-algèbre de Cartan est la même chose qu'une sous-algèbre torale maximale.*

Démonstration. — On a vu que toute sous-algèbre torale maximale est une sous-algèbre de Cartan. Comme ces dernières sont toutes conjuguées par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, le corollaire en découle. □

12.2. Le système de racines de $\mathfrak{g}$. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre torale maximale, c.-à-d., d'après le paragraphe précédent, une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a vu (§ 8.2) que les poids non nuls de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ forment un système de racines $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, où $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ désigne le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{h}^*$ engendré par R.

À isomorphisme près, ce système de racines ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$, d'après la proposition suivante.

Proposition 12.7. — $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de* $\mathfrak{h}$. *On dira que c'est le système de racines de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h}'$ une autre sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. D'après le théorème 12.5, il existe $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ tel que $g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$.

Soient $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul. Alors, pour tout $h' = g(h) \in \mathfrak{h}'$ on a :

$$[h', g(x)] = g([h, x]) = \alpha(h) g(x) = (\alpha \circ {}^t g^{-1})(h')\, g(x).$$

Ceci montre que $\alpha \circ {}^t g^{-1}$ est un poids, non nul, de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}$. On montre de même que, pour tout $\alpha' \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$, $\alpha' \circ {}^t g$ est un poids non nul de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Il en résulte que l'isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire

$${}^t g^{-1} : \mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}'^*$$

applique bijectivement $\mathrm{R} := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur $\mathrm{R}' := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ (et donc $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ sur $\mathfrak{h}'^*_{\mathbb{R}}$). Ceci montre que les systèmes de racines R et R′ sont isomorphes (cf. Définition 9.3). □

12.3. Théorème d'existence et d'unicité. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines de $\mathfrak{g}$. Soit

$$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

une base de R. Pour $i = 1, \dots, n$, soit $e_i \neq 0$ dans $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, et soit h_i l'élément de $\mathfrak{h}$ correspondant à $\alpha_i^\vee$, c.-à-d., l'unique élément $h_i \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\alpha_j(h_i) = (\alpha_j, \alpha_i^\vee), \qquad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

Enfin, soit f_i l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tel que $[e_i, f_i] = h_i$ (cf. 8.14). Alors, $(h_1, \dots, h_n)$ est une base de $\mathfrak{h}$, et l'on a les relations suivantes, pour tout i, j :

$$(1) \qquad [h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = (\alpha_j, \alpha_i^\vee) e_j, \quad [h_i, f_j] = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) f_j,$$

$$(2) \qquad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i,$$

$$(3) \qquad \text{si } i \neq j, \qquad (\mathrm{ad}\, e_i)^{-(\alpha_j, \alpha_i^\vee)+1}(e_j) = 0 = (\mathrm{ad}\, f_i)^{-(\alpha_j, \alpha_i^\vee)+1}(f_j).$$

En effet, soient $i \neq j$. Alors $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$, d'où $\mathfrak{g}_{\alpha_i - \alpha_j} = 0$ et donc $[e_i, f_j] = 0$, ce qui prouve (2).

Alors, considérant $\mathfrak{g}$ comme un $\mathfrak{sl}_{\alpha_i}$-module (pour l'action adjointe), f_j est un vecteur non nul de $\mathfrak{g}$ annulé par $\operatorname{ad} e_i$ et de poids

$$n := -\alpha_j(h_i) = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}$$

pour $\operatorname{ad} h_i$; par conséquent, d'après le théorème 1.48, on a :

$$0 = (\operatorname{ad} f_i)^{n+1}(f_j) = (\operatorname{ad} f_i)^{1-(\alpha_j,\alpha_i^\vee)}(f_j).$$

Ceci prouve la seconde partie de 3). La première s'en déduit, en utilisant l'automorphisme θ de $\mathfrak{sl}_2$ qui échange e et f et change h en $-h$.

Théorème 12.8. — 1) $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à la* $\mathbb{C}$-*algèbre de Lie définie par* $3n$ *générateurs* $(h_i, e_i, f_i)_{i=1,\dots,n}$ *soumis aux relations* (1)–(3) *ci-dessus. Par conséquent,* $\mathfrak{g}$ *est déterminée, à isomorphisme près, par son système de racines* R.

2) *Réciproquement, soient* R *un système de racines arbitraire et* Δ *une base de* R*. Alors la* $\mathbb{C}$-*algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *définie par* $3n$ *générateurs* $(h_i, e_i, f_i)_{i=1,\dots,n}$ *soumis aux relations* (1)–(3) *est semi-simple ; les* h_i *forment une base d'une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$*, et l'on a* $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{R}$.

3) *De plus, les idéaux simples de* $\mathfrak{g}$ *correspondent aux composantes connexes de* D(R)*. Par conséquent, les* $\mathbb{C}$-*algèbres de Lie simples sont en bijection avec les diagrammes de Dynkin connexes, à savoir :*

$$\mathrm{A}_n, \quad \mathrm{B}_n, \quad \mathrm{C}_n, \quad \mathrm{D}_n, \quad \mathrm{E}_6, \quad \mathrm{E}_7, \quad \mathrm{E}_8, \quad \mathrm{F}_4, \quad \mathrm{G}_2.$$

Démonstration. — Pour la démonstration, on renvoie à [**Se**, Chap. VI] ou [**Hu**, § 18]. □

On va décrire plus bas les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie simples « classiques », correspondant aux diagrammes de type A–D.

12.4. Type $\mathrm{A}_{n-1} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$**.** — Les matrices

$$\mathrm{E}_{i,j} \quad \text{pour } i \neq j \ \text{ et } \ \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i+1,i+1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

forment une base de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$; les secondes forment une base de $\mathfrak{h}$, la sous-algèbre des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n$. Introduisons aussi $\widehat{\mathfrak{h}}$, l'algèbre des matrices diagonales dans $\mathfrak{gl}_n$. Alors $(\mathrm{E}_{1,1}, \dots, \mathrm{E}_{n,n})$ est une base de $\widehat{\mathfrak{h}}$; soit

$$(\widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n)$$

la base duale, c.-à-d., chaque $\widehat{\varepsilon}_i$ est la forme linéaire qui associe à toute matrice diagonale son i-ème coefficient diagonal. Pour tout $\widehat{h} \in \widehat{\mathfrak{h}}$ et tout $i \neq j$, on a

$$[\widehat{h}, \mathrm{E}_{i,j}] = (\widehat{\varepsilon}_i - \widehat{\varepsilon}_j)(\widehat{h})\, \mathrm{E}_{i,j}.$$

Notons ε_i la restriction de $\widehat{\varepsilon}_i$ à $\mathfrak{h}$. Alors, de la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}\mathrm{E}_{i,j} \tag{1}$$

on déduit que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan et que les racines sont les

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

On munit $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ du produit scalaire pour lequel $(\widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n)$ est une base orthonormale. Alors, pour tout $i \neq j$, la réflexion orthogonale $s_{i,j}$ associée à $\widehat{\varepsilon}_i - \widehat{\varepsilon}_j$ échange $\widehat{\varepsilon}_i$ et $\widehat{\varepsilon}_j$, et vérifie $s_{i,j}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$ pour $k \neq i, j$, et le groupe engendré est le groupe symétrique $\mathrm{W} = \mathrm{S}_n$, agissant par permutation des $\widehat{\varepsilon}_i$.

Alors, $\mathfrak{h}^*$ s'identifie à l'orthogonal de $\widehat{\varepsilon}_1 + \cdots + \widehat{\varepsilon}_n$ (qui est stable par W) et

$$\mathrm{R} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

est un système de racines dans $\mathfrak{h}^*$. Posons

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Alors $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ est une base de R, pour laquelle les racines positives sont les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, avec $i < j$. En effet, c'est une base de $\mathfrak{h}^*$, et pour $i < j$ l'on a :

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k.$$

Chaque $\beta \in \mathrm{R}$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à $\beta^\vee$, et pour $i < j$ l'on a

$$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } j = i+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type A_{n-1}.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1)/2$ racines positives, et (1) redonne bien la dimension connue :

$$\dim \mathfrak{g} = n - 1 + 2\,\frac{n(n-1)}{2} = (n-1)(n+1) = n^2 - 1,$$

12.5. Types B **et** D **: groupes orthogonaux.** — Soit ϕ une forme bilinéaire **symétrique** non dégénérée sur $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ et soit J sa matrice dans la base standard $(e_1, \dots, e_{\mathrm{N}})$. Alors, pour

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i e_i, \qquad \mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i e_i,$$

on a, en notation matricielle,

$$\phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = {}^t\mathrm{XJY} \qquad \text{et} \qquad \phi(\mathrm{AX}, \mathrm{AY}) = {}^t\mathrm{X}\,({}^t\mathrm{AJA})\,\mathrm{Y}$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$. Alors le groupe orthogonal de ϕ, formé des $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ qui préservent ϕ, est égal à :

$$(*) \qquad \mathrm{O}(\phi) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{AJA} = \mathrm{J}\}.$$

Il sera montré dans le cours *Groupes algébriques et groupes de Lie* I, que l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}(\phi)$ est obtenue en dérivant en $\mathrm{A} = \mathrm{id}$ l'égalité ${}^t\mathrm{AJA} = \mathrm{J}$; c.-à-d., l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}(\phi)$ est :

$$(**) \qquad \mathfrak{so}(\phi) = \mathfrak{so}(\mathrm{J}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{AJ} + \mathrm{JA} = 0\}.$$

Pour le moment, prenons ceci comme *définition* de $\mathfrak{so}(\phi)$. On vérifie facilement que c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme J est symétrique, la condition ${}^t\mathrm{AJ} + \mathrm{JA} = 0$ équivaut à dire que la matrice JA est antisymétrique, et comme J est inversible on obtient que $\mathfrak{so}(\phi) = \mathrm{J}^{-1}\mathcal{AS}_\mathrm{N}(\mathbb{C})$, où $\mathcal{AS}_\mathrm{N}(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des matrices antisymétriques. Donc

$$(***). \qquad \dim \mathfrak{so}(\phi) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}.$$

De plus, les égalités $\mathrm{A} = -\mathrm{J}^{-1}\,({}^t\mathrm{A})\mathrm{J}$ et $\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$ entraînent que

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathfrak{so}(\phi), \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0, \quad \text{et donc} \quad \mathfrak{so}(\phi) \subseteq \mathfrak{sl}_\mathrm{N}(\mathbb{C}),$$

ce qui justifie la notation $\mathfrak{so}(\phi)$. Enfin, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, toutes les formes bilinéaires symétriques non dégénérées sont équivalentes. Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(\phi)$ obtenues sont donc toutes isomorphes, et par abus de notation l'on désignera par

$$\mathfrak{so}_\mathrm{N} = \mathfrak{so}_\mathrm{N}(\mathbb{C})$$

l'une quelconque d'entre elles, correspondant à un J arbitrairement choisi.

On pourrait prendre

$$\mathrm{J} = \mathrm{id}, \quad \text{qui correspond à} \quad \phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i \mathrm{Y}_i,$$

c.-à-d., à la forme quadratique $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \phi(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i^2$. Mais il est plus commode de prendre pour J la matrice ayant des 1 sur la 2ème diagonale et des 0 partout ailleurs, c.-à-d.,

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 0 \cdots & 0 & 1 \\ 0 \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{J}^{-1} = \mathrm{J}$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$, l'on a :

(†) $\mathrm{J}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{J}$ est la « symétrique de A par rapport à la 2ème diagonale ».

Écrivons $\mathrm{N} = 2n$ ou $2n+1$, selon la parité de N. (Explicitement, n est le plus petit entier $\geqslant (\mathrm{N}-1)/2$.) Il est commode d'introduire la notation suivante. On pose, pour tout entier $i \leqslant n$:

$$\bar{i} = \mathrm{N} + 1 - i.$$

Avec cette notation, la base standard de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ est notée :

$$\begin{array}{ll} (e_1, \dots, e_n, e_{\overline{n}}, \dots, e_{\overline{1}}) & \text{si } \mathrm{N} = 2n; \\ (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{\overline{n}}, \dots, e_{\overline{1}}) & \text{si } \mathrm{N} = 2n+1. \end{array}$$

Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{\mathrm{N}}$ et soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des matrices diagonales dans $\mathfrak{g}$. On déduit de (†) que les matrices :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{\overline{i},\overline{i}}, \qquad i = 1, \dots, n;$$

forment une base de $\mathfrak{h}$. Notons

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

la base duale de $\mathfrak{h}^*$, c.-à-d.,

$$(\star) \qquad \forall\, h = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{H}_i \in \mathfrak{h}, \qquad \varepsilon_i(h) = x_i.$$

De plus, on déduit de (†) que, avec les H_i, les matrices suivantes forment une base de $\mathfrak{g}$:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} := \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\overline{j},\overline{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)} := \mathrm{E}_{j,i} - \mathrm{E}_{\overline{i},\overline{j}}, \end{cases} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} := \mathrm{E}_{i,\overline{j}} - \mathrm{E}_{j,\overline{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} := \mathrm{E}_{\overline{j},i} - \mathrm{E}_{\overline{i},j}, \end{cases} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$\text{(4)} \qquad \text{et, si } \mathrm{N} = 2n+1, \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i} := \mathrm{E}_{i,n+1} - \mathrm{E}_{n+1,\overline{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-\varepsilon_i} := \mathrm{E}_{n+1,i} - \mathrm{E}_{\overline{i},n+1}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

On vérifie que chaque X_α, resp. $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, est de poids α, resp. $-\alpha$, par exemple :

$$[h, \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\overline{j},\overline{i}}] = (x_i - x_j)\mathrm{E}_{i,j} + (x_j - x_i)\mathrm{E}_{\overline{j},\overline{i}} = (x_i - x_j)\left(\mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\overline{j},\overline{i}}\right).$$

Désignant par $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, le sous-espace des matrices $\mathrm{A} \in \mathfrak{g}$ qui sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) avec des 0 sur la diagonale, on obtient que les X_α, resp. les $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, forment une base de $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, et que cette décomposition

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^+ \sqcup \mathrm{R}^-$$

correspond au choix de la base de R suivante.

12.5.1. Cas de $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. — Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n-1; \\ \alpha_n &= \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de R ; les racines positives correspondantes sont les :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i - \varepsilon_j = \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ &\varepsilon_i + \varepsilon_n = \alpha_n + \textstyle\sum_{k=i}^{n-2} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1; \\ &\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_n + \alpha_{n-1} + 2\textstyle\sum_{k=j}^{n-2} \alpha_k + \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n-1. \end{aligned}$$

Comme en type A, chaque $\beta \in \mathrm{R}$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à $\beta^\vee$, et pour $i < j$ l'on a

$$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } j = i+1 \text{ ou si } j = n \text{ et } i = n-2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type D_n.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1)$ racines positives, et la base donnée par (1)–(3) redonne bien la dimension déjà calculée :

$$\dim \mathfrak{g} = n + 2n(n-1) = n(2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2}.$$

12.5.2. Cas de $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. — Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n-1; \\ \alpha_n &= \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de R ; les racines positives correspondantes sont les :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i - \varepsilon_j &= \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ \varepsilon_i &= \textstyle\sum_{k=i}^{n} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j &= \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2\textstyle\sum_{k=j}^{n} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{aligned}$$

Cette fois, chaque racine $\beta = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à $\beta^\vee$; par contre, pour $\alpha = \varepsilon_i$ on a $\alpha^\vee = 2\alpha$. Il en résulte que l'on a, pour $i < j$:

$$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = \begin{cases} -2 & \text{si } j = n \text{ et } i = j-1; \\ -1 & \text{si } j < n \text{ et } i = j-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type B_n.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1) + n = n^2$ racines positives, et la base donnée par (1)–(4) redonne bien la dimension déjà calculée :

$$\dim \mathfrak{g} = n + 2n^2 = n(2n+1) = \frac{(2n+1)2n}{2}.$$

12.6. Type C **: groupes symplectiques.** — Soit ϕ une forme bilinéaire **antisymétrique** non dégénérée sur $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$. Alors, nécessairement, $\mathrm{N} = 2n$ et, comme toutes les formes symplectiques sont équivalentes, on peut supposer que la matrice de ϕ dans la base $(e_1, \dots, e_{2n})$ est

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{S} \\ \mathrm{S} & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice ayant des 1 sur la 2ème diagonale et des 0 partout ailleurs. C.-à-d., pour $i = 1, \dots, n$, posant $\overline{i} = 2n + 1 - i$, on a :

$$\phi(e_i, e_{\overline{i}}) = 1 = -\phi(e_{\overline{i}}, e_i)$$

et $\phi(e_i, e_j) = 0$ si $j \neq \overline{i}$. Alors le groupe symplectique, formé des $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ qui préservent ϕ, est égal à :

$$(*) \qquad \mathrm{SP}(2n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{AJA} = \mathrm{J}\}.$$

Comme pour les groupes orthogonaux, on peut montrer que l'algèbre de Lie de $\mathrm{SP}(2n)$ est

$$(**) \qquad \mathfrak{sp}_{2n} = \{a \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t a\mathrm{J} + \mathrm{J}a = 0\}.$$

Pour le moment, prenons ceci comme *définition* de $\mathfrak{sp}_{2n}$. On vérifie facilement que c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Comme J est antisymétrique, ceci équivaut à dire que la matrice $\mathrm{J}a$ est symétrique, et comme J est inversible on obtient que $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathrm{J}^{-1}\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{C})$, où $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des matrices symétriques. Donc

$$(***) \qquad \dim \mathfrak{sp}_{2n} = n(2n+1).$$

De plus, les égalités $a = -\mathrm{J}^{-1}({}^t a)\mathrm{J}$ et $\mathrm{Tr}({}^t a) = \mathrm{Tr}(a)$ entraînent que

$$\forall\, a \in \mathfrak{sp}_{2n}, \quad \mathrm{Tr}(a) = 0, \quad \text{et donc} \quad \mathfrak{sp}_{2n} \subseteq \mathfrak{sl}_{2n},$$

ce qui justifie la notation $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Écrivant $a = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on voit que la condition ${}^t a\mathrm{J} + \mathrm{J}a = 0$ est équivalente aux conditions suivantes :

$$(\ddagger) \qquad \mathrm{D} = -\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{AS}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{S}\,{}^t\mathrm{BS}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{S}\,{}^t\mathrm{CS}.$$

Donc A est arbitraire et, d'après (†) vu dans le cas orthogonal, B et C sont symétriques par rapport à la 2ème diagonale et $-\mathrm{D}$ est le symétrique de A par rapport à la 2ème diagonale.

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des matrices diagonales dans $\mathfrak{sp}_{2n}$. On déduit de (‡) que les matrices :

$$(1) \qquad \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{\overline{i},\overline{i}}, \qquad i = 1, \dots, n;$$

forment une base de $\mathfrak{h}$. Notons

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

la base duale de $\mathfrak{h}^*$, c.-à-d.,

$$(\star) \qquad \forall\, h = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{H}_i \in \mathfrak{h}, \qquad \varepsilon_i(h) = x_i.$$

De plus, on déduit de (‡) que, avec les H_i, les matrices suivantes forment une base de $\mathfrak{g}$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} := \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\bar{j},\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)} := \mathrm{E}_{j,i} - \mathrm{E}_{\bar{i},\bar{j}}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} := \mathrm{E}_{i,\bar{j}} + \mathrm{E}_{j,\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} := \mathrm{E}_{\bar{j},i} + \mathrm{E}_{\bar{i},j}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{2\varepsilon_i} := \mathrm{E}_{i,\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-2\varepsilon_i} := \mathrm{E}_{\bar{i},i}, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

On vérifie que chaque X_α, resp. $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, est de poids α, resp. $-\alpha$. Désignant par $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, le sous-espace des matrices $\mathrm{A} \in \mathfrak{sp}_{2n}$ qui sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) avec des 0 sur la diagonale, on obtient que les X_α, resp. les $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, forment une base de $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, et que cette décomposition

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^+ \sqcup \mathrm{R}^-$$

correspond au choix de la base de R suivante. Posons

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n-1; \\ \alpha_n &= 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de R ; les racines positives correspondantes sont les :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i - \varepsilon_j &= \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ 2\varepsilon_i &= \alpha_n + 2 \textstyle\sum_{k=i}^{n-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j &= \alpha_n + 2 \textstyle\sum_{k=j}^{n-1} \alpha_k + \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{aligned}$$

Chaque racine $\beta = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à la coracine $\beta^\vee$; par contre, pour $\alpha = 2\varepsilon_i$ on a $\alpha^\vee = \alpha/2$. Il en résulte que l'on a, pour $i < j$:

$$(\alpha_j, \alpha_i^\vee) = \begin{cases} -2 & \text{si } j = n \text{ et } i = j-1; \\ -1 & \text{si } j < n \text{ et } i = j-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type C_n.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1)+n=n^2$ racines positives, et la base donnée par (1)–(4) redonne bien la dimension déjà calculée :

$$\dim \mathfrak{sp}_{2n} = n + 2n^2 = n(2n+1).$$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Bu] D. Bump, Lie groups, Springer, 2004.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, John Wiley & Sons, 1962.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Mn] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes (Tableaux de Young, cône nilpotent, représentations des algèbres de Lie semi-simples), Calvage & Mounet, 2006.

[Pe] E. Petracci, Universal representations of Lie algebras by coderivations, Bull. Sci. Math. 127 (2003), no. 5, 439-465.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pic] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Pie] R. S. Pierce, Associative algebras, Springer, 1982.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.