I. GROUPES DE LIE RÉELS (SUITE)

SÉANCE DU 9/11/07

1.6. Dérivations et champs de vecteurs. — [2] Soit X une variété C^∞, soit $p \in \mathrm{X}$ et soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans un voisinage de p. D'après la définition 1.6, f est une application de classe C^∞ au voisinage de p si pour une (et donc, pour toute) carte (U, ϕ) au voisinage de p, la fonction $f \circ \phi^{-1}$ est une fonction C^∞ des « coordonnées locales »

$$(x_1, \dots, x_n).$$

C.-à-d., pour tout $p' \in \mathrm{U}$ on écrit $\phi(p') = (x_1, \dots, x_n)$, on demande alors que la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

(un abus d'écriture pour désigner $f(p') = (f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_n)$), soit une fonction C^∞ des x_i. Ceci ne dépend pas de la carte choisie, puisque les changements de cartes sont C^∞.

***Définition 1.51* (Germes de fonctions).** — On considère les couples (V, f), où V est un voisinage ouvert de p et $f : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ une application C^∞. On dit que deux couples (V, f) et (V', g) sont équivalents si f et g coïncident sur un voisinage W de p contenu dans $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}'$.

Une classe d'équivalence est appelé un **germe de fonction** C^∞ en p. On pense à un germe comme à une fonction C^∞ f définie sur un voisinage « non spécifié » de p. Les germes s'ajoutent et se multiplient commes les fonctions usuelles : si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont deux germes, et si (V, f) et (V', g) en sont des représentants, alors $f + g$ et fg sont définies et C^∞ sur $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap \mathrm{V}'$, et ceci définit les germes $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ et $\mathbf{fg}$. On vérifie facilement que cela ne dépend pas des représentants choisis. On obtient donc ainsi une $\mathbb{R}$-algèbre notée

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p.$$

[2] version du 20/11/07 (correction $\eta(1) = 0$ p.18, l.-7)

De plus, pour tout voisinage V de p, on a

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V})_p$$

car tout germe en p peut être représenté par un couple (W, f) avec $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V}$. En particulier, soit (V, ϕ) une carte au voisinage de p et soit U l'ouvert $\phi(\mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer ϕ par $t \circ \phi$, où $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une translation, on peut supposer que U contient le point 0 de $\mathbb{R}^n$. On obtient alors :

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V})_p \cong \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})_0 = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_0.$$

Ceci permet de ramener toutes les questions portant sur $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$ au cas où $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ (et $p = 0$).

Définition 1.52. — On note $\mathfrak{m}_p$ l'idéal de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$ formé des germes de fonctions nulles en p. C'est un idéal **maximal**, puisque c'est le noyau du morphisme d'évaluation en p :

$$\varepsilon_p : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \mapsto f(p),$$

de sorte que $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{R}$.

***Définition 1.53* (Dérivations ponctuelles)**. — On appelle dérivation ponctuelle en p une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{D} : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathrm{D}(fg) = f(p)\mathrm{D}(g) + g(p)\mathrm{D}(f), \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p.$$

Un tel D s'annule sur l'idéal $\mathfrak{m}_p^2$ et aussi sur (le germe de) la fonction constante 1, puisque l'égalité

$$\mathrm{D}(1) = \mathrm{D}(1 \cdot 1) = 1 \cdot \mathrm{D}(1) + 1 \cdot \mathrm{D}(1) \quad \text{entraîne} \quad \mathrm{D}(1) = 0.$$

Réciproquement, soit $\eta \in (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Alors η s'identifie à une forme linéaire sur $\mathfrak{m}_p$, nulle sur $\mathfrak{m}_p^2$, et comme

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p = \mathbb{R}1 \bigoplus \mathfrak{m}_p,$$

η se prolonge en une forme linéaire sur $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$, encore notée η, telle que $\eta(1) = 0$. Alors, η est une dérivation ponctuelle. En effet, pour f, g arbitraires, on a

$$fg - f(p)g - g(p)f = (f - f(p)) \cdot (g - g(p)) - f(p)g(p)1\,;$$

par hypothèse, η s'annule sur le membre de droite, d'où $\eta(fg) = f(p)\eta(g) + g(p)\eta(f)$. On obtient donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R}) \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$$

où l'on a noté $\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R})$ l'espace des dérivations ponctuelles en p.

***Définition 1.54* (Espaces tangents et différentielles).** — 1) L'espace tangent à X en p est défini par :

$$\mathrm{T}_p\mathrm{X} = \mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R}) \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*.$$

2) Soit $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés. Sa différentielle en p est l'application linéaire

$$d_p\phi : \mathrm{T}_p\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}_{\phi(p)}(\mathrm{Y}), \qquad \mathrm{D} \mapsto \mathrm{D} \circ {}^t\phi,$$

où ${}^t\phi$ désigne la transposée de ϕ, c.-à-d., pour tout $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{Y})_{\phi(p)}$,

$${}^t\phi(g) := g \circ \phi \ \text{ appartient à } \ \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p,$$

et l'on pose

$$(d_p\phi(\mathrm{D}))(g) = \mathrm{D}(g \circ \phi). \tag{$*$}$$

Alors $d_p\phi(\mathrm{D})$ est bien une dérivation ponctuelle de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{Y})_{\phi(p)}$.

***Proposition 1.55* (Différentielle d'une composée).** — $d_p\,\mathrm{id}_\mathrm{X} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_p\mathrm{X}}$ *et, si* $\psi : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *est un second morphisme de variétés, alors*

$$d_p(\psi \circ \phi) = d_{\phi(p)}\psi \circ d_p\phi.$$

Démonstration. — Ceci résulte de la définition. □

La définition précédente a l'avantage d'être intrinsèque, c.-à-d., elle ne fait pas intervenir de cartes de X. De plus, il résulte de la proposition que la définition est invariante par difféomorphisme local, c.-à-d., si ϕ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de p sur un voisinage ouvert W de $\phi(p)$, alors $d_p\phi$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{T}_p\mathrm{X} = \mathrm{T}_p\mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathrm{W} = \mathrm{T}_p\mathrm{Y}.$$

Pour retomber sur nos pieds, il faut vérifier que lorsque $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$, on retrouve la définition antérieure de l'espace tangent. Ceci résulte du lemme et de la proposition qui suivent.

***Lemme 1.56*.** — *Soient* U *une boule ouverte centrée en* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction* C^∞ *sur* U*. Pour tout* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{U}$*, on a*

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt, \tag{$\star$}$$

et chaque fonction $g_i(x) = \int_0^1 (\partial f/\partial x_i)(tx)\,dt$ *est* C^∞ *sur* U*. Par conséquent, l'idéal de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$ *des fonctions nulles en* 0 *est engendré par les fonctions coordonnées* $x_1, \dots, x_n$*.*

Démonstration. — Fixons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et posons $\mathrm{F}(t) = f(tx)$ pour $t \in \mathrm{I}$, où I est un intervalle ouvert contenant $[0,1]$. Alors F est C^∞ et

$$f(x) - f(0) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \int_0^1 \mathrm{F}'(t)\, dt.$$

De plus, F est la composée de f et de l'application linéaire $u : t \mapsto tx$. Donc, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(t)$ égale

$$(d_t\mathrm{F})(1) = (d_{tx}f \circ u)(1) = (d_{tx}f)\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

La formule $(\star)$ en résulte. De plus, par dérivation sous le signe $\int$, chaque g_i est une fonction C^∞ de x. Donc, le terme de droite appartient à l'idéal de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$ engendré par les fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_n$, et si $f(0) = 0$ alors f appartient à cet idéal. Le lemme est démontré. $\square$

Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est une *dérivation* de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, c.-à-d., vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = g\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}, \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De plus, pour tout $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, le germe en q (et donc *a fortiori* la valeur en q) de $\partial f/\partial x_i$ ne dépend que du germe de f en q. Donc, $\partial/\partial x_i$ induit un élément

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \in \mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R}), \qquad \mathbf{f} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(q),$$

où f est un représentant arbitraire du germe $\mathbf{f}$.

Soit $\mathfrak{m}_q$ l'idéal de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q$ formé des germes de fonctions nulles en q. Chaque fonction coordonnée $x_i - q_i$ appartient à $\mathfrak{m}_q$ et on note $dx_i = \overline{x_i - q_i}$ son image dans $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2$.

Proposition 1.57. — 1) $(\overline{x_1 - q_1}, \dots, \overline{x_n - q_n})$ *est une base de* $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2$, *et la base duale de* $\mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R})$ *est*

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_q\right).$$

2) *L'espace tangent* $\mathrm{T}_q\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ *s'identifie à* $\mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R})$ *: tout vecteur* $v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ *correspond à la dérivation ponctuelle*

$$\mathrm{D}_v : \mathbf{f} \mapsto (d_q f)(v) = \sum_{i=1}^n a_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q(\mathbf{f}),$$

où f *est un représentant arbitraire du germe* $\mathbf{f}$*.*

3) *Via les identifications* $\mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R}) \cong (\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*$ *et*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T}_q\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}((\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2)^*, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2,$$

la différentielle $d_q x_i$ *s'identifie à l'élément* $dx_i = \overline{x_i - q_i}$*, ce qui justifie la notation. De plus, pour toute application* C^∞ $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$*, où* U *est un voisinage ouvert de* q*, on a :*

$$d_q f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\, dx_i.$$

Démonstration. — Par translation, on se ramène à $q = 0$. D'après le lemme 1.56, $x_1, \ldots, x_n$ engendrent $\mathfrak{m}_0$, et donc leurs images $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ engendrent $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Elles sont linéairement indépendantes puisque

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 (\overline{x_j}) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(0) = \delta_{ij}.$$

L'assertion 1) en résulte, et les assertions 2) et 3) aussi. □

Revenons à une variété C^∞ arbitraire X. Soit $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur X.

***Définition 1.58* (Dérivations de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$).** — Une **dérivation** de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{D} : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ telle que

$$\mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(f)g + f\mathrm{D}(g), \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}).$$

On note $\mathrm{Dér}(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}))$ l'espace des dérivations de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$.

On peut maintenant expliciter la notion de **champ de vecteurs $\mathbf{C}^\infty$** sur X.

Soit $p \in \mathrm{X}$ et soit (U, ϕ) une carte au voisinage de p. Pour tout $q \in \mathrm{U}$, on écrit $\phi(q) = (x_1, \ldots, x_n)$ et, par définition, une fonction continue $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est C^∞ si et seulement si la fonction

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

(un abus d'écriture pour désigner $(f \circ \phi^{-1})(x_1, \ldots, x_n)$) est une fonction C^∞ sur l'ouvert $\phi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $q \in \mathrm{U}$, on a une identification

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_q\mathrm{X}$$

définie comme suit. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; au vecteur e_i on associe le « champ de vecteurs » $\partial/\partial x_i$ sur U défini, en tout point $q \in \mathrm{U}$, par la proposition 1.57. C.-à-d., $\partial/\partial x_i$ désigne ici la « collection » de vecteurs tangents

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \in \mathrm{T}_q\mathrm{X}, \qquad \forall\, q \in \mathrm{U},$$

définis dans la proposition 1.57. Alors, par définition un *champ de vecteurs* v sur U est la donnée d'une collection de vecteurs tangents $v_q \in \mathrm{T}_q\mathrm{X}$; d'après la proposition 1.57, on écrire, en tout point $q \in \mathrm{U}$,

$$v_q = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q,$$

avec $\mathrm{P}_i(q) \in \mathbb{R}$. On dit que le champ de vecteurs v est C^∞ si les fonctions $q \mapsto \mathrm{P}_i(q)$ sont C^∞ sur U.

D'autre part, notons $\mathbb{R}^{\mathrm{U}}$ l'algèbre de *toutes* les fonctions $\mathrm{U} \to \mathbb{R}$. À v on associe l'application $\mathrm{D}_v : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}) \to \mathbb{R}^{\mathrm{U}}$ définie, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$, par :

$$\mathrm{D}_v(f)(q) = d_q f(v_q) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(q) \frac{\partial f}{\partial x_i}(q), \tag{1}$$

où $(\partial f/\partial x_i)(q)$ désigne, avec l'abus d'écriture rappelé plus haut, $\partial(f\circ\phi^{-1})/\partial x_i$ évaluée en $\phi(q)$. Alors,

$$\mathrm{D}_v(x_i) = \mathrm{P}_i. \tag{2}$$

Donc, d'une part, v est déterminé par D_v et, d'autre part, la condition $\mathrm{P}_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$ implique, et est équivalente, à la condition suivante :

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}), \qquad \mathrm{D}_v(f) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}). \tag{3}$$

L'implication résulte de la formule (1), qui se récrit :

$$\mathrm{D}_v(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et la réciproque est le cas particulier $f = x_i$ donnant (2).

***Définition 1.59* (Champs de vecteurs sur X et dérivations)**
Un champ de vecteurs v sur X est la donnée, pour tout $p \in \mathrm{X}$, d'un élément de $\mathrm{T}_p\mathrm{X}$ noté v_p ou $v(p)$; pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ on obtient ainsi une *fonction*

$$\mathrm{D}_v(f) : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \mapsto d_p f(v_p).$$

On dit que v est C^∞ si la condition ci-dessous est vérifiée :

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{D}_v(f) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}).$$

Dans ce cas, l'application $f \mapsto \mathrm{D}_v(f)$ est une **dérivation** de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$, puisque pour tout p on a

$$\mathrm{D}_v(fg)(p) = d_p(fg)(v_p) = (f(p)d_p g + g(p)d_p f)(v_p) = (f\mathrm{D}_v(g) + g\mathrm{D}_v(f))(p).$$

D'après ce qui précède, la condition que v soit C^∞ équivaut à dire que pour tout $p \in \mathrm{X}$, il existe des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur un voisinage ouvert U de p telles que pour tout $q \in \mathrm{U}$, v_q s'écrive

$$v_q = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q,$$

avec des « coefficients » $\mathrm{P}_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$; alors ceci est le cas pour *toute* carte.

L'application $v \mapsto \mathrm{D}_v$ est $\mathbb{R}$-linéaire, et elle est *injective* car on a vu plus haut que la dérivation D_v détermine le champ de vecteurs v, puisque, pour tout système $(x_1, \ldots, x_n)$ de coordonnées locales au voisinage d'un point $p \in \mathrm{X}$, on a

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_v(x_i)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

De plus, l'application $v \mapsto \mathrm{D}_v$ est *bijective*, d'après le théorème suivant.

Notation 1.60. — Pour tout $p \in \mathrm{X}$, on note ε_p l'application d'évaluation en p :

$$\varepsilon_p : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \mapsto f(p)$$

Théorème 1.61 **(Localité des dérivations)**. — *Toute dérivation* D *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ *provient d'un champ de vecteurs* C^∞ v *(nécessairement unique). Plus précisément, pour tout* $p \in \mathrm{X}$*,* D *se prolonge en une dérivation ponctuelle de l'algèbre des germes* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$*, qu'on notera encore* D*. Alors, le champ de vecteurs* v *défini par* $v_p = \varepsilon_p \circ \mathrm{D}$*, pour tout* $p \in \mathrm{X}$*, est* C^∞ *et l'on a* $\mathrm{D} = \mathrm{D}_v$*.*

Par conséquent : « une dérivation de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ *est la même chose qu'un champ de vecteurs* C^∞ *sur* X *».*

Démonstration. — Soit $p_0 \in \mathrm{X}$. Montrons d'abord que, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$, le germe en p_0 de $\mathrm{D}(f)$ ne dépend que de celui de f (c'est cette propriété qui explique le titre du théorème).

Par linéarité, il suffit de montrer que si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ est nulle sur un voisinage V de p_0, alors $\mathrm{D}(f)$ est nulle sur un voisinage W de p_0.

Or, il existe une fonction $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ nulle hors de V et valant 1 sur un petit voisinage W de p_0 contenu dans V, cf. [**Laf**, Chap. III.A]. Alors on a

$$f = f(1-h),$$

car $f = 0$ dans V et $(1-h) = 1$ hors de V. Donc

$$\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(f)(1-h) + f\mathrm{D}(1-h)$$

est nulle sur $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V}$, car f et $1-h$ le sont.

Soit maintenant $\mathbf{f}$ un germe en p_0 de fonction C^∞, représenté par un couple (U, f). Soit V un voisinage de p_0 tel que $\overline{\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{U}$ et soit h une fonction C^∞

nulle hors de V et valant 1 dans un petit voisinage de p_0. Alors la fonction fh est C^∞ sur X et l'on peut poser

$$\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(fh).$$

D'après ce qui précède, le germe en p_0 de $\mathrm{D}(f)$ ne dépend pas du choix de h. Ceci prouve que D se prolonge en une dérivation de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_{p_0}$, qu'on note encore D. On note alors D_{p_0} la composée

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_{p_0} \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_{p_0} \xrightarrow{\varepsilon_{p_0}} \mathbb{R};$$

c'est une dérivation ponctuelle de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_{p_0}$.

D'après la proposition 1.57, c.-à-d., d'après les isomorphismes

$$\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R}) \cong \mathrm{T}_p\mathrm{X}, \qquad \forall\, p \in \mathrm{X},$$

il existe un champ de vecteurs v sur X défini par $v_p = \mathrm{D}_p$, pour tout $p \in \mathrm{X}$, c.-à-d., pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ et $p \in \mathrm{X}$,

$$\mathrm{D}_v(f)(p) = \mathrm{D}_p(f) = \mathrm{D}(f)(p).$$

Alors $\mathrm{D}_v(f) = \mathrm{D}(f)$, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$, et ceci montre que v est C^∞ et $\mathrm{D}_v = \mathrm{D}$. Le théorème est démontré. $\square$

Remarque 1.62. — La fin de la démonstration peut être écrit de façon plus explicite de la manière suivante. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur un voisinage ouvert U de p_0. Alors, d'après la proposition 1.57, pour tout $p \in \mathrm{U}$ les $(\partial/\partial x_i)_p$ forment une base de $\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R})$, et on peut donc écrire

$$\mathrm{D}_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

où les coefficients $a_i(p) \in \mathbb{R}$ sont déterminés par :

$$a_i(p) = \mathrm{D}_p(x_i).$$

D'après le début de la démonstration du théorème 1.61, il existe une fonction $\widetilde{x_i} \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ qui coïncide avec x_i sur un voisinage V de p_0 contenu dans U. Alors on a, pour tout $p \in \mathrm{V}$,

$$a_i(p) = \mathrm{D}_p(x_i) = \mathrm{D}_p(\widetilde{x_i}) = \mathrm{D}(\widetilde{x_i})(p),$$

ce qui montre que a_i coïncide sur V avec la fonction $\mathrm{D}(\widetilde{x_i}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$. Ceci montre que D induit une dérivation de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{V})$, qui correspond au champ de vecteurs

$$v = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Changeons maintenant de notations : dans la suite, nous désignerons par M, M' des variétés C^∞ et par X, Y (resp. X', Y') des champs de vecteurs C^∞ sur M (resp. M′).

***Définition 1.63* (Dérivations d'une algèbre).** — Soit A un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad (a, b) \mapsto ab.$$

(On ne suppose pas le produit commutatif, ni associatif.) Une **$\mathbb{R}$-dérivation de** A est un $\mathbb{R}$-endomorphisme D de A qui vérifie :

$$\forall\, a, b \in \mathrm{A}, \qquad \mathrm{D}(ab) = a\mathrm{D}(b) + \mathrm{D}(a)b.$$

On note Dér(A) l'ensemble des $\mathbb{R}$-dérivations de A ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$.

***Lemme 1.64*.** — *Soient* D, D' *des dérivations de* A*. Alors* $\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D}$ *est une dérivation de* A*. Par conséquent,* Dér(A) *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$*.*

Démonstration. — On calcule :

$$\mathrm{DD}'(ab) = \mathrm{D}(\mathrm{D}'(a)b + a\mathrm{D}'(b)) = \mathrm{DD}'(a)b + \mathrm{D}'(a)\mathrm{D}(b) + \mathrm{D}(a)\mathrm{D}'(b) + a\mathrm{DD}'(b).$$

Les deux termes du milieu étant symétriques en D et D′, on obtient que

$$(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(ab) = (\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(a)b + a(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(b).$$

Ceci montre que $\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}(\mathrm{A})$, d'où le lemme. □

***Définition et proposition 1.65* (Crochet de deux champs de vecteurs)**

Soit M *une variété* C^∞ *et* X, Y *deux champs de vecteurs* C^∞*, considérés comme des dérivations de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{M})$*. Alors,*

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] := \mathrm{X} \circ \mathrm{Y} - \mathrm{Y} \circ \mathrm{X}$$

est une dérivation, donc un champ de vecteurs, appelé le crochet de Lie des champs de vecteurs X *et* Y*.*

Démonstration. — Ceci résulte du lemme précédent, appliqué à $\mathrm{A} = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$. □

***Remarque 1.66*.** — En coordonnées locales, si l'on note $\partial_i = \partial/\partial x_i$ pour alléger l'écriture, et si

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i \partial_i, \qquad \mathrm{Y} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Q}_j \partial_j,$$

alors on vérifie que la dérivation $\mathrm{D}_\mathrm{X} \circ \mathrm{D}_\mathrm{Y} - \mathrm{D}_\mathrm{Y} \circ \mathrm{D}_\mathrm{X}$ correspond au champ de vecteurs :

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}_j \partial_j(\mathrm{Q}_i) - \mathrm{Q}_j \partial_j(\mathrm{P}_i) \right) \partial_i.$$

Notation 1.67. — On aura besoin, en particulier dans la définition 1.69 et la proposition 1.70, des notations suivantes. Soit X un champ de vecteurs sur M. Pour tout $m \in \mathrm{M}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M})$, on désigne la valeur en m de la fonction $\mathrm{X}(f) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M})$ par $\mathrm{X}_m \cdot f$ ou $\mathrm{X}_m(f)$. C.-à-d., on pose :

$$\mathrm{X}(f)(m) = d_m f(\mathrm{X}_m) = \mathrm{X}_m \cdot f = \mathrm{X}_m(f) \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, si Y est un second champ de vecteurs sur M, on a

$$\begin{aligned}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_m \cdot f = [\mathrm{X},\mathrm{Y}](f)(m) &= \mathrm{X}(\mathrm{Y}(f))(m) - \mathrm{Y}(\mathrm{X}(f))(m)\\ &= \mathrm{X}_m(\mathrm{Y}(f)) - \mathrm{Y}_m(\mathrm{X}(f))\\ &= \mathrm{X}_m \cdot \mathrm{Y}(f) - \mathrm{Y}_m \cdot \mathrm{X}(f).\end{aligned}$$

Remarque 1.68. — Par contre, l'écriture $\mathrm{X}_m \cdot (\mathrm{Y}_m \cdot f)$ n'a pas de sens, puisque $\mathrm{Y}_m \cdot f = (\mathrm{Y}f)(m)$ est un réel (et non une fonction sur M).

Terminons ce paragraphe avec la définition et proposition suivantes, qui seront utiles plus loin.

***Définition 1.69* (Champs de vecteurs ϕ-liés)**. — Soit $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un morphisme de variétés C^∞. On dit que des champs de vecteurs X sur M et X′ sur M′ sont **ϕ-liés** si, pour tout $m \in \mathrm{M}$, l'on a :

$$\mathrm{X}'_{\phi(m)} = d_m\phi(\mathrm{X}_m). \tag{†}$$

Ceci entraîne que, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}')$, on a l'égalité de fonctions sur M suivante :

$$\mathrm{X}'(f) \circ \phi = \mathrm{X}(f \circ \phi). \tag{‡}$$

En effet, pour tout $m \in \mathrm{M}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{X}'(f)(\phi(m)) &= d_{\phi(m)} f(\mathrm{X}'_{\phi(m)})\\ &= d_{\phi(m)} f(d_m\phi(\mathrm{X}_m))\\ &= d_m(f\circ\phi)(\mathrm{X}_m) = \mathrm{X}_{(f\circ\phi)(m)}.\end{aligned}$$

Proposition 1.70. — *Soit $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un morphisme de variétés C^∞ et soient X,Y (resp. X',Y') des champs de vecteurs sur M (resp M′). On suppose que X et X′ (resp. Y et Y′) sont ϕ-liés. Alors :*

$$[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \quad \textit{est } \phi\textit{-lié à} \quad [\mathrm{X}',\mathrm{Y}'].$$

Démonstration. — Soit $m \in \mathrm{M}$. Il faut montrer l'égalité

$$d_m\phi([\mathrm{X},\mathrm{Y}]_m) = [\mathrm{X}',\mathrm{Y}']_{\phi(m)}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que ces deux éléments de $\mathrm{T}_{\phi(m)}\mathrm{M}'$ prennent la même valeur sur tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}')$. Or, en utilisant les définitions (et la notation 1.67, l'hypothèse (†) que X, X' et Y, Y' sont ϕ-liés, et sa conséquence (‡), on obtient :

$$\begin{aligned}
d_m\phi([X,Y]_m)(f) &\overset{\text{déf.}}{=} d_{\phi(m)}(f\circ d_m\phi)([X,Y]_m)\\
&= [X,Y]_m\cdot(f\circ\phi)\\
&\overset{\text{déf.}}{=} X_m(Y(f\circ\phi)) - Y_m(X(f\circ\phi))\\
&\overset{(\ddagger)}{=} X_m(Y'(f)\circ\phi) - Y_m(X'(f)\circ\phi)\\
&\overset{\text{déf.}}{=} d_m\phi(X_m)\cdot Y'(f) - d_m\phi(Y_m)\cdot X'(f)\\
&\overset{(\dagger)}{=} X'_{\phi(m)}(Y'(f)) - Y'_{\phi(m)}(X'(f))\\
&\overset{\text{déf.}}{=} [X',Y']_{\phi(m)}(f).
\end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition. □

1.7. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. — Soit G un groupe de Lie. Pour tout $g \in G$, on note ℓ_g la translation à gauche $h \mapsto gh$; c'est un difféomorphisme de G. On note λ_g l'action correspondante sur $\mathscr{C}^\infty(G)$, définie par

$$\lambda_g(\phi) = \phi\circ\ell_{g^{-1}}, \qquad \text{c.-à-d.,} \quad \lambda_g(\phi)(h) = \phi(g^{-1}h), \quad \forall\, h\in G.$$

(On met g^{-1} pour avoir $\lambda_g \circ \lambda_{g'} = \lambda_{gg'}$.) Alors, pour $\phi \in \mathscr{C}^\infty(G)$ et $g, h \in G$, on a :

$$(1) \qquad d_h(\lambda_{g^{-1}}(\phi)) = d_h(\phi\circ\ell_g) = d_{gh}\phi\circ d_h\ell_g.$$

Pour alléger l'écriture, on notera Dér(G) au lieu de Dér($\mathscr{C}^\infty$(G)).

Définition 1.71 **(Champs de vecteurs et dérivations invariants par λ_G)**
Un champ de vecteurs X sur G est dit **invariant à gauche** si l'on a :

$$(2) \qquad \forall\, g\in G, \qquad X_g = d_1\ell_g(X_1).$$

Ceci équivaut à :

$$(2') \qquad \forall\, g,h\in G, \qquad X_{gh} = d_h\ell_g(X_h)$$

puisque $d_1\ell_{gh} = d_1(\ell_g\circ\ell_h) = d_h\ell_g\circ d_1\ell_h$. D'autre part, une dérivation D de $\mathscr{C}^\infty(G)$ est dite **invariante à gauche** si :

$$(3) \qquad \forall\, g\in G, \qquad \lambda_g\circ D = D\circ\lambda_g.$$

Bien sûr, ces deux notions correspondent, c.-à-d., un champ de vecteurs X est invariant à gauche si et seulement si la dérivation correspondante D_X l'est. Ceci résulte du calcul suivant, où l'égalité $(*)$ équivaut à (3), tandis que l'égalité des deux extrêmes pour tout $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$ équivaut à (2′) :

$$\begin{aligned}\mathrm{D_X}(\phi)(gh) &= (\lambda_{g^{-1}} \circ \mathrm{D_X})(\phi)(h)\\ &\overset{(*)}{=} (\mathrm{D_X} \circ \lambda_{g^{-1}})(\phi)(h)\\ &= d_h(\lambda_{g^{-1}}(\phi))(\mathrm{X}_h)\\ &\overset{(1)}{=} d_h(\phi \circ \ell_g)(\mathrm{X}_h)\\ &= d_{gh}\phi(d_h\ell_g(\mathrm{X}_h)).\end{aligned}$$

Notons $\mathscr{V}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})}$, resp. $\mathrm{Dér(G)}^{\lambda(\mathrm{G})}$, l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. dérivations invariantes à gauche).

Évidemment, l'application qui à un vecteur tangent à l'origine X_1 associe le champ de vecteurs invariant X défini par $\mathrm{X}_g = d_1\ell_g(\mathrm{X}_1)$ induit des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$\mathrm{T_1G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{V}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér(G)}^{\lambda(\mathrm{G})};$$

la dérivation $\mathrm{D_X}$ correspondante est définie par :

$$\mathrm{D_X}(\phi)(g) = d_g\phi(\mathrm{X}_g) = (d_g\phi \circ d_1\ell_g)(\mathrm{X}_1) = d_1(\phi \circ \ell_g)(\mathrm{X}_1).$$

L'isomorphisme réciproque $\mathrm{Dér(G)}^{\lambda(\mathrm{G})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T_1G}$ est donné par $\mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}_1$, où $\mathrm{D}_1(\phi) = \mathrm{D}(\phi)(1)$, et l'on retrouve D à partir de D_1 par la formule :

$$\mathrm{D}(\phi)(g) = \mathrm{D}_1(\lambda_{g^{-1}}\phi) = \mathrm{D}_1(\phi \circ \ell_g). \tag{3′}$$

Proposition 1.72. — $\mathrm{Dér(G)}^{\lambda(\mathrm{G})}$ *est une sous-algèbre de Lie de* Dér(G)*, de dimension* $\dim \mathrm{T_1G} = \dim \mathrm{G}$.

Démonstration. — Si D, D' sont invariantes, alors pour tout g l'on a

$$\lambda_g \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{D}' = \mathrm{D} \circ \lambda_g \circ \mathrm{D}' = \mathrm{D} \circ \mathrm{D}' \circ \lambda_g,$$

et de même pour $\mathrm{D}' \circ \mathrm{D}$, donc $[\mathrm{D}, \mathrm{D}'] = \mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D}$ est invariante. □

Définition 1.73. — Via l'isomorphisme $\mathrm{T_1G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér(G)}^{\lambda(\mathrm{G})}$, $\mathrm{T_1G}$ est muni d'une struture d'algèbre de Lie, notée Lie(G).

***Théorème 1.74* (Fonctorialité)**. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors, sa différentielle en* 1*, notée* $d_1\phi$ *ou simplement* $d\phi$*, est un morphisme d'algèbres de Lie de* $\mathrm{T_1G} = \mathrm{Lie(G)}$ *vers* $\mathrm{T_1G}' = \mathrm{Lie(G')}$.

Démonstration. — Comme ϕ est un morphisme de groupes, alors

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad \phi \circ \ell_g = \ell_{\phi(g)} \circ \phi. \tag{1}$$

Soient X, X' deux champs de vecteurs invariants à gauche sur G et soit Y, resp. Y′, l'unique champ de vecteurs invariant à gauche sur G′ tel que

$$\mathrm{Y}_1 = d_1\phi(\mathrm{X}_1), \qquad \text{resp.} \quad \mathrm{Y}'_1 = d_1\phi(\mathrm{X}'_1).$$

Alors X et Y, resp. X′ et Y′, sont ϕ-liés. En effet, pour tout $g \in \mathrm{G}$ on a, en utilisant (1),

$$\mathrm{Y}_{\phi(g)} = d_1\ell_{\phi(g)}(\mathrm{Y}_1) = (d_1\ell_{\phi(g)} \circ d_1\phi)(\mathrm{X}_1) \overset{(1)}{=} d_1(\phi \circ \ell_g)(\mathrm{X}_1) = d_g\phi(\mathrm{X}_g),$$

et de même pour Y′ et X′. Donc, d'après la proposition 1.70, $[\mathrm{X}, \mathrm{X}']$ et $[\mathrm{Y}, \mathrm{Y}']$ sont ϕ-liés. Le théorème en découle. □

Avant d'énoncer un corollaire au théorème, signalons le résultat ci-dessous, conséquence du lemme 1.48.

Lemme 1.75. — *Soient* G *un groupe de Lie et* G^0 *sa composante connexe. Alors* G^0 *est un sous-groupe ouvert et fermé.*

Démonstration. — Comme G est une variété C^∞, disons de dimension n, tout point possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc connexe. Donc G^0 est ouvert, d'après le lemme 1.48. Et tout sous-groupe ouvert est aussi fermé (lemme 1.49). □

Corollaire 1.76. — *Soient* G *un groupe de Lie,* G^0 *sa composante connexe. Alors* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}^0) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — Comme G^0 est un voisinage ouvert de 1, on a $\mathrm{T}_1\mathrm{G}^0 = \mathrm{T}_1\mathrm{G}$ comme espaces vectoriels, et aussi comme algèbres de Lie, d'après le théorème précédent. □

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Dold] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer Classics in Mathematics, 1995.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Spi] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish, 1970, 3rd edition 2005.

[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.