IV. RÉDUCTIBILITÉ COMPLÈTE ET MODULES DE PLUS HAUT POIDS

SÉANCES DU 25 ET 26/10

13. Modules de plus haut poids

13.1. Sous-algèbres de Borel et décomposition triangulaire. — [5] Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, R le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et R^+ l'ensemble de racines positives correspondant au choix d'une base Δ. On rappelle que les éléments de Δ sont appelés les *racines simples.*

On pose

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \mathfrak{g}_{-\alpha};$$

ce sont deux sous-algèbres de Lie *nilpotentes* (puisque $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$). On pose aussi

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+;$$

on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] \subseteq \mathfrak{n}^+$, et donc $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie *résoluble* de $\mathfrak{g}$. De plus, on a l'égalité $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] = \mathfrak{n}^+$, car $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}^+$ et $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$.

Définition 13.1. — On dit que $\mathfrak{b}$ est une **sous-algèbre de Borel** de $\mathfrak{g}$.

Remarque 13.2. — La définition « officielle » est la suivante. On dit qu'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Borel si c'est une sous-algèbre de Lie *résoluble maximale*. On peut montrer que toutes les sous-algèbres de Borel sont conjuguées par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. D'autre part, on peut vérifier que notre $\mathfrak{b}$ ci-dessus est bien une sous-algèbre résoluble *maximale*, donc une sous-algèbre de Borel au sens précédent. Par conjugaison, toutes les sous-algèbres de Borel sont de cette forme, donc sont obtenues en choisissant une sous-algèbre de

[5] **Une correction.** Dans la preuve du lemme 6.16 (Ch. II), remplacer la phrase après « Ceci prouve (†). » par la suivante : « D'autre part, comme $\mathrm{ad}\, s$ est la partie semi-simple de $\mathrm{ad}\, x$, il existe $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, sans terme constant, tel que $\mathrm{ad}\, s = \mathrm{R}(\mathrm{ad}\, x)$. Alors, $\mathrm{ad}\, x_f = \mathrm{P}_f(\mathrm{ad}\, s) = \mathrm{P}_f(\mathrm{R}(\mathrm{ad}\, x))$ est un polynôme en $\mathrm{ad}\, x$ sans terme constant. ».

Cartan $\mathfrak{h}$ puis un ensemble de racines positives R^+ dans $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pour tout cela, voir [**BL7-8**, § VIII.3, no. 3] ou [**Hu**, § 16].

Définition 13.3 **(Décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$).** — On obtient donc la décomposition suivante de $\mathfrak{g}$:

$$(\triangle_{\mathfrak{g}}) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{b},$$

appelée *décomposition triangulaire* (probablement parce que dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ et $\mathfrak{h}$ = matrices diagonales de trace nulle, les sous-algèbres $\mathfrak{n}^-$ et $\mathfrak{n}^+$ correspondent aux matrices triangulaires inférieures et supérieures).

Définition 13.4 **(Décomposition triangulaire de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$).** — D'après le théorème de PBW, on déduit de $(\triangle_{\mathfrak{g}})$ que l'application de multiplication $(u^-, u^0, u^+) \mapsto u^-u^0u^+$ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$(\triangle_{\mathrm{U}}) \qquad \phi : \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n}^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g});$$

de plus, c'est clairement un isomorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$-modules, où $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$ agit par multiplication à gauche sur lui-même et sur $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

13.2. Vecteurs et modules de plus haut poids. —

Définition 13.5 **(Les $\mathfrak{b}$-modules $\mathbb{C}_\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$).** — Soit V un $\mathfrak{b}$-module de dimension finie. Comme $\mathfrak{b}$ est résoluble, il résulte du théorème de Lie 5.8 qu'il existe une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{b}^*$, nulle sur l'algèbre dérivée $\mathscr{D}(\mathfrak{b})$, et un vecteur non nul $v \in \mathrm{V}$, tels que

$$\mathrm{X}v = \lambda(\mathrm{X})v, \qquad \forall\, \mathrm{X} \in \mathfrak{b}.$$

Or, on a vu plus haut que $\mathscr{D}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{n}^+$, et comme $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, alors $(\mathfrak{b}/\mathfrak{n}^+)^*$ s'identifie à $\mathfrak{h}^*$. Ceci conduit à la définition suivante. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathfrak{b}$-module de dimension 1 sur lequel $\mathfrak{n}^+$ agit par 0 et $\mathfrak{h}$ via λ. C'est un $\mathfrak{b}$-module simple, et d'après ce qui précède, tout $\mathfrak{b}$-module simple *de dimension finie* est de cette forme.

Définition 13.6 **(Vecteurs primitifs).** — Soit V un $\mathfrak{g}$-module arbitraire. On dit que $v \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$ est un *vecteur primitif de poids* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ si

$$\mathfrak{n}^+v = 0, \qquad \mathrm{H}v = \lambda(\mathrm{H})v, \quad \forall\, \mathrm{H} \in \mathfrak{h},$$

c.-à-d., si v est un vecteur de poids λ pour $\mathfrak{h}$, annulé par $\mathfrak{n}^+$.

Soit maintenant V un $\mathfrak{g}$-module *de dimension finie*. Par restriction, V est un $\mathfrak{b}$-module donc contient au moins un vecteur primitif v_λ, de poids λ. Soit $\alpha \in \mathrm{R}^+$. Alors, par restriction, V est aussi un module sur la sous-algèbre

$$\mathfrak{sl}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g},$$

qui est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$. Comme $\mathfrak{g}_\alpha v_\lambda = 0$, il résulte du théorème 1.48 que

$$(*) \qquad \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}.$$

Comme $(\lambda, \alpha^\vee) = \lambda(h_\alpha)$, on obtient que λ appartient à l'ensemble P^+ ci-dessous :

$$\mathrm{P}^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta\}. \tag{1}$$

Remarque 13.7. — On peut montrer que, pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$, $\beta^\vee$ s'écrit de façon unique

$$\beta^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta} m_{\beta^\vee, \alpha^\vee}\, \alpha^\vee, \qquad \text{avec} \quad m_{\beta^\vee, \alpha^\vee} \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que l'on a aussi l'égalité

$$\mathrm{P}^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \beta^\vee) \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, \beta \in \mathrm{R}^+\}. \tag{2}$$

***Définition 13.8* (Poids dominants)**. — Les éléments de P^+ s'appellent les *poids dominants* (relativement au choix de $\mathfrak{h}$ et Δ).

***Définition 13.9* (Poids fondamentaux)**. — Notons $(\omega_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ la base de $\mathfrak{h}^*$ *duale* de la base $(h_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ de $\mathfrak{h}$. Donc, pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$, on a :

$$(\omega_\alpha, \beta^\vee) = \omega_\alpha(h_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, les ω_α appartiennent à $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ (cf. § 8.1) et sont des poids dominants, appelés les *poids fondamentaux*, et tout poids dominant $\lambda \in \mathrm{P}^+$ s'écrit de façon unique

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\lambda, \alpha}\, \omega_\alpha,$$

avec $n_{\lambda,\alpha} = (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{N}$. (Donc, en langage savant, P^+ est le monoïde avec zéro librement engendré par les ω_α, $\alpha \in \Delta$.)

Remarque 13.10. — Soit $\rho = (1/2) \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \beta$, la demi-somme des racines positives. Il résulte du lemme 11.5 que

$$\rho = \sum_{\alpha \in \Delta} \omega_\alpha.$$

Rappelons que si E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, un *réseau* de E est un sous-groupe engendré par une base de E sur $\mathbb{K}$.

***Définition 13.11* (Réseaux des poids et des racines)**. — On appelle *réseau des poids* le sous-groupe de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les poids fondamentaux :

$$\mathrm{P} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\omega_\alpha \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}.$$

On a donc

$$\mathrm{P} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, \alpha \in \Delta\}.$$

Alors P contient le système de racines R, et l'on note Q le sous-réseau engendré par la base Δ, c.-à-d.,

$$\mathrm{Q} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha.$$

Enfin, on note Q^+ le sous-monoïde avec zéro engendré (librement) par Δ, c.-à-d.,

$$\mathrm{Q}^+ = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\alpha.$$

Remarque 13.12. — On a $\mathrm{Q}^+ \subset \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{P} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, mais **attention** Q^+ n'est **pas** contenu dans P^+. (On pourra dessiner, par exemple, les cônes entiers P^+ et Q^+ pour les types A_2 et B_2.)

Proposition 13.13. — *Pour l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ sur $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$ est un sous-module qui se décompose comme suit en somme directe d'espaces de poids :*

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) = \bigoplus_{\gamma\in\mathrm{Q}^+} \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}.$$

De plus, pour tout $\gamma \in \mathrm{Q}^+$, on a $\dim \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} < \infty$, et $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_0$ égale $\mathbb{C}\cdot 1$, donc est de dimension 1.

Démonstration. — Numérotons de façon arbitraire les racines positives :

$$\mathrm{R}^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_{\mathrm{N}}\},$$

et notons Y_i un vecteur non nul de $\mathfrak{g}_{-\beta_i}$. Alors, d'après le théorème de PBW, les monômes

$$\mathrm{Y}^\nu := \mathrm{Y}_1^{\nu_1}\cdots \mathrm{Y}_{\mathrm{N}}^{\nu_{\mathrm{N}}}, \qquad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_{\mathrm{N}}) \in \mathbb{N}^{\mathrm{N}},$$

forment une base de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$. Pour tout $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$[h, \mathrm{Y}^\nu] = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{Y}_1^{\nu_1}\cdots [h, \mathrm{Y}_i^{\nu_i}]\cdots \mathrm{Y}_{\mathrm{N}}^{\nu_{\mathrm{N}}} = -\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \nu_i\beta_i(h)\mathrm{Y}^\nu.$$

Comme $\mathrm{R}^+ \subset \mathrm{Q}^+$, la première assertion en résulte.

Soit $\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha\,\alpha$, avec $m_\alpha \in \mathbb{N}$, un élément fixé de Q^+. Pour $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, écrivons $\beta_i = \sum_{\alpha\in\Delta} n_{i,\alpha}\,\alpha$. Alors, pour $\nu \in \mathbb{N}^{\mathrm{N}}$, l'égalité

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \nu_i\beta_i$$

est équivalente aux égalités

$$\forall\, \alpha \in \Delta, \qquad m_\alpha = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \nu_i\, n_{i,\alpha},$$

puisque Δ est une base de $\mathfrak{h}^*$. Pour chaque i, il existe au moins un $\alpha \in \Delta$ tel que $n_{i,\alpha} \geqslant 1$, et donc $\nu_i \leqslant m_\alpha$.

Ceci montre que les égalités ci-dessus ne sont vérifiées que pour un nombre fini de ν, d'où $\dim \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} < \infty$. De plus, le poids 0 n'est obtenu que lorsque tous les ν_i sont nuls, c.-à-d., pour le monôme $\mathrm{Y}^0 = 1$. La proposition est démontrée. □

Revenons à notre $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie, qui contient donc un vecteur primitif v_λ de poids $\lambda \in \mathrm{P}^+$, et supposons de plus V *simple*. Alors, V est égal au sous-module $\mathrm{U}(\mathfrak{g})v_\lambda$ engendré par v_λ. Comme de plus

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)\mathrm{U}(\mathfrak{b}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}(\mathfrak{b})v_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda,$$

on obtient que l'application

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad u \mapsto uv_\lambda,$$

est *surjective*. De plus, pour tout $\gamma \in \mathrm{Q}^+$ et $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$, on a, pour tout $h \in \mathfrak{h}$,

$$huv_\lambda = (hu - uh)v_\lambda + uhv_\lambda = (\lambda - \gamma)(h)uv_\lambda.$$

Il en résulte que V se décompose en espaces de poids (pour $\mathfrak{h}$) comme suit :

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Q}^+} \mathrm{V}_{\lambda-\gamma}, \qquad \mathrm{V}_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda.$$

Par conséquent, λ est le plus haut (= plus grand) poids de V pour l'ordre partiel $\leqslant$ sur $\mathfrak{h}^*$ défini ci-dessous, et de plus l'espace de poids V_λ est de dimension 1, engendré par v_λ. On dit que v_λ est un vecteur de plus haut poids de V, et que V est un module de plus haut poids λ.

Définition 13.14. — On munit $\mathfrak{h}^*$ de l'ordre partiel $\leqslant$ défini par

$$\mu' \leqslant \mu \Leftrightarrow \mu - \mu' \in \mathrm{Q}^+.$$

Définition 13.15. — Soit M un $\mathfrak{g}$-module de dimension arbitraire. Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$\mathrm{M}_\mu = \{m \in \mathrm{M} \mid hm = \mu(h)m, \quad \forall\, h \in \mathfrak{h}\}.$$

Si $\mathrm{M}_\mu \neq 0$, on dit que μ est un poids de M (et M_μ est l'espace de poids μ) ; on note $\Omega(\mathrm{M})$ l'ensemble des poids de M.

Si λ est un élément *maximal* de $\Omega(\mathrm{M})$ pour $\leqslant$ et si $v_\lambda \in \mathrm{M}_\lambda \setminus \{0\}$, on dit que v_λ est un vecteur *de plus haut poids*. Si M est **engendré** par un vecteur de plus haut poids λ, on dit que M est un module *plus haut poids* λ. Dans ce cas, on voit comme précédemment que

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Q}^+} \mathrm{M}_{\lambda-\gamma} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda.$$

(Donc, dans ce cas, « le » vecteur de plus haut poids est unique à un scalaire près.)

Remarque 13.16. — Attention, si M est un $\mathfrak{g}$-module arbitraire de dimension infinie, $\Omega(\mathrm{M})$ peut être vide, ou sans élément maximal. Toutefois, on a obtenu la proposition suivante.

Proposition 13.17. — *Tout $\mathfrak{g}$-module simple* **de dimension finie** V *est un module de plus haut poids λ, pour un unique $\lambda \in \mathrm{P}^+$.*

13.3. Modules de Verma. —

Définition 13.18. — Soit $\mathfrak{a}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie abélienne de dimension finie. Un $\mathfrak{a}$-module M est dit semi-simple s'il est somme de ses espaces de poids M_μ, pour $\mu \in \mathfrak{a}^*$, c.-à-d., si l'on a

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{a}^*} \mathrm{M}_\mu$$

(la somme est nécessairement directe).

Lemme 13.19. — *Soient* M *un $\mathfrak{a}$-module semi-simple et* N *un sous-module de* M*. Alors* N *est semi-simple :*

$$\mathrm{N} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{a}^*} \mathrm{N}_\mu.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$. Il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathfrak{a}^*$, deux à deux distincts, tels que

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \qquad x_i \in \mathrm{M}_{\mu_i} \setminus \{0\}.$$

Montrons par récurrence sur n que $x_i \in \mathrm{N}$ pour tout i. C'est clair si $n = 1$, donc on peut supposer $n > 1$ et le résultat établi pour $n-1$. Alors

$$\mathrm{P} = \prod_{i=2}^{n} (\mu_i - \mu_1)$$

est un élément non nul, de degré $n-1$, de l'algèbre symétrique $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$. Comme le corps de base $\mathbb{C}$ est infini, la fonction polynomiale $h \mapsto \mathrm{P}(h)$ sur $\mathfrak{a}$ n'est pas identiquement nulle, donc il existe $h \in \mathfrak{a}$ tel que $\mu_i(h) \neq \mu_1(h)$ pour $i = 2, \dots, n$.

Alors, N contient le vecteur

$$(h - \mu_1(h))x = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i(h) - \mu_1(h))\, x_i,$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $x_i \in \mathrm{N}$ pour $i = 2, \dots, n$, d'où aussi $x_1 \in \mathrm{N}$. $\square$

Définition 13.20. — Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On définit le **module de Verma** :

$$\mathrm{M}(\lambda) := \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda.$$

On note v_λ le vecteur $1 \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} 1$. C'est un vecteur primitif de poids λ. En effet, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{b}$, on a :

$$\mathrm{X}v_\lambda = \mathrm{X} \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} 1 = 1 \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathrm{X} \cdot 1 = \lambda(\mathrm{X})1 \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} 1 = \lambda(\mathrm{X})v_\lambda.$$

Donc $\mathrm{M}(\lambda)$, étant engendré par v_λ, est un module de plus haut poids λ.

Puisque $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{b})$, on a un isomorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)$-modules

$$(\dagger) \qquad \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}(\lambda), \qquad u \mapsto uv_\lambda;$$

de plus on obtient, comme dans le paragraphe précédent, un isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules :

$$\mathrm{M}(\lambda) \cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}_\lambda,$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur $\mathbb{C}$. En effet, pour $\gamma \in \mathrm{Q}^+$, $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a $uhv_\lambda = \lambda(h)uv_\lambda$ et $hu - uh = -\gamma(h)u$, d'où :

$$huv_\lambda = (\lambda - \gamma)(h)\, v_\lambda.$$

Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante.

Proposition 13.21. — *On a :*

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}(\lambda) = \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Q}^+} \mathrm{M}(\lambda)_{\lambda-\gamma}, \qquad \mathrm{M}(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda. \\ \forall\, \gamma \in \mathrm{Q}^+, \quad \dim \mathrm{M}(\lambda)_{\lambda-\gamma} = \dim \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} < \infty. \end{cases}$$

En particulier, λ est l'unique plus haut poids de $\mathrm{M}(\lambda)$.

De plus, $\mathrm{M}(\lambda)$ est le module universel de plus haut poids λ, d'après le théorème suivant.

Théorème 13.22 **(Propriété universelle de $\mathrm{M}(\lambda)$)**. — *Soit* V *un $\mathfrak{g}$-module et $x \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$ un vecteur* **primitif** *de poids λ. Il existe un unique morphisme de $\mathfrak{g}$-modules*

$$\phi : \mathrm{M}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{V} \qquad \textit{tel que} \quad \phi(v_\lambda) = x.$$

En particulier, si V *est un module de plus haut poids λ, alors ϕ est surjectif.*

Démonstration. — D'après la propriété universelle du produit tensoriel, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda, \mathrm{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{b})}(\mathbb{C}_\lambda, \mathrm{V}),$$

donné par $\psi \mapsto \psi(1)$. Or, l'hypothèse que x soit un vecteur primitif de poids λ équivaut à dire que le sous-module $\mathrm{U}(\mathfrak{b})x$ égale $\mathbb{C}x$. Il existe donc un unique morphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$-modules $f : \mathbb{C}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}x$ tel que $f(1) = x$, et le théorème en découle. □

***Théorème 13.23* (Les modules simples $\mathrm{L}(\lambda)$).** — *Le $\mathfrak{g}$-module $\mathrm{M}(\lambda)$ possède un* **unique** *sous-module maximal, et donc un unique quotient simple, noté $\mathrm{L}(\lambda)$.*

Par conséquent, $\mathrm{L}(\lambda)$ est **l'unique** *$\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids λ.*

Démonstration. — D'après le lemme 13.19, pour tout sous-module N de $\mathrm{M}(\lambda)$, on a

$$\mathrm{N} = \bigoplus_{\mu \leqslant \lambda} (\mathrm{N} \cap \mathrm{M}(\lambda)_\mu).$$

Comme, d'autre part, $\mathrm{M}(\lambda)$ est engendré par l'espace de poids $\mathrm{M}(\lambda)_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda$, alors pour tout sous-module propre N on a $\mathrm{N} \cap \mathrm{M}(\lambda)_\lambda = (0)$ donc N est contenu dans *l'espace vectoriel*

$$\mathrm{M}(\lambda)_{<\lambda} := \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Q}^+ \setminus \{0\}} \mathrm{M}(\lambda)_{\lambda - \gamma}.$$

Par conséquent, la *somme* S de tous les sous-modules propres est contenue dans cet espace vectoriel, donc est un sous-module propre, et c'est donc *le plus grand* sous-module propre. Donc S est *l'unique* sous-module maximal de $\mathrm{M}(\lambda)$, et $\mathrm{L}(\lambda) := \mathrm{M}(\lambda)/\mathrm{S}$ est l'unique quotient simple de $\mathrm{M}(\lambda)$.

Mieux, si V est un $\mathfrak{g}$-module simple engendré par un vecteur x de plus haut poids λ, alors d'après la propriété universelle de $\mathrm{M}(\lambda)$, il existe un unique morphisme de $\mathfrak{g}$-modules

$$\phi : \mathrm{M}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{V},$$

tel que $\phi(v_\lambda) = x$. Comme V est simple, ϕ est surjectif, d'où $\mathrm{V} \cong \mathrm{M}(\lambda)/\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Ker}\phi$ est un sous-module maximal de $\mathrm{M}(\lambda)$. Donc $\operatorname{Ker}\phi = \mathrm{S}$, et $\mathrm{V} \cong \mathrm{L}(\lambda)$. Le théorème est démontré. □

13.4. $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie. —

Définition et proposition 13.24. — *Soit $\alpha \in \mathrm{R}^+$. Soit* M *un $\mathfrak{g}$-module qui est $\mathfrak{h}$-semi-simple :*

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \mathrm{M}_\mu$$

*et qui est $\mathfrak{sl}_\alpha$-***localement fini***, c.-à-d., tout $v \in \mathrm{M}$ est contenu dans un sous-$\mathfrak{sl}_\alpha$-module de dimension finie. Alors, l'ensemble $\Omega(\mathrm{M})$ des poids de* M *est stable par s_α, c.-à-d.,*

$$\mathrm{M}_\mu \neq (0) \Leftrightarrow \mathrm{M}_{s_\alpha \mu} \neq (0).$$

Démonstration. — Soit $\mu \in \Omega(\mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}_\mu \setminus \{0\}$. Soit $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ la base standard de $\mathfrak{sl}_\alpha$ et posons $\mu_\alpha = \mu(h_\alpha) = (\mu, \alpha^\vee)$.

Par hypothèse, x est contenu dans un sous-$\mathfrak{sl}_\alpha$-module E de M, de dimension finie. D'après le théorème 3.8, il existe $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{s=1}^{r} \mathrm{V}_\alpha(n_s), \tag{S}$$

où $\mathrm{V}_\alpha(n)$ désigne le $\mathfrak{sl}_\alpha$-module simple de dimension $n+1$. On peut donc écrire

$$x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{avec} \quad x_i \in \mathrm{V}_\alpha(n_i),$$

et les x_i non tous nuls. Comme la somme (S) est directe, l'égalité $h_\alpha x = \mu_\alpha x$ entraîne $h_\alpha x_s = \mu_\alpha x_s$ pour tout s. Fixons un indice s tel que $x_s \neq 0$, et soit v_0 un vecteur primitif de $\mathrm{V}_\alpha(n_s)$. Alors les vecteurs

$$v_i := f_\alpha^i \, v_0, \qquad i = 0, \ldots, n_s$$

forment une base de $\mathrm{V}_\alpha(n_s)$, et vérifient $h_\alpha v_i = n_s - 2i$. De plus, x_s est un multiple non nul de l'unique v_i tel que $n - 2i = \mu_\alpha$. Distinguons deux cas.

1) Si $\mu_\alpha \geqslant 0$, alors

$$f_\alpha^{\mu_\alpha} \, v_i = f_\alpha^{i+\mu_\alpha} \, v_0 \neq 0,$$

puisque $i + \mu_\alpha \leqslant 2i + \mu_\alpha = n_s$. Donc $f_\alpha^{\mu_\alpha} x$ est non nul, de poids

$$\mu - \mu_\alpha \alpha = \mu - (\mu, \alpha^\vee)\alpha = s_\alpha \mu.$$

Ceci prouve que $\mathrm{V}_{s_\alpha \mu} \neq (0)$ dans ce cas.

2) Supposons $\mu_\alpha = -m$, avec $m < 0$. En utilisant l'automorphisme θ de $\mathfrak{sl}_2$ qui échange e et f et change h en $-h$, on peut récrire le théorème 1.48 sous la forme suivante :

Théorème 13.25. — *Soit* $\mathrm{V}(n)$ *l'unique* $\mathfrak{sl}_2$*-module simple de dimension* n*. Alors* $\mathrm{V}(n)$ *contient un vecteur* w_0 *de plus bas poids* $-n$*, annulé par* f *(et unique à un scalaire près), et les vecteurs*

$$w_j := e^j \, w_0, \quad (\textit{de poids } -n + 2j), \qquad j = 0, \ldots, n,$$

forment une base de $\mathrm{V}(n)$*.*

Donc, lorsque $\mu_\alpha = -m < 0$, x_s est un multiple non nul de l'unique w_j tel que $-n_s + 2j = \mu_\alpha = -m$, c.-à-d., $n_s = m + 2j$. Alors

$$e_\alpha^m \, w_j = e_\alpha^{j+m} \, w_0 \neq 0,$$

puisque $j + m \leqslant 2j + m = n_s$. Donc $e_\alpha^m x$ est non nul, de poids

$$\mu + m\alpha = \mu - (\mu, \alpha^\vee)\alpha = s_\alpha \mu.$$

Ceci prouve que $\mathrm{V}_{s_\alpha \mu} \neq (0)$ dans le 2ème cas. La proposition 13.24 est démontrée. □

Remarque 13.26. — Ceci est la démonstration de [**Dix**, 7.2.4]. Pour une autre démonstration, utilisant l'automorphisme

$$(\exp \rho(e_\alpha))(\exp \rho(-f_\alpha))(\exp \rho(e_\alpha)) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}),$$

où $\rho : \mathfrak{sl}_\alpha \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E})$ est la représentation de $\mathfrak{sl}_\alpha$ dans E, voir [**Hu**], § 21.2, points (5) et (6) ; ceci permet de montrer de plus que $\dim \mathrm{M}_\mu = \dim \mathrm{M}_{s_\alpha \mu}$.

Proposition 13.27. — *Soit* M *un* $\mathfrak{g}$*-module et soit* $\alpha \in \mathrm{R}^+$*. Notons* K_α *le sous-espace de* M *formé des vecteurs* m *qui sont* $\mathfrak{sl}_\alpha$*-finis* (*c.-à-d., contenus dans un sous-*$\mathfrak{sl}_\alpha$*-module de dimension finie*)*. Alors,* K_α *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* M*.*

En particulier, si M *est simple et si* $\mathrm{K}_\alpha \neq 0$*, alors* $\mathrm{K}_\alpha = \mathrm{M}$*.*

Démonstration. — Soit $v \in \mathrm{K}_\alpha$ Il suffit de montrer que $\mathrm{X}v \in \mathrm{K}_\alpha$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. Par hypothèse, v est contenu dans un sous-$\mathfrak{sl}_\alpha$-module E de dimension finie. Notons $\mathfrak{g}\mathrm{E}$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $\mathrm{X}e$, pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ et $e \in \mathrm{E}$; il est de dimension finie, car engendré par les élements $\mathrm{X}_j e_i$, où (X_j), resp. (e_i), est une base de $\mathfrak{g}$, resp. de E. De plus, $\mathfrak{g}\mathrm{E}$ est un sous-$\mathfrak{sl}_\alpha$-module, car pour $y \in \mathfrak{sl}_\alpha$ on a :

$$y\mathrm{X}e = [y, \mathrm{X}]e + \mathrm{X}(ye) \in \mathfrak{g}\mathrm{E}.$$

La proposition est démontrée. □

Théorème 13.28. — *Soit* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*. On a*

$$\dim \mathrm{L}(\lambda) < \infty \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{P}^+.$$

Démonstration. — On a déjà vu l'implication $\Rightarrow$. Montrons la réciproque. Soit $\lambda \in \mathrm{P}^+$. Soit v_λ le vecteur de plus haut poids de $\mathrm{M}(\lambda)$, et notons $\overline{v_\lambda}$ son image dans $\mathrm{L}(\lambda)$. Notons $\Omega(\mathrm{L}(\lambda))$ l'ensemble des poids de $\mathrm{L}(\lambda)$. D'après la proposition 13.21, $\Omega(\mathrm{L}(\lambda))$ est contenu dans $\lambda - \mathrm{Q}^+$, et l'on a :

$$\forall\, \mu \in \Omega(\mathrm{L}(\lambda)), \qquad \dim \mathrm{L}(\lambda)_\mu < \infty. \tag{1}$$

Pour tout $\alpha \in \Delta$, posons $n_\alpha = (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{N}$, et

$$w_\alpha = f_\alpha^{n_\alpha + 1} v_\lambda.$$

Soit $\beta \in \mathrm{R}^+$ tel que

$$\lambda - (n_\alpha + 1)\alpha + \beta \leqslant \lambda.$$

Alors $\beta \leqslant (n_\alpha + 1)\alpha$, et ceci entraîne que $\beta = \alpha$. Ceci montre déjà que

$$\mathfrak{g}_\beta w_\alpha = (0), \qquad \forall\, \beta \in \mathrm{R}^+ \setminus \{\alpha\}.$$

De plus, d'après un calcul déjà fait (voir (3) après le corollaire 1.46), on a

$$e_\alpha w_\alpha = (n_\alpha + 1) f_\alpha^{n_\alpha}(h_\alpha - n_\alpha) v_\lambda = 0.$$

Ceci montre que w_α est un vecteur primitif de $\mathrm{M}(\lambda)$, de poids

$$\lambda - (n_\alpha + 1)\alpha.$$

Donc w_α engendre un sous-module propre de $\mathrm{M}(\lambda)$, donc est contenu dans l'unique sous-module maximal S de $\mathrm{M}(\lambda)$.

Par conséquent, dans le quotient $\mathrm{L}(\lambda) = \mathrm{M}(\lambda)/\mathrm{S}$, le $\mathfrak{sl}_\alpha$-module engendré par $\overline{v_\lambda}$ a pour base les vecteurs

$$f_\alpha^i\,\overline{v_\lambda}, \qquad i = 0, \dots, n_\alpha,$$

donc est de dimension finie. Il résulte alors des propositions 13.27 et 13.24 que $\Omega(\mathrm{L}(\lambda))$ est stable par s_α, pour tout $\alpha \in \Delta$, donc est stable par W, d'après le théorème 11.8, point (3).

Soit $\nu \in \Omega(\mathrm{L}(\lambda))$. D'après la démonstration du point (1) du théorème 11.8, il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $\mu := w(\nu)$ vérifie

$$(*) \qquad (\mu, \alpha) \geqslant 0, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta,$$

c.-à-d., μ appartient à l'adhérence $\overline{\mathrm{C}^+}$ de la chambre dominante $\mathrm{C}^+ = \mathrm{C}^+(\Delta)$. (Prendre $w \in \mathrm{W}$ tel que $(w(\nu), \rho)$ soit maximum.) D'après ce qui précède, μ appartient à $\Omega(\lambda)$ donc vérifie

$$\mu = \lambda - \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha\, \alpha,$$

pour certains $m_\alpha \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(\mu, \mu) = (\lambda, \lambda) - \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha(\lambda + \mu, \alpha)$$

et comme $\lambda \in \mathrm{P}^+$ et $\mu \in \overline{\mathrm{C}^+}$, ceci est $\leqslant (\lambda, \lambda)$ (et on a l'égalité seulement si $\mu = \lambda$).

Comme $\lambda - \mathrm{Q}^+$ est un sous-ensemble discret de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$, son intersection avec la boule fermée de centre 0 et de rayon $\|\lambda\| = \sqrt{(\lambda, \lambda)}$ est un ensemble **fini** F. Comme tout poids de $\mathrm{L}(\lambda)$ est W-conjugué, d'après ce qui précède, à un élément de F, on obtient que $\Omega(\mathrm{L}(\lambda))$ est aussi un ensemble fini (puisque W est fini). Enfin, comme chaque espace de poids de $\mathrm{L}(\lambda)$ est de dimension finie (d'après (1) plus haut), on obtient finalement que $\dim \mathrm{L}(\lambda) < \infty$. Le théorème est démontré. $\square$

14. Réductibilité complète

14.1. Produits tensoriels et modules d'homomorphismes. — Dans ce paragraphe, soient k un corps et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie arbitraires. Soient M, N deux $\mathfrak{g}$-modules.

Définition 14.1. — Le produit tensoriel $\mathrm{M} \otimes_k \mathrm{N}$ est un $\mathfrak{g}$-module, pour l'action définie par :

$$\forall\, x \in \mathfrak{g},\ m \in \mathrm{M},\ n \in \mathrm{N}, \qquad x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn.$$

La vérification, facile, est laissée au lecteur.

Définition 14.2. — L'espace $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N})$ des applications k-linéaires $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un $\mathfrak{g}$-module, pour l'action définie par :

$$\forall\, x \in \mathfrak{g},\ \phi \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N}),\ m \in \mathrm{M}, \qquad (x\cdot\phi)(m) = x\phi(m) - \phi(xm).$$

Alors, les k-morphimes $\mathfrak{g}$-invariants

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N})^{\mathfrak{g}} = \{\phi \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N}) \mid \phi\circ x = x\circ\phi, \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}\}$$

sont précisément les morphismes de $\mathfrak{g}$-modules $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$, c.-à-d., on a :

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{M},\mathrm{N}).$$

Remarque 14.3. — En particulier, pour $\mathrm{N} =$ le module trivial k, on retrouve la structure de $\mathfrak{g}$-module sur l'espace dual M^*, introduite dans la définition 1.17.

Rappelons que l'application naturelle

$$\theta : \mathrm{M}^* \otimes \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N}),$$

qui à tout tenseur $\sum_{i=1}^r f_i \otimes n_i$ associe l'application k-linéaire

$$m \mapsto \sum_{i=1}^r f_i(m)\, n_i$$

est *injective*, et son image est formée des applications linéaires $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ de *rang fini* (c.-à-d., telles que $\dim_k \phi(\mathrm{M}) < \infty$). En particulier, si M ou N est de dimension finie sur k, alors θ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Remarque 14.4. — Supposons $\dim_k \mathrm{M} < \infty$ et $\mathrm{N} = \mathrm{M}$. Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de M et $(e_1^*,\dots,e_n)$ la base duale de M^*. Alors

$$(\ddagger) \qquad \theta(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}\,.$$

Lemme 14.5. — *L'application* $\theta : \mathrm{M}^* \otimes_k \mathrm{N} \to \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\mathrm{N})$ *est un* morphisme *de* $\mathfrak{g}$*-modules, donc un isomorphisme de* $\mathfrak{g}$*-modules si* M *ou* N *est de dimension finie.*

En particulier, si $\dim_k \mathrm{M} < \infty$ *et* $\mathrm{N} = \mathrm{M}$ *et si* $(e_1,\dots,e_n)$ *est une base de* M *et* $(e_1^*,\dots,e_n)$ *la base duale de* M^**, alors l'élement*

$$\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i \in \mathrm{M}^* \otimes \mathrm{M}$$

est $\mathfrak{g}$*-invariant et ne dépend pas de la base choisie.*

Démonstration. — Le premier point est une vérification facile, laissée au lecteur. Pour le second point, l'élément en question est l'image inverse, par l'isomorphisme θ, de l'élément $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \in \mathrm{End}_k(\mathrm{M})$, d'où le résultat. □

14.2. Élément de Casimir d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple. — Désormais, soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. On a vu (Théorème 6.18) que la forme de Killing $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée.

Soit (x_i) une base de $\mathfrak{g}$ et (y_i) la base duale pour la forme de Killing (c.-à-d., $\mathrm{K}(x_i, y_j) = \delta_{ij}$).

Proposition 14.6. — K *induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules* $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$.

Par conséquent, l'élément

$$\sum_i x_i \otimes y_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

est $\mathfrak{g}$-invariant, et ne dépend pas du choix de la base.

Démonstration. — Comme K est non-dégénérée, l'application linéaire

$$\mathrm{K}^{\#} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad x \mapsto \mathrm{K}(x, -)$$

est bijective. De plus, comme K est $\mathfrak{g}$-invariante, on a, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{K}^{\#}([x,y])(z) = \mathrm{K}([x,y],z) = -\mathrm{K}(y,[x,z]) = (x \cdot \mathrm{K}^{\#}(y))(z).$$

On a donc $\mathrm{K}^{\#}(x \cdot y) = x \cdot \mathrm{K}^{\#}(y)$, et $\mathrm{K}^{\#}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules.

La seconde assertion découle alors du lemme 14.5. □

Théorème 14.7. — *L'élément*

$$\mathrm{C} = \sum_i x_i y_i \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

est central (*c.-à-d.,* $u\mathrm{C} = \mathrm{C}u$ *pour tout* $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$) *et ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle l'élément de Casimir de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (*ou simplement de* $\mathfrak{g}$).

Démonstration. — On considère $\mathrm{U} := \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ comme $\mathfrak{g}$-module pour l'action adjointe, c.-à-d., $\mathrm{X} \cdot u = \mathrm{X}u - u\mathrm{X}$, pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathrm{U}$. Alors l'application

$$\phi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{U}, \qquad x \otimes y \mapsto xy,$$

est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. En effet, pour $\mathrm{X}, x, y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{X} \cdot (x \otimes y)) &= \phi([\mathrm{X},x] \otimes y + x \otimes [\mathrm{X},y]) \\ &= [\mathrm{X},x]\, y + x\, [\mathrm{X},y] = [\mathrm{X}, xy].\end{aligned}$$

D'après la proposition 14.6, l'élément $\sum_i x_i \otimes y_i$ est $\mathfrak{g}$-invariant et ne dépend pas de la base choisie, donc il en est de même pour son image par ϕ. Donc C commute à tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, donc à tout $u \in \mathrm{U}$ puisque U est engendrée par $\mathfrak{g}$ comme $\mathbb{C}$-algèbre. Le théorème est démontré. □

Proposition 14.8. — *Pour tout* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, C *agit sur le module simple* $\mathrm{L}(\lambda)$ *par le scalaire*

$$(\lambda, \lambda) + \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} (\lambda, \beta).$$

En particulier, si $\lambda \in \mathrm{P}^+ \setminus \{0\}$, *ceci est un réel* > 0.

Démonstration. — Pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$, on choisit un vecteur non nul $\mathrm{E}_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, puis $\mathrm{F}_\beta \in \mathfrak{g}_{-\beta}$ tel que $\mathrm{K}(\mathrm{E}_\beta, \mathrm{F}_\beta) = 1$. Puis, soit $(h_i)_{i=1}^{\ell}$ une base arbitraire de $\mathfrak{h}$, et $(h^i)_{i=1}^{\ell}$ la base duale pour $\mathrm{K}|_{\mathfrak{h}}$ (c.-à-d., $\mathrm{K}(h_i, h^j) = \delta_{ij}$). Alors, les bases

$$(\mathrm{E}_\beta, \mathrm{F}_\beta, h_i), \qquad (\mathrm{F}_\beta, \mathrm{E}_\beta, h^i)$$

sont duales l'une de l'autre, et donc l'élément de Casimir est

$$\mathrm{C} = \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} (\mathrm{E}_\beta \mathrm{F}_\beta + \mathrm{F}_\beta \mathrm{E}_\beta) + \sum_{i=1}^{\ell} h_i h^i.$$

D'après le lemme 8.10, on a $[\mathrm{E}_\beta, \mathrm{F}_\beta] = \mathrm{H}_\beta$, où $\mathrm{K}(\mathrm{H}_\beta, -) = \beta$. Donc

$$\mathrm{C} = 2 \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \mathrm{F}_\beta \mathrm{E}_\beta + \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \mathrm{H}_\beta + \sum_{i=1}^{\ell} h_i h^i.$$

Par conséquent, C agit sur le vecteur de plus haut poids $v_\lambda \in \mathrm{L}(\lambda)$ par le scalaire

$$\chi_\lambda(\mathrm{C}) := \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \lambda(\mathrm{H}_\beta) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(h_i)\lambda(h^i).$$

Comme C est central dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, et $\mathrm{L}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) v_\lambda$, alors C agit sur $\mathrm{L}(\lambda)$ par le scalaire $\chi_\lambda(\mathrm{C})$.

De plus, on a $\lambda(\mathrm{H}_\beta) = (\lambda, \beta)$. D'autre part, notons H_λ l'élément de $\mathfrak{h}$ tel que $\mathrm{K}(\mathrm{H}_\lambda, -) = \lambda$, et écrivons

$$\mathrm{H}_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} z_{\lambda,i} h_i.$$

Alors $z_{\lambda,i} = \mathrm{K}(\mathrm{H}_\lambda, h^i) = \lambda(h^i)$ et

$$(\lambda, \lambda) = \lambda(\mathrm{H}_\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} z_{\lambda,i} \lambda(h_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(h_i)\lambda(h^i).$$

Comme $2\rho = \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \beta$, on obtient donc que

$$\chi_\lambda(\mathrm{C}) = (\lambda, \lambda) + \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} (\lambda, \beta) = (\lambda, \lambda + 2\rho).$$

Si $\lambda \in \mathrm{P}^+ \setminus \{0\}$, alors $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \{0\}$ donc $(\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}_+^*$, et, d'autre part, pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$, on a

$$(\lambda, \beta) = \frac{(\beta, \beta)}{2}\,(\lambda, \beta^\vee) \in \mathbb{R}_+.$$

Ceci prouve la proposition. $\square$

14.3. Deux propriétés de $\mathfrak{g}$. — Les deux propriétés suivantes de $\mathfrak{g}$ seront utiles dans le paragraphe suivant. (Elles auraient pu être énoncées bien avant, dans le chapitre III.)

Proposition 14.9. — 1) *On a* $\mathfrak{g} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ *; par conséquent, l'unique* $\mathfrak{g}$*-module de dimension* 1 *est le module trivial* $\mathbb{C}$.

2) *Si* $\mathfrak{g}' \neq 0$ *est une algèbre de Lie quotient de* $\mathfrak{g}$, *alors* $\mathfrak{g}'$ *est semi-simple, donc contient au moins une sous-algèbre isomorphe à* $\mathfrak{sl}_2$ *; en particulier,* $\dim \mathfrak{g}' \geqslant 3$.

Démonstration. — On a $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$, avec chaque $\mathfrak{g}_i$ simple et $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = (0)$ pour $i \neq j$; les $\mathfrak{g}_i$ sont les idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$.

1) On a $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$, pour tout i, d'où $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Si K est un $\mathfrak{g}$-module de dimension 1, alors $\mathfrak{g}$ y agit par un *caractère*, c.-à-d., un élément $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ nul sur $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$. Comme $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, on a $\lambda = 0$ et K est le module trivial $\mathbb{C}$.

2) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal *propre* de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. D'après la proposition 6.4, $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{g}_i$, pour un certain sous-ensemble *propre* I de $\{1, \ldots, n\}$, et donc

$$\mathfrak{g}' \cong \bigoplus_{j \notin \mathrm{I}} \mathfrak{g}_j$$

est semi-simple. Enfin, on a vu que toute $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple contient au moins une sous-algèbre $\mathfrak{sl}_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2$. La proposition est démontrée. $\square$

14.4. Le théorème de complète réductibilité. — On peut maintenant démontrer le théorème de complète réductibilité (ou semi-simplicité) de Weyl. Il a d'abord été démontré de façon analytique (intégration sur les groupes compacts et astuce unitaire) par Hermann Weyl en 1926. La première démonstration algébrique a été donnée par Casimir et van der Waerden en 1935.

Théorème 14.10. — *Tout* $\mathfrak{g}$*-module* V *de dimension finie est semi-simple, donc somme directe de modules simples* $\mathrm{L}(\lambda)$, *pour* $\lambda \in \mathrm{P}^+$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que toute suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie :

$$0 \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Q} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

est **scindée**, c.-à-d. :

($*$) il existe un $\mathfrak{g}$-morphisme $\sigma : \mathrm{Q} \to \mathrm{E}$ tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{Q}}$.

En effet, ceci entraîne que $\mathrm{E} \cong \mathrm{N} \oplus \mathrm{Q}$, et ceci entraîne l'assertion du théorème par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. En effet, V contient un sous-module simple S, et le scindage de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}/\mathrm{S} \longrightarrow 0$$

entraîne $\mathrm{V} \cong \mathrm{S} \oplus (\mathrm{V}/\mathrm{S})$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à V/S.

1ère réduction. La suite exacte (1) étant donnée, on obtient d'abord la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules ci-dessous :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q}, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q}, \mathrm{E}) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q}) \longrightarrow 0, \tag{2}$$

où $\pi_*(\phi) = \pi \circ \phi$. Considérant le sous-$\mathfrak{g}$-module trivial $\mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathrm{Q}} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q})$ et son image inverse F par π_*, on obtient la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q}, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{F} \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathrm{Q}} \longrightarrow 0,$$

dont le scindage implique celui de (2). En effet, s'il existe $\tau : \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathrm{Q}} \to \mathrm{F}$ tel que

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Q}} = \pi_*(\tau(\mathrm{id}_{\mathrm{Q}})) = \pi \circ \tau(\mathrm{id}_{\mathrm{Q}}),$$

alors $\sigma = \tau(\mathrm{id}_{\mathrm{Q}})$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q}, \mathrm{E})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Q}, \mathrm{E})$ et est un scindage de (2). Donc il suffit de montrer que toute suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

est scindée.

2ème réduction. Il suffit de montrer que toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

est scindée ; ceci implique le scindage de toute suite exacte (3), en procédant par récurrence sur $\dim \mathrm{N}$. En effet, soit S un sous-module simple de N. Alors, d'une part, (3) donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}/\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{F}/\mathrm{S} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0, \tag{3'}$$

qui est scindée par hypothèse de récurrence (car $\dim(\mathrm{N}/\mathrm{S}) < \dim \mathrm{N}$). Donc il existe un sous-module $\widetilde{\mathrm{S}}$ de F contenant S et tel que $\widetilde{\mathrm{S}}/\mathrm{S} \cong \mathbb{C}$ et

$$\mathrm{F}/\mathrm{S} = (\mathrm{N}/\mathrm{S}) \bigoplus (\widetilde{\mathrm{S}}/\mathrm{S}).$$

En particulier, $\widetilde{\mathrm{S}} \cap \mathrm{N} = \mathrm{S}$. D'autre part, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{S} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

qui est scindée par (4). Donc $\widetilde{\mathrm{S}}$ contient un sous-module $\mathrm{K} \cong \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{\mathrm{S}} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{K}$. Alors

$$\mathrm{K} \cap \mathrm{N} = \mathrm{K} \cap \widetilde{\mathrm{S}} \cap \mathrm{N} = \mathrm{K} \cap \mathrm{S} = (0),$$

et donc $\mathrm{F} = \mathrm{K} \oplus \mathrm{N}$ et (3) est scindée par tout isomorphisme $\sigma : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}$. Ceci montre qu'il suffit de scinder toute suite exacte (4).

Remarque 14.11. — Si l'on connaît le formalisme des Ext, l'argument précédent revient à dire que de la nullité de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\mathrm{N}/\mathrm{S}, \mathbb{C}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\mathrm{S}, \mathbb{C})$$

on a déduit la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\mathrm{N}, \mathbb{C})$, ce qui résulte bien sûr de la suite exacte (longue)

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\mathrm{N}/\mathrm{S}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\mathrm{N}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\mathrm{S}, \mathbb{C}) \longrightarrow \cdots$$

(Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-, \mathbb{C})$ est *contravariant*.)

Il reste donc à montrer que toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{L}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0, \tag{5}$$

où $\lambda \in \mathrm{P}^+$, est scindée. Notons ρ la représentation de $\mathfrak{g}$, et de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, dans E.

Si $\lambda \neq 0$, alors $\chi := \chi_\lambda(\mathrm{C})$ est non nul, et la matrice de $\rho(\mathrm{C})$ est de la forme

$$\rho(\mathrm{C}) = \left(\begin{array}{c|c} \chi\,\mathrm{id}_{\mathrm{L}(\lambda)} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Par conséquent, l'espace propre E_0 de C pour la valeur propre 0 est de dimension 1, et l'on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{L}(\lambda) \oplus \mathrm{E}_0$$

comme $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Comme C est central, E_0 est un sous-$\mathfrak{g}$-module de E, de dimension 1. Donc, d'après la proposition 14.9, $\mathbb{C} \cong \mathrm{E}_0$, et le choix d'un tel isomorphisme fournit un scindage de (5).

Enfin, supposons $\lambda = 0$. Alors, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0, \tag{6}$$

et $\dim \mathrm{E} = 2$. Alors, puisque $\mathfrak{g} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, d'après la proposition 14.9, on a

$$\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{gl}(\mathrm{E})) \cong \mathfrak{sl}_2.$$

D'autre part, comme E contient le sous-module trivial $\mathbb{C}$, alors $\rho(\mathfrak{g})$ est contenue dans la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b}_2$ des matrices triangulaires de trace nulle :

$$\mathfrak{b}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Comme $\dim \mathfrak{b}_2 = 2$, il résulte de la proposition 14.9 que $\rho(\mathfrak{g}) = 0$, c.-à-d., que E est le module trivial $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Ceci achève la preuve du théorème 14.10. $\square$

Remarque 14.12. — Pour une variante du dernier argument de la démonstration, voir [**Dix**, Lemme 1.6.1].

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Bu] D. Bump, Lie groups, Springer, 2004.

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, John Wiley & Sons, 1962.

[Dix] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Mn] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes (Tableaux de Young, cône nilpotent, représentations des algèbres de Lie semi-simples), Calvage & Mounet, 2006.

[Pe] E. Petracci, Universal representations of Lie algebras by coderivations, Bull. Sci. Math. 127 (2003), no. 5, 439-465.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pic] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Pie] R. S. Pierce, Associative algebras, Springer, 1982.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.