I. GROUPES DE LIE RÉELS ET GROUPES ALGÉBRIQUES SUR $\mathbb{C}$

SÉANCE DU 8/11/07

1. Groupes de Lie

1.1. Variétés différentiables. — [(1)]

Définition 1.1. — Une **variété de classe** C^∞, de dimension n, est un espace topologique séparé X, muni d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$, et d'homéomorphismes ϕ_i de chaque U_i sur un ouvert V_i de $\mathbb{R}^n$, tels que, pour tout $i \neq j$, l'application $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soit un difféomorphisme de classe C^∞ de l'ouvert $\phi_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\phi_j(U_j \cap U_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

On dit que les (U_i, ϕ_i) sont des cartes de définition de X. On dit alors qu'un couple (U, ψ), où U est un ouvert de X et ψ un homéomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, est une carte de X si, pour tout $i \in I$, l'application $\psi \circ \phi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de l'ouvert $\phi_i(U_i \cap U)$ de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\psi(U \cap U_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

On définit de même la notion de variété de classe C^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.2. — Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété C^∞ de dimension n. En particulier, $GL_n(\mathbb{R})$ est une variété C^∞ de dimension n^2.

Exemple 1.3. — Le cercle

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

est une variété C^∞ de dimension 1. En effet, en utilisant la deuxième description, soit $\varepsilon \in]0,1[$ et soient

$$V_0 =]-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon[\,, \qquad V_1 =]\varepsilon, 2\pi-\varepsilon[\,.$$

L'application $f : t \mapsto e^{it}$ est un homéomorphisme du compact $\overline{V_0}$ sur son image, donc induit un homéomorphisme ϕ_0 de V_0 sur son image U_0. (Ici, par

[(1)] version du 13/11/07

rapport à la définition, on a noté ϕ_0 au lieu de ϕ_0^{-1}, ce qui est évidemment sans importance.) De même, f induit un homéomorphisme ϕ_1 de V_1 sur son image U_1. Alors, $\mathrm{U}_0 \cap \mathrm{U}_1$ a deux composantes connexes :

$$\begin{cases} \mathrm{C}^+ = \{e^{i\theta} \mid \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon\}, \\ \mathrm{C}^- = \{e^{i\theta_0} \mid -\pi + \varepsilon < \theta_0 < -\varepsilon\} = \{e^{i\theta_1} \mid \pi + \varepsilon < \theta_1 < 2\pi - \varepsilon\}. \end{cases}$$

On a $\phi_0^{-1}(\mathrm{C}^+) = \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 = \phi_1^{-1}(\mathrm{C}^+)$, et

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_0 : \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 \longrightarrow \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1$$

est l'application identique. D'autre part, $\phi_0^{-1}(\mathrm{C}^-) =]-\pi+\varepsilon, -\varepsilon[$ et $\phi_1^{-1}(\mathrm{C}^-) =]\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$, et

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_0 :] - \pi + \varepsilon, -\varepsilon[\longrightarrow]\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$$

est l'application $t \mapsto t + 2\pi$, qui est bien C^∞. Ceci montre (ouf... !) que S^1 est bien une variété C^∞ de dimension 1.

En utilisant la première description, introduisons les cartes suivantes de S^1. Considérons les demi-cercles ouverts supérieur et inférieur :

$$\mathrm{X}_1^+ = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid y > 0\}, \qquad \mathrm{X}_1^- = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid y < 0\}.$$

Alors la restriction à X_1^+, resp. X_1^-, de la projection $(x, y) \mapsto x$, notée p_1^+, resp. p_1^-, est un homéomorphisme de X_1^+, resp. X_1^-, sur $\mathrm{I} =] - 1, 1[$, l'homéomorphisme inverse étant

$$\phi^+ : x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2}), \quad \text{resp.} \quad \phi^- : x \mapsto (x, -\sqrt{1 - x^2}).$$

De même, soient

$$\mathrm{X}_2^- = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid x < 0\}, \qquad \mathrm{X}_2^+ = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid x > 0\}$$

les demi-cercles ouverts gauche et droit. La projection p_2 sur y induit des homéomorphismes p_2^- et p_2^+, dont les inverses sont, respectivement,

$$\psi^- : y \mapsto (-\sqrt{1 - y^2}, y), \quad \text{resp.} \quad \psi^+ : y \mapsto (\sqrt{1 - y^2}, y).$$

Posons $\mathrm{C} = \mathrm{X}_1^+ \cap \mathrm{X}_2^+ = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid x > 0, y > 0\}$. Alors $p_1^+(\mathrm{C})$ et $p_2^+(\mathrm{C})$ égalent l'intervalle ouvert $\mathrm{J} =]0, 1[$, et le changement de coordonnées est :

$$p_2^+ \circ \phi^+ : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{J}, \qquad x \mapsto \sqrt{1 - x^2},$$

qui est bien C^∞.

Remarque 1.4. — Ce qui précède se généralise, pour tout $n \geqslant 2$, à la sphère

$$\mathrm{S}^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Elle est recouverte par les $2n$ demi-sphères ouvertes X_i^+, X_i^-, et les changements de coordonnées sont C^∞.

Définition 1.5 **(Produits de variétés)**. — Soient X et Y deux variétés C^∞, de dimension n et p respectivement. Alors $X \times Y$ est une variété C^∞, de dimension $n+p$.

En effet, si $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$, resp. $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ est un système de cartes pour X, resp. Y, alors les $U_i \times V_j$ forment un recouvrement ouvert de $X \times Y$, et chaque $\phi_i \times \psi_j$ est un homémomorphisme de $U_i \times V_j$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$. Enfin, les changements de cartes sont « séparément C^∞ » en les variables de X et celles de Y, et ceci entraîne qu'ils sont globalement C^∞, voir le paragraphe 1.2 plus bas, ou, par exemple, [**Ca**], première partie, I.3.7.2.

Définition 1.6 **(Applications** C^∞**)**. — Soient X et Y deux variétés C^∞, de dimension n et p respectivement. Une application continue $f : X \to Y$ est dite C^∞ (ou, un morphisme de variétés) si, pour tout $x \in X$, *il existe* une carte (V, ψ) au voisinage de $y = f(x)$, et une carte (U, ϕ) au voisinage de x, telles que $f(U) \subseteq V$ et l'application

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

soit une application C^∞ entre les ouverts $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\psi(V) \subseteq \mathbb{R}^p$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que, dans ce cas, ceci est vérifié pour *tout* couple de cartes comme ci-dessus.

Exemple 1.7. — $S^1 \times S^1$ est une variété de dimension 2, et les applications $S^1 \times S^1 \to S^2$ ci-dessous sont C^∞. Elles correspondent, respectivement, au « découpage » de S^2 (= la Terre) en méridiens, resp. en parallèles :

$$M((x,y),(x',y')) = (x'x, x'y, y'),$$
$$P((x,y),(x',y')) = (x'\sqrt{1-y^2}\,, y'\sqrt{1-y^2}\,, y).$$

Définition 1.8. — Un **groupe de Lie** (réel) est une variété G de classe C^∞, munie d'une structure de groupe telle que l'application

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x,y) \mapsto xy^{-1}$$

soit C^∞.

Exemples 1.9. — Il est immédiat de vérifier que $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe de Lie, de même que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}^*_+$, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

On laisse au lecteur intéressé le soin de vérifier que le cercle S^1 = groupe des nombres complexes de norme 1 est un groupe de Lie, de même que la sphère S^3 = groupe des quaternions de norme 1. Un autre exemple, fondamental, est le suivant.

Exemple 1.10 **(Groupes linéaires)**. — L'application $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{dét} A$ est C^∞, puisque c'est un polynôme (homogène de degré n) en les coefficients

$a_{i,j}$ de A. Donc le groupe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{dét}\,\mathrm{A} \neq 0\}$$

est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et l'application

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{A} \mapsto (\text{dét}\,\mathrm{A})^{-1}$$

est C^∞.

L'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ est C^∞, puisque chaque coefficient

$$(\mathrm{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

est une fonction C^∞ (un polynôme quadratique) des coefficients de A et B. Soit $\mathrm{C}(\mathrm{A})$ la matrice des cofacteurs de A, c.-à-d., $\mathrm{C}(\mathrm{A})_{i,j}$ est le déterminant de la matrice de taille $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne ; c'est un polynôme homogène de degré $n-1$ en les coefficients de A. D'après la formule

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\,\mathrm{A}}\,{}^t\mathrm{C}(\mathrm{A}),$$

où ^{t} désigne la matrice transposée, on voit que $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{-1}$ est une application C^∞ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie.

Un cas particulier important de variétés est le suivant.

***Définition 1.11* (Sous-variétés de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$).** — Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. On dit que X est une « sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ » de dimension n, si, pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, avec $x \in \mathrm{U}$ et $0 \in \mathrm{V}$, et un difféomorphisme C^∞

$$\phi : \mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \phi(x) = 0, \\ \mathrm{U} \cap \mathrm{X} = \phi^{-1}\left(\mathrm{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right). \end{cases}$$

Proposition 1.12. — *Soit* X *une « sous-variété* C^∞ *de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *» de dimension* n. *Alors* X *est une variété* C^∞ *au sens de la définition* 1.1, *et l'inclusion* $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{R}^\mathrm{N}$ *est un morphisme de variétés. Par conséquent, on peut écrire que* X *est une sous-variété* C^∞ *de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ (sans guillemets !).

Démonstration. — D'abord, X, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, est un espace topologique séparé. Puis, par hypothèse, pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe des ouverts U_x et V_x de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, avec $x \in \mathrm{U}_x$ et $0 \in \mathrm{V}_x$, et un difféomorphisme C^∞ $\phi : \mathrm{U}_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}_x$ tel que $\phi_x(x) = 0$ et

$$\mathrm{U}_x \cap \mathrm{X} = \phi_x^{-1}\left(\mathrm{V}_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right).$$

Ces ouverts $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{X}$ forment un recouvrement de X, et il faut voir que, pour $x \neq y$, les « changements de cartes » sont C^∞. Posons

$$\Omega_x = \phi_x(\mathrm{U}_x \cap \mathrm{U}_y) \quad \text{et} \quad \Omega_y = \phi_y(\mathrm{U}_y \cap \mathrm{U}_x);$$

ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et par hypothèse on a un difféomorphisme C^∞

$$\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \Omega_x \xrightarrow{\sim} \Omega_y,$$

qui envoie $\Omega_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \phi_x(\mathrm{U}_x \cap \mathrm{X} \cap \mathrm{U}_y)$ sur $\phi_y(\mathrm{U}_y \cap \mathrm{X} \cap \mathrm{U}_x) = \Omega_y \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Comme l'inclusion $\tau : \Omega_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \hookrightarrow \Omega_x$ est C^∞, on obtient que l'homéomorphisme

$$\Omega_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \xrightarrow{\sim} \Omega_y \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

induit par $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ est C^∞, ainsi que son inverse (qui est induit par $\phi_x \circ \phi_y^{-1}$). Ceci prouve que X est une variété, et aussi que l'inclusion $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{R}^\mathrm{N}$ est un morphisme de variétés. □

Proposition 1.13. — *Soit* X (*resp.* Y) *une sous-variété de* $\mathbb{R}^m$ (*resp.* $\mathbb{R}^n$) *de dimension* p (*resp.* q), *et soit* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *une application* C^∞ *telle que* $f(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{Y}$. *Alors* f *est une application* C^∞ *de* X *vers* Y.

Démonstration. — Soient $x \in \mathrm{X}$ et $y = f(x)$. Par hypothèse, il existe des voisinages ouverts V_y et V'_0 de y et de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et U_x et U'_0 de x et de 0 dans $\mathbb{R}^m$, tels que $f(\mathrm{U}_x) \subseteq \mathrm{V}_y$ et qu'il existe des difféomorphismes C^∞

$$\psi : \mathrm{V}_y \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}'_0, \qquad \phi : \mathrm{U}_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}'_0$$

tels que

$$\psi(\mathrm{V}_y \cap \mathrm{Y}) = \mathrm{V}'_0 \cap \mathbb{R}^q, \qquad \phi(\mathrm{U}_x \cap \mathrm{X}) = \mathrm{U}'_0 \cap \mathbb{R}^p.$$

Alors, la restriction de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ à $\mathrm{U}'_0 \cap \mathbb{R}^p$ est une application C^∞, car c'est la restriction à $\mathrm{U}'_0 \cap \mathbb{R}^p$ de la composée :

$$\mathbb{R}^p \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{R}^q,$$

qui est bien C^∞. □

1.2. « Rappels » de calcul différentiel. — Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de variétés, pour définir la différentielle de f en un point x de X, il faut avoir au préalable défini l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$. Et pour définir l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, on a besoin de disposer de la notion de différentielle d'une application C^∞ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Heureusement, il n'y a pas de cercle vicieux, car l'espace tangent en un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$.

On va donc commencer par rappeler les notions d'application différentiable, de dérivées partielles, d'applications de classe C^∞, etc. Pour les résultats donnés sans démonstration, on renvoie à [**Ca**] ou [**Laf**].

Définition 1.14. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in \mathrm{U}$. Une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ est **différentiable en** x_0 s'il existe une application linéaire $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{L}(h) + o(h).$$

(Ceci implique, en particulier, que f est continue en x_0.) Dans ce cas, L est unique, on l'appelle la **différentielle** (ou *application linéaire tangente*) de f en x_0, et on la note $d_{x_0}f$ ou $(df)_{x_0}$.

On dit que f est **différentiable** (sous-entendu : sur U) si elle est différentiable en tout point de U.

Remarque 1.15. — Si $n = 1$, on voit que f est différentiable en x_0 si et seulement si la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

existe ; c'est alors un élément v_0 de $\mathbb{R}^p$. Dans ce cas, f est dérivable en x_0, sa dérivée $f'(x_0)$ est le vecteur v_0, et sa différentielle en x_0 est l'application linéaire

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p, \qquad t \mapsto tv_0.$$

Par conséquent, $f'(x_0) = (d_{x_0}f)(1)$.

Si f est une application différentiable d'un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, on dit que f est une **courbe** différentiable, et pour tout $t \in \mathrm{I}$, le vecteur $f'(t) \in \mathbb{R}^p$ est parfois appelé le *vecteur vitesse* en t (ou « à l'instant t »).

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.16. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{U}$ *et* $i = 1, \ldots, n$, *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

existe, et vaut $(d_x f)(e_i)$.

Remarque 1.17. — Il est bien connu que la réciproque est fausse ; par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{si } \ (x,y) \neq (0,0)$$

admet des dérivées partielles en tout point, mais n'est pas continue, donc a fortiori pas différentiable, en $(0,0)$.

Cependant, on a le résultat suivant.

Théorème 1.18. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. *Si* f *possède des dérivées partielles sur* U *et si elles sont* **continues** *en* $x_0 \in \mathrm{U}$, *alors* f *est différentiable en* x_0.

Définition 1.19. — On dit que $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est **de classe** C^1 si elle possède des dérivées partielles continues sur U. Ceci entraîne que f est différentiable sur U, et que l'application

$$\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \qquad x \mapsto d_x f$$

est continue. On peut alors définir, par récurrence sur k, la notion suivante. Une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est **de classe** C^k si elle possède sur U des dérivées partielles qui sont de classe C^{k-1}. Enfin, on dit que f est (de classe) C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$. Ceci équivaut à dire que les dérivées partielles de tout ordre :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$$

existent et sont continues.

Revenant au cas d'une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$, tout ce qui précède s'étend comme suit. Notons $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f. Alors, on a le résultat et la définition qui suivent.

Théorème 1.20. — *f est différentiable, resp. de classe C^1, sur U si et seulement si chaque f_i l'est.*

On dit que f est de classe C^∞ si chaque f_i l'est.

***Théorème 1.21* (Différentielle d'une composée)**. — *Soient $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts et soient $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^q$ des applications C^∞. Alors $g \circ f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ est C^∞ et l'on a*

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f, \qquad \forall\, x \in \mathrm{U}.$$

D'autre part, la différentielle de id_{U} est, en tout point, l'application identique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.22. — Soient $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts et soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application C^∞. On dit que f est un **difféomorphisme** (de classe C^∞) si f est bijectif et si l'application réciproque $f^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est de classe C^∞.

Dans ce cas, le théorème précédent nous dit que les applications linéaires

$$d_x f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad d_{f(x)} f^{-1} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sont inverses l'une de l'autre. Ceci implique, en particulier, que $n = p$.

Remarque 1.23. — Une bijection C^∞ n'est pas nécessairement un difféomorphisme ; par exemple, l'application $x \mapsto x^3$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est C^∞ et bijective, mais son inverse $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en 0.

Théorème 1.24 **(Théorème d'inversion locale)**. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ *une application* C^∞*, et soit* $x_0 \in \mathrm{U}$ *tel que* $d_{x_0}f$ *soit* **inversible***. Alors il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *dans* U *tel que* $f(\mathrm{V})$ *soit ouvert et* f *induise un difféomorphisme de* V *sur* $f(\mathrm{V})$*.*

Démonstration. — Voir [**Ca**, 1ère partie, Chap. I, sec. 4], ou [**Le**, Chap. I, § 4.A]. □

Définition 1.25. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞. On dit que f est un **difféomorphisme local** si d_xf est inversible, pour tout $x \in \mathrm{U}$.

Dans ce cas, tout $x \in \mathrm{U}$ possède un voisinage ouvert assez petit V tel que $f(\mathrm{V})$ soit ouvert et f induise un difféomorphisme de V sur $f(\mathrm{V})$.

Exemples 1.26. — 1) L'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un difféomorphisme local. (Et, évidemment, exp est un difféomorphisme $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^*$.)

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$ est un difféomorphisme local.

Remarque 1.27. — Les deux exemples précédents sont reliés, en ce sens que l'on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{x \mapsto kx} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \mathbb{C}^*. \end{array}$$

Remarque 1.28. — Généralisant l'exemple 1) précédent, on verra plus loin que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$ l'application exponentielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un difféomorphisme local.

1.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. — Soient X une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, de dimension n, et $x_0 \in \mathrm{X}$. Il y a plusieurs manières de définir l'espace tangent à X en x_0. La plus intuitive est peut-être de dire que c'est l'ensemble des vecteurs vitesse en x_0 des courbes passant par x_0.

Définition 1.29. — On note $\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ formé des vecteurs

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - x_0}{t},$$

où f une application $\mathrm{C}^\infty :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$ telle que $f(0) = x_0$.

Remarque 1.30. — Si $n = \mathrm{N}$ et si $\mathrm{X} = \mathrm{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la définition précédente donne bien, pour tout $x_0 \in \mathrm{U}$,

$$\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{U} = \mathbb{R}^n.$$

En effet, soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 + te_i \in \mathrm{U}$ pour $|t| < \varepsilon$, et alors $f(t) = x_0 + te_i$ est une application $\mathrm{C}^\infty :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$ telle que $f(0) = x_0$ et $f'(0) = e_i$.

Il n'est pas immédiatement évident, d'après la définition 1.29, que $\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. Ceci résulte de la proposition suivante.

Proposition 1.31. — *Soient* X *une sous-variété de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *de dimension* n*, et* $x \in \mathrm{X}$*. Alors* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *est un sous-espace vectoriel de dimension* n *de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$

Démonstration. — Par hypothèse, il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, avec $x \in \mathrm{U}$ et $0 \in \mathrm{V}$, et un difféomorphisme C^∞

$$(*) \qquad \phi : \mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \phi(x) = 0, \\ \mathrm{U} \cap \mathrm{X} = \phi^{-1}\left(\mathrm{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right). \end{cases}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$|t| < \varepsilon \Rightarrow tv \in \mathrm{V} \bigcap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Alors la courbe $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$, $t \mapsto \phi^{-1}(tv)$ est C^∞ et l'on a :

$$f(0) = x \qquad \text{et} \qquad f'(0) = d_x\phi^{-1}(v).$$

Ceci montre que $d_x\phi^{-1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{T}_x\mathrm{X}$.

Réciproquement, si $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$, il existe un intervalle $\mathrm{I} =]-\varepsilon, \varepsilon[$ et une courbe C^∞ $f : \mathrm{I} \to \mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ telle que $f(0) = x$ et $v = f'(0)$; alors $\phi \circ f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est une courbe C^∞ telle que

$$(\phi \circ f)(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad d_x\phi(v) = d_x(\phi \circ f)(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci montre que $d_x\phi(\mathrm{T}_x\mathrm{X}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Il en résulte qu'on a l'égalité

$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} = d_x\phi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}),$$

ce qui montre que $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, de dimension n. De plus, l'égalité ci-dessus a lieu pour tout ϕ vérifiant $(*)$. □

La définition précédente n'est en général pas pratique pour calculer $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$. Mais on a la seconde approche suivante.

Définition 1.32. — Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ de dimension n, soit $x \in \mathrm{X}$, et soit $\phi : \mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$ vérifiant la condition $(*)$ précédente. Soient $\phi_1, \dots, \phi_\mathrm{N}$ les composantes de ϕ. Alors, $\phi_{n+1}, \dots, \phi_\mathrm{N}$ sont identiquement nulles sur le voisinage $\mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ de x dans X, tandis que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ induit un difféomorphisme de $\mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ forme un **système de coordonnées locales sur** X au voisinage de x.

Proposition 1.33. — *Avec les notations ci-dessus,* $\mathrm{T}_x\mathrm{X} = \bigcap_{i=n+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{Ker} d_x\phi_i$.

Démonstration. — Par hypothèse, ϕ est un difféomorphisme entre des ouverts U, V de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, tels que $x \in \mathrm{U}$ et $\phi(x) = 0 \in \mathrm{V}$. Alors, la différentielle $d_x\phi$ est inversible ; c'est l'application linéaire

$$\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

dont les composantes sont les formes linéaires $d_x\phi_i$, pour $i = 1, \dots, \mathrm{N}$. C.-à-d., si on écrit la matrice de $d_x\phi$ dans la base standard de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, alors la i-ème ligne de la matrice correspond à la forme linéaire $d_x\phi_i$. Comme la matrice est inversible, les formes linéaires $d_x\phi_1, \dots, d_x\phi_{\mathrm{N}}$ sont linéairement indépendantes, et il en résulte que

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigcap_{i=n+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{Ker} d_x\phi_i = \mathrm{N} - (\mathrm{N} - n) = n.$$

D'autre part, soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ une courbe C^∞ telle que $f(0) = x$. Pour $|t|$ assez petit, on a $f(t) \in \mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ d'où, pour $i = n+1, \dots, \mathrm{N}$, $\phi_i(f(t)) = 0$, et donc

$$0 = (\phi_i \circ f)'(0) = d_x\phi_i(f'(0)).$$

Ceci montre que $\mathrm{T}_x\mathrm{X} \subseteq \bigcap_{i=n+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{Ker} d_x\phi_i$, et comme ils sont tous deux de dimension n, on a l'égalité. La proposition est démontrée. $\square$

Exemple 1.34. — Soit $\mathrm{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et soit p_0 le point $(0, 0, 1)$. Alors, au voisinage de p_0 l'application

$$\phi : (x, y, z) \mapsto (x, y, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de p_0 dans $\mathbb{R}^3$ (explicitement, le demi-espace $z > 0$) sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$; le difféomorphisme inverse étant

$$\psi : (x, y, z') \mapsto (x, y, \sqrt{z' + 1 - x^2 - y^2}).$$

Alors $\phi_3 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, d'où $d_{p_0}\phi_3 = 2dz$. On retrouve ainsi que l'espace tangent à S^2 en p_0 est formé des points $p \in \mathbb{R}^3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{p_0p}$ soit annulé par la forme linéaire dz, c.-à-d., c'est le plan horizontal passant par p_0.

Dans l'exemple ci-dessus, on a montré explicitement que l'équation de la sphère $\mathrm{F} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ faisait partie d'un système de coordonnées locales au voisinage de p_0, afin de pouvoir appliquer la proposition précédente. Il ne serait pas commode de faire de même dans le cas général d'une sous-variété X de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ définie par des équations $f_1, \dots, f_p$, par exemple pour montrer que le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\}$$

est une sous-variété et déterminer son espace tangent en l'identité. Heureusement, on dispose des résultats généraux suivants.

1.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f_1, \ldots, f_p$ des applications $\Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On va montrer que, sous certaines hypothèses, l'ensemble

$$\mathrm{X} = \{x \in \Omega \mid f_i(x) = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, p\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Introduisons l'application C^∞

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p, \qquad x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x)).$$

Alors, $\mathrm{X} = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$.

Remarque 1.35. — Il est parfois plus commode de travailler avec l'application $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ qu'avec ses composantes $(f_1, \ldots, f_p)$. Par exemple, prenant l'ouvert $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ de $\mathrm{M}_k(\mathbb{R})$ et l'application C^∞

$$f : \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_k(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} - \mathrm{I}_k$$

on obtiendra plus bas que le groupe orthogonal $\mathrm{O}(k)$ est un sous-groupe de Lie fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de dimension $k(k-1)/2$.

Revenons au cas général. La différentielle df a pour composantes $df_1, \ldots, df_p$ et, dans les bases standard de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, chaque $d_x f$ est représenté par la matrice

$$d_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x).$$

Définition 1.36. — Le rang $r(x)$ de cette matrice est le rang de $d_x f$; on l'appelle aussi le **rang de** $(df_1, \ldots, df_p)$ **en** x. C'est la dimension du sous-espace de $(\mathbb{R}^n)^*$ engendré par les formes linéaires $d_x f_1, \ldots, d_x f_p$. Par conséquent, on a

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} d_x f_i = n - r(x).$$

Définition 1.37. — On dit que f est de **rang constant** sur Ω si $r(x)$ est constant sur Ω.

Pour tout $y \in f(\Omega)$, on pose $\mathrm{X}_y = f^{-1}(y)$.

***Théorème 1.38* (Théorème du rang constant)**. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application C^∞ de rang constant r. Alors, X_y est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$, pour tout $y \in f(\Omega)$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{X}_y$, on a*

$$\mathrm{T}_x \mathrm{X}_y = \operatorname{Ker} d_x f = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} d_x f_i.$$

Démonstration. — Voir [**Le**, Chap. I, § 4.A] ou [**Laf**, Chap. I, Ex. 10]. □

Exemple 1.39. — La sphère S^2 est définie par l'équation

$$0 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Alors $df = 2(xdx+ydy+zdz)$ est de rang maximum 1 en tout point de $\mathbb{R}^3$ autre que $(0, 0, 0)$ et le théorème permet de retrouver que S^2 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ et que son espace tangent en tout point p est $\operatorname{Ker} d_p f$.

Définition 1.40 **(Formes bilinéaires symétriques ou alternées non dégénérées)**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$. Par définition, son groupe orthogonal est

$$\mathrm{O}(\phi) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \phi(\mathrm{A}x, \mathrm{A}y) = \phi(x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Soit $\mathrm{J} = (\phi(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ la matrice de ϕ dans la base standard de $\mathbb{R}^n$; c'est une matrice symétrique inversible. En notation matricielle, on a :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad \phi(x, y) = {}^t x \mathrm{J} y,$$

d'où on déduit que $\mathrm{O}(\phi)$ égale le sous-groupe ci-dessous :

$$\mathrm{O}(\mathrm{J}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{J}\mathrm{A} = \mathrm{J}\}.$$

2) Supposons $n = 2k$ **pair** et soit ψ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$. On lui associe son groupe *symplectique*

$$\mathrm{Sp}(\psi) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \psi(\mathrm{A}x, \mathrm{A}y) = \psi(x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Soit $\mathrm{J} = (\psi(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ la matrice de ψ dans la base standard de $\mathbb{R}^n$; c'est une matrice antisymétrique inversible. En notation matricielle, on a :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad \psi(x, y) = {}^t x \mathrm{J} y,$$

d'où on déduit que $\mathrm{Sp}(\psi)$ égale le sous-groupe ci-dessous :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{J}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{J}\mathrm{A} = \mathrm{J}\}.$$

Théorème 1.41 **(Groupes orthogonaux et symplectiques)**

Soit $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *symétrique ou antisymétrique* (*dans le second cas,* $n = 2k$ *est pair*)*. Alors, le groupe orthogonal ou symplectique de* J *:*

$$\{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{J}\mathrm{A} = \mathrm{J}\}$$

est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, et donc un groupe de Lie.*

1) *Dans le cas orthogonal, c.-à-d., pour* J *symétrique, sa dimension est* $n(n-1)/2$ *; plus précisément, pour tout* $g \in \mathrm{O}(\mathrm{J})$*, on a*

$$\mathrm{T}_g\mathrm{O}(\mathrm{J}) = \{g\mathrm{J}^{-1}\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})\},$$

où $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ *désigne l'espace des matrices antisymétriques dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*.*

2) *Dans le cas symplectique, c.-à-d., pour* J *antisymétrique, sa dimension est* $n(n+1)/2 = k(2k+1)$ *; plus précisément, pour tout* $g \in \mathrm{Sp}(\mathrm{J})$*, on a*

$$\mathrm{T}_g \operatorname{Sp}(\mathrm{J}) = \{g\mathrm{J}^{-1}\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}_n(\mathbb{R})\},$$

où $\mathcal{S}\mathrm{ym}_n(\mathbb{R})$ *désigne l'espace des matrices symétriques dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Comme l'application

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto {}^t\mathrm{AJB}$$

est bilinéaire, sa différentielle en tout point (A, B) est l'application linéaire

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto {}^t\mathrm{XJB} + {}^t\mathrm{AJY}.$$

On en déduit que l'application $f : \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{AJA} - \mathrm{J}$ a pour différentielle, en tout point $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application linéaire

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{XJA}_0 + {}^t\mathrm{A}_0\mathrm{JX},$$

d'où $\mathrm{Ker}\, d_{\mathrm{A}_0} f = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t({}^t\mathrm{A}_0\, {}^t\mathrm{JX}) = -{}^t\mathrm{A}_0\mathrm{JX}\}$. Il en résulte que f est de rang constant sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, distinguons les deux cas.

1) Si J est symétrique, c.-à-d., ${}^t\mathrm{J} = \mathrm{J}$, la condition équivaut à

$${}^t({}^t\mathrm{A}_0\, \mathrm{JX}) = -{}^t\mathrm{A}_0\mathrm{JX},$$

c.-à-d., ${}^t\mathrm{A}_0\mathrm{JX} \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$. Donc tous les noyaux sont de dimension $n(n-1)/2$. Alors, il résulte du théorème du rang constant que $\mathrm{O}(\mathrm{J}) = f^{-1}(0)$ est une sous-variété fermée de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n(n-1)/2$. De plus, pour tout $g \in \mathrm{O}(\mathrm{J})$, on a $\mathrm{J}^{-1}\, ({}^tg^{-1}) = g\mathrm{J}^{-1}$ et donc

$$\mathrm{T}_g\mathrm{O}(\mathrm{J}) = \mathrm{Ker}\, d_g f = g\mathrm{J}^{-1}\mathcal{AS}_n(\mathbb{R}).$$

2) Si J est antisymétrique, c.-à-d., ${}^t\mathrm{J} = -\mathrm{J}$, la condition équivaut à

$${}^t({}^t\mathrm{A}_0\, \mathrm{JX}) = {}^t\mathrm{A}_0\mathrm{JX},$$

c.-à-d., ${}^t\mathrm{A}_0\mathrm{JX} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}_n(\mathbb{R})$, et tous les noyaux sont de dimension $n(n+1)/2 = k(2k+1)$. Alors, il résulte du théorème du rang constant que $\mathrm{Sp}(\mathrm{J}) = f^{-1}(0)$ est une sous-variété fermée de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n(n+1)/2$. De plus, pour tout $g \in \mathrm{Sp}(\mathrm{J})$, on a $\mathrm{J}^{-1}\, ({}^tg^{-1}) = g\mathrm{J}^{-1}$ et donc

$$\mathrm{T}_g\, \mathrm{Sp}(\mathrm{J}) = \mathrm{Ker}\, d_g f = g\mathrm{J}^{-1}\mathcal{S}\mathrm{ym}_n(\mathbb{R}).$$

Dans les deux cas, posant $\mathrm{G} = \mathrm{O}(\mathrm{J})$ ou $\mathrm{Sp}(\mathrm{J})$, l'application

$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}^{-1}$$

est C^∞ (d'après 1.10) et applique $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans G. Donc, d'après la proposition 1.13, G est un groupe de Lie. □

Remarques 1.42. — 1) Dans les deux cas, l'espace tangent en l'identité est

$$\mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{G} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{X} = -\mathrm{JXJ}^{-1}\}.$$

Compte-tenu de l'égalité $\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{X}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{X})$, ceci entraîne $\mathrm{Tr}(\mathrm{X}) = 0$, et donc $\mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{G} \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

2) Dans les deux cas, on vérifie que si $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{G}$, alors $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$ appartient encore à $\mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{G}$. Donc, $\mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

On obtient ainsi les analogues réels des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sp}_{2k}(\mathbb{C})$ considérées dans les paragraphes 12.5 et 12.6 du cours d'Introduction. Ceci n'est pas fortuit : on va voir plus bas que, pour tout groupe de Lie G, l'espace tangent $\mathrm{T}_{\mathrm{id}}\mathrm{G}$ est muni de façon naturelle (fonctorielle !) d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

1.5. Composante connexe d'un groupe topologique. — Commençons par des rappels sur la notion de connexité. Soit X un espace topologique.

Définition 1.43. — On dit que X est **connexe** si X est la seule partie non vide qui soit à la fois ouverte et fermée.

Lemme 1.44. — X *est connexe* $\Leftrightarrow$ *toute fonction continue sur* X *à valeurs dans* $\{0, 1\}$ *est constante.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Proposition 1.45. — 1) *Soient* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de parties connexes de* X, *ayant en commun un point* x_0. *Alors la réunion* $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ *est connexe.*

2) *Soit* C *une partie connexe de* X. *Alors son adhérence* $\overline{\mathrm{C}}$ *est connexe.*

3) *Si* X, Y *sont deux espaces connexes, l'espace produit* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *est connexe.*

4) *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application continue. Si* C *est une partie connexe de* X, *alors* $f(\mathrm{C})$ *est connexe.*

Démonstration. — Tout ceci découle facilement de la caractérisation donnée dans le lemme. □

***Définition 1.46* (Composantes connexes)**. — Soit $x_0 \in \mathrm{X}$. Il résulte de la proposition que la réunion de toutes les parties connexes de X contenant x_0 est une partie connexe fermée C. C'est la plus grande partie connexe de X contenant x_0 ; on l'appelle la composante connexe de x_0.

Elle est stable par toute application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que $f(x_0) = x_0$. En effet, $f(\mathrm{C})$ est une partie connexe contenant x_0, donc $f(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{C}$.

Définition 1.47. — Soit G un groupe topologique. On note G^0 la composante connexe de l'élément neutre e.

Lemme 1.48. — 1) G^0 *est toujours un sous-groupe fermé normal de* G. *De plus, il est stable par toute application continue* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *telle que* $f(e) = e$.

2) *Si, de plus,* e *possède un voisinage connexe, alors* G^0 *est un sous-groupe ouvert et fermé.*

Démonstration. — 1) G^0 est fermé, puisque c'est la composante connexe de e. D'après la proposition précédente, $G^0 \times G^0$ est connexe, et son image par l'application continue $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est une partie connexe contenant e, donc contenue dans G^0. Ceci montre que G^0 est un sous-groupe.

De plus, G^0 est stable par toute application continue $f : G \to G$ telle que $f(e) = e$; en particulier par toutes les conjugaisons $x \mapsto gxg^{-1}$. Ainsi, G^0 est un sous-groupe fermé normal.

2) Supposons que e admette un voisinage connexe V. Soit $g \in G^0$. Alors $G^0 \cup gV$ est connexe, donc égal à G^0. Donc G^0 contient le voisinage gV de g. Ceci montre que G^0 est ouvert. □

Lemme 1.49. — *Soit* G *un groupe topologique. Tout sous-groupe ouvert* H *est aussi fermé.*

Démonstration. — G est la réunion disjointe des classes g_iH, et chacune est ouverte. Le complémentaire de H, étant la réunion des classes g_iH distinctes de H, est donc ouvert. Par conséquent, H est fermé. □

On aura besoin plus loin de la proposition ci-dessous.

Proposition 1.50. — *Supposons* G *connexe et soit* V *un voisinage arbitraire de* e*. Alors le sous-groupe engendré par* V *égale* G*.*

Démonstration. — Soit $W = V \cap V^{-1}$. Alors

$$H = \bigcup_{n \geqslant 1} W^n$$

est un sous-groupe de G, et il est ouvert. En effet, pour tout $x \in H$ il existe n tel que $x \in W^n$ et alors xW est un voisinage de x contenu dans H.

Ainsi, H est un sous-groupe ouvert, donc aussi fermé. Comme G est connexe, il vient $H = G$. □

TABLE DES MATIÈRES