I. GROUPES DE LIE RÉELS (SUITE)

SÉANCE DU 15/11/07

2. Groupes et algèbres de Lie

2.1. Le cas de GL_n**.** — [3] Soit $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. C'est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc son espace tangent en id est $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On note E_{ij} la matrice élémentaire, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1. On note x_{ij} les coefficients matriciels, c.-à-d., $x_{ij}(\mathrm{A}) = a_{ij}$ si A est la matrice (a_{ij}). Ce sont les fonctions coordonnées naturelles sur G ; on note $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$ les dérivées partielles correspondantes.

L'espace tangent à G en tout point $g \in \mathrm{G}$ s'identifie à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, de la façon suivante : tout $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ correspond au vecteur tangent

$$\sum_{i,j} b_{ij}\partial_{ij} \in \mathrm{T}_g(\mathrm{G}).$$

En effet, si ϕ est une fonction C^∞ sur G, alors

$$d_g\phi = \sum_{i,j} \frac{\partial\phi}{\partial x_{ij}}(g)dx_{ij},$$

où (dx_{ij}) désigne la base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^*$ duale de la base (E_{ij}), et donc

$$d_g\phi(\mathrm{B}) = \sum_{i,j} \frac{\partial\phi}{\partial x_{ij}}(g)b_{ij} = \left(\sum_{i,j} b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)(\phi)(g).$$

---

[3] version du 18/11/07

Calculons le crochet de Lie sur Lie(G). D'une part, pour le crochet commutateur dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$[\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{pq}] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \text{ et } q \neq i; \\ \mathrm{E}_{iq} & \text{si } j = p \text{ et } q \neq i; \\ -\mathrm{E}_{pj} & \text{si } j \neq p \text{ et } q = i; \\ \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} & \text{si } j = p \text{ et } q = i. \end{cases}$$

De façon plus condensée,

$$[\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{pq}] = \delta_{jp}\mathrm{E}_{iq} - \delta_{qi}\mathrm{E}_{pj}, \tag{1}$$

où δ_{jp} désigne le symbole de Kronecker (égal à 1 si $j = p$, et à 0 sinon).

D'autre part, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$, la translation à gauche ℓ_A est la restriction à l'ouvert $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de l'application linéaire

$$\mathrm{L}_\mathrm{A} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}.$$

Par conséquent, la différentielle $d_1\ell_\mathrm{A}$ égale L_A. Donc le champ de vecteur invariant à gauche $\mathbf{E}_{ij}$ associé à $\mathrm{E}_{ij} \in \mathrm{T}_1\mathrm{G}$ a pour valeur en un point arbitraire $\mathrm{A} = (a_{ij})$ de G le vecteur tangent :

$$\mathbf{E}_{ij}(\mathrm{A}) = \mathrm{AE}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathrm{E}_{kj}.$$

Donc, dans les coordonnées naturelles $x_{k\ell}$, le champ de vecteurs $\mathbf{E}_{ij}$ s'écrit :

$$\mathbf{E}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}\partial_{kj}. \tag{2}$$

Calculons le crochet des champs de vecteurs $\mathbf{E}_{ij}$ et $\mathbf{E}_{pq}$. D'après (2), il égale :

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\partial_{kj}, \sum_{r=1}^{n} x_{rp}\partial_{rq}\Big] = \sum_{k,r} x_{ki}\partial_{kj}(x_{rp})\partial_{kj}\partial_{rq} - \sum_{k,r} x_{rp}\partial_{rq}(x_{ki})\partial_{rq}\partial_{kj}.$$

Or $\partial_{kj}(x_{rp})$ égale 0 si $j \neq p$ ou $k \neq r$, et vaut 1 si $j = p$ et $k = r$, et de même pour $\partial_{rq}(x_{ki})$. Donc on obtient :

$$[\mathbf{E}_{ij}, \mathbf{E}_{pq}] = \delta_{jp}\sum_{k=1}^{n} x_{ki}\partial_{kq} - \delta_{qi}\sum_{k=1}^{n} x_{kp}\partial_{kj}. \tag{3}$$

En comparant avec (1) et (2), on voit que c'est le champ de vecteurs invariant à gauche associé à $[\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{pq}]$. Ceci montre que le crochet de Lie sur

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

est donné par le commutateur.

De même, le groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et les coefficients matriciels forment un système de coordonnées complexes. Le même calcul que précédemment montre que le crochet de Lie dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est donné par le commutateur.

Par restriction des scalaires, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension $2n^2$, qui admet pour base les matrices

$$\mathrm{E}_{k\ell}, \qquad \sqrt{-1}\,\mathrm{E}_{k\ell}, \qquad 1 \leqslant k, \ell, \leqslant n,$$

où l'on a noté $\sqrt{-1}$ le nombre complexe i. Le crochet étant $\mathbb{C}$-linéaire, on a bien sûr

$$[\mathrm{E}_{k\ell}, \sqrt{-1}\,\mathrm{E}_{pq}] = \sqrt{-1}\,[\mathrm{E}_{k\ell}, \mathrm{E}_{pq}] = \delta_{\ell p}\sqrt{-1}\,\mathrm{E}_{kq} - \delta_{qk}\sqrt{-1}\,\mathrm{E}_{p\ell}.$$

2.2. Un « rappel » sur espaces tangents et différentielles. —

Proposition 2.1. — *Soient* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ *des variétés* C^∞, $\phi : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *un morphisme de variétés, et* $x_0 \in \mathrm{X}$, $y_0 \in \mathrm{Y}$. *Alors*

$$\mathrm{T}_{(x_0,y_0)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}.$$

De plus, si l'on fait cette identification, alors

$$d_{(x_0,y_0)}\phi = d_{x_0}\phi^{y_0} + d_{y_0}\phi_{x_0},$$

où $\phi^{y_0} : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *et* $\phi_{x_0} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *sont les morphismes définis par*

$$\phi^{y_0}(x) = \phi(x, y_0) \quad \textit{et} \quad \phi_{x_0}(y) = \phi(x_0, y), \qquad \forall\, x \in \mathrm{X},\ y \in \mathrm{Y}.$$

Démonstration. — L'isomorphisme $\mathrm{T}_{(x_0,y_0)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}$ résulte de la définition des variétés produits et espaces tangents.

Notons τ^{y_0} l'immersion $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, $x \mapsto (x, y_0)$ et définissons de façon analogue l'immersion $\tau_{x_0} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Alors, $d_{x_0}\tau^{y_0}$ et $d_{y_0}\tau_{x_0}$ sont les inclusions ci-dessous :

$$\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \overset{d_{x_0}\tau^{y_0}}{\hookrightarrow} \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y} \overset{d_{y_0}\tau_{x_0}}{\hookleftarrow} \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}.$$

De plus, $\phi^{y_0} = \phi \circ \tau^{y_0}$ et $\phi_{x_0} = \phi \circ \tau_{x_0}$. Le résultat en découle. En effet, soit $(u, v) \in \mathrm{T}_{(x_0,y_0)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_{y_0}\mathrm{Y}$. Alors,

$$\begin{aligned}(d_{(x_0,y_0)}\phi)(u, v) &= (d_{(x_0,y_0)}\phi)(u, 0) + (d_{(x_0,y_0)}\phi)(0, v) \\ &= d_{x_0}(\phi \circ \tau^{y_0})(u) + d_{y_0}(\phi \circ \tau_{x_0})(v) \\ &= (d_{x_0}\phi^{y_0} + d_{y_0}\phi_{x_0})(u, v).\end{aligned}$$

□

À titre d'application, signalons le corollaire suivant. Soit G un groupe de Lie. Notons $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ la multiplication, $\iota : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le passage à l'inverse, et désignons par $d\mu$, resp. $d\iota$, leur différentielles au point (e, e), resp. e.

Corollaire 2.2. — *On a* $d\mu(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ *et* $\mathrm{d}\iota(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$, *pour* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}_e(\mathrm{G})$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 2.1, car $\mu(e,\cdot) = \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = \mu(\cdot,e)$. D'autre part, $\mu \circ (\mathrm{id},\iota)$ est l'application constante $\mathrm{G} \to \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \{e\}$. On en déduit que $0 = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_e(\mathrm{G})} + d\iota$, d'où la seconde assertion. □

2.3. Sous-groupes de Lie fermés. — Commençons par le rappel ci-dessous.

Définition et proposition 2.3. — *Soient* X *un espace topologique et* Y *un sous-espace de* X. *On dit que* Y *est* **localement fermé** *s'il vérifie l'une des conditions équivalentes ci-dessous :*

(*a*) *pour tout* $y \in \mathrm{Y}$, *il existe un voisinage ouvert* U_y *de* y *dans* X *tel que* $\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}_y$ *soit fermé dans* U_y *;*

(*b*) *il existe un ouvert* U *de* X *tel que* $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{Y}} \cap \mathrm{U}$ *;*

(*c*) *il existe un ouvert* U *et un fermé* F *de* X, *tels que* $\mathrm{Y} = \mathrm{F} \cap \mathrm{U}$.

Démonstration de l'équivalence. — Il est clair que (b) ⇒ (c) ⇒ (a). Supposons (a) vérifié et montrons (b).

Soient $y \in \mathrm{Y}$ et U_y comme dans (a). Comme U_y est ouvert, tout point $z \in \overline{\mathrm{Y}} \cap \mathrm{U}_y$ est adhérent à $\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}_y$ (en effet, tout ouvert W de X tel que $z \in \mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}_y$ rencontre $\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}_y$) ; par conséquent on a l'égalité

$$\overline{\mathrm{Y}} \cap \mathrm{U}_y = \overline{\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}_y},$$

et donc l'hypothèse que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}_y$ soit *fermé dans* U_y entraîne l'égalité :

$$\overline{\mathrm{Y}} \cap \mathrm{U}_y = \mathrm{Y} \cap \mathrm{U}_y.$$

Alors, l'ouvert $\mathrm{U} = \bigcup_{y\in\mathrm{Y}} \mathrm{U}_y$ contient Y et vérifie

$$\mathrm{U} \cap \overline{\mathrm{Y}} = \bigcup_{y\in\mathrm{Y}} (\mathrm{U}_y \cap \overline{\mathrm{Y}}) = \bigcup_{y\in\mathrm{Y}} (\mathrm{U}_y \cap \mathrm{Y}) = \mathrm{Y}.$$

Ceci prouve l'équivalence des conditions (a), (b), et (c). □

Dans ce qui suit, on désigne par M une variété C^∞ de dimension n.

***Définition 2.4* (Sous-variétés ouvertes).** — Soit U un ouvert non vide de M. Il résulte de la Définition 1.1 que U est une variété C^∞ de dimension n ; on dira que c'est une sous-variété ouverte de M.

Remarque 2.5. — Soit $x \in \mathrm{M}$ et soit (U,ϕ) une carte de M au voisinage de x. Alors, d'après la définition d'application C^∞ (Définition 1.6), ϕ est un difféomorphisme de U sur l'ouvert $\mathrm{V} := \phi(\mathrm{U})$ de $\mathbb{R}^n$. Sans perte de généralité, on peut supposer (en composant ϕ avec une translation de $\mathbb{R}^n$) que $\phi(x) = 0$.

***Définition 2.6* (Sous-variétés).** — Soit M une variété C^∞ de dimension n. Une partie non vide N de M est une **sous-variété** C^∞ de dimension d si la condition suivante est vérifiée :

Pour tout $x \in N$, il existe une carte (U, ϕ) de M au voisinage de x, telle que $\phi(x) = 0$ et

$$\phi(N \cap U) = \phi(U) \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}\right).$$

Dans ce cas, N est une partie localement fermée, et l'on dira que N est une « *sous-variété localement fermée* », ou simplement une *sous-variété* s'il n'y a pas d'ambiguïté. (C.-à-d., le terme de sous-variété implique la condition d'être localement fermé.)

Exemples 2.7. — On a vu plus haut le cas des sous-variétés ouvertes. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sphère

$$S^n = \{(x_1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

est une sous-variété fermée (et compacte) de $\mathbb{R}^{n+1}$, de dimension n.

D'autre part, l'intervalle

$$I := \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < t < 1\},$$

est une sous-variété localement fermée de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, qui n'est ni fermée ni ouverte. De même, la sphère S^n privée d'un point, et, par exemple, l'ouvert de S^n ci-dessous :

$$U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_n \mid x_{n+1} > 0\},$$

sont des sous-variétés localement fermées de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Remarque 2.8. — Si N est une sous-variété de M, son adhérence $\overline{N}$ n'est pas nécessairement une sous-variété de M. Par exemple, prenons $M = \mathbb{R}^2$ et

$$N = \{(1/n, y) \mid n \in \mathbb{N}^*, \, y \in \mathbb{R}\},$$

c.-à-d., N est la réunion des droites verticales D_n, d'équation $x = 1/n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. C'est une sous-variété de dimension 1, dont les composantes connexes sont les D_n. Son adhérence est

$$\overline{N} = N \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

qui n'est pas une variété au voisinage de chaque point de la droite $x = 0$.

Remarque 2.9. — D'après la proposition 1.55 (= fonctorialité des différentielles), si $f : M \xrightarrow{\sim} N$ est un difféomorphisme, d'inverse $g : N \xrightarrow{\sim} M$, alors pour tout $x \in M$ la différentielle

$$d_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$$

est un isomorphisme, d'inverse $d_{f(x)} g$.

Corollaire 2.10. — *Soit* N *une sous-variété de* M. *Alors, pour tout* $p \in \mathrm{N}$, *l'espace tangent* $\mathrm{T}_p\mathrm{N}$ *est un sous-espace de* $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$.

Démonstration. — D'après la remarque précédente, on se ramène au cas où $\mathrm{N} = \mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathrm{M} = \mathbb{R}^n$, auquel cas le résultat est évident. De façon plus détaillée, soit (U, ϕ) une carte de M au voisinage de p, telle que $\phi(p) = 0$ et

$$\phi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) = \phi(\mathrm{U}) \cap \mathbb{R}^d.$$

Notant τ l'inclusion $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathrm{M}$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_p\mathrm{N} \arrow[r, hook, "d_p\tau"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{T}_p\mathrm{M} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{R}^p \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

d'où l'inclusion $\mathrm{T}_p\mathrm{N} \subseteq \mathrm{T}_p\mathrm{M}$. En termes de coordonnées locales, la carte (U, ϕ) correspond à des coordonnéees locales $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de p, telles que

$$\mathrm{N} \cap \mathrm{U} = \{q \in \mathrm{U} \mid x_j(q) = 0, \quad \forall\, j > d\}.$$

Alors $\mathrm{T}_p\mathrm{N}$ est le sous-espace de $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$ défini par l'annulation des formes linéaires dx_j, pour $j > d$; il est engendré par les vecteurs tangents $(\partial/\partial x_i)_p$, pour $i = 1, \ldots, d$. $\square$

Lemme 2.11. — *Soient* G *un groupe topologique, et* H *un sous-groupe de* G. *Alors l'adhérence* $\overline{\mathrm{H}}$ *de* H *est un sous-groupe de* G.

Démonstration. — Fixons d'abord $h \in \mathrm{H}$. Alors l'application $y \mapsto hy^{-1}$ envoie H dans H donc, par continuité, $\overline{\mathrm{H}}$ dans $\overline{\mathrm{H}}$. Donc $\mathrm{H}y^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{H}}$, pour tout $y \in \overline{\mathrm{H}}$.

Fixant $y \in \overline{\mathrm{H}}$, on obtient par continuité que $\overline{\mathrm{H}}y^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{H}}$. Ceci prouve que $\overline{\mathrm{H}}$ est un sous-groupe de G. $\square$

Lemme 2.12. — *Soit* G *un groupe de Lie et soit* H *un sous-groupe de* G. *Si* H *est une sous-variété de* G, *alors* H *est fermé.*

Démonstration. — Supposons que H soit une sous-variété de G. Alors H est localement fermé, donc est ouvert dans son adhérence $\overline{\mathrm{H}}$. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert U de e dans $\overline{\mathrm{H}}$ contenu dans H. Soit $g \in \overline{\mathrm{H}}$ arbitraire. Alors $g\mathrm{U}$ est un ouvert non vide de $\overline{\mathrm{H}}$, donc contient un élément $h \in \mathrm{H}$. Donc $g = hu^{-1}$, pour un certain $u \in \mathrm{U}$, et donc $g \in \mathrm{H}$ puisque $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{H}$. Ceci prouve que $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}$. $\square$

Définition 2.13. — Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe fermé de G. On dit que H est un « **sous-groupe de Lie fermé** » de G si c'est une sous-variété C^∞ de G ; dans ce cas, l'application $\mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, $(h', h) \mapsto h'h^{-1}$ est C^∞, d'après la proposition 1.13, et donc H est un groupe de Lie, et l'inclusion

$\mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ est un isomorphisme de groupes de Lie de H sur un sous-groupe fermé de G.

Remarque 2.14. — Pour le moment, on prend « *sous-groupe de Lie fermé* » comme une locution, avec la signification précédente. On verra plus loin qu'un *sous-groupe de Lie* de G n'est **pas nécessairement** une sous-variété de G ; c'est la raison pour laquelle Bourbaki utilise la locution « *sous-groupe intégral* » et réserve la terminologie « sous-groupes de Lie » aux sous-groupes qui sont des sous-variétés (et qui sont donc des sous-groupes de Lie fermés, d'après le lemme 2.12).

Pour le moment, travaillons avec la définition ci-dessus.

Lemme 2.15. — $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est un sous-groupe de Lie fermé de* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$*, de dimension* $2n^2$*, et son algèbre de Lie est* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, considérée comme* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie de dimension* $2n^2$*.*

Démonstration. — Écrivons $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, c.-à-d., si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base standard de $\mathbb{C}^n$, on prend comme $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^n$ la base :

$$(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n).$$

Alors, la multiplication par i est donnée par la matrice

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ formé des matrices

$$g = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$$

telles que $g\mathrm{J} = \mathrm{J}g$, ce qui équivaut à $\mathrm{A} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{B} = -\mathrm{C}$. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété fermée de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, et un ouvert de

$$\{(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2\} \cong \mathbb{R}^{2n^2}.$$

Son algèbre de Lie est

$$\{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{XJ} = \mathrm{JX}\} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

qui est de dimension $2n^2$ sur $\mathbb{R}$. □

Théorème 2.16. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors* $\mathrm{Ker}\,\phi$ *est un sous-groupe de Lie fermé de* G *et l'on a*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\phi) = \mathrm{Ker}\,d\phi.$$

Démonstration. — Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \ell_g = \ell_{\phi(g)} \circ \phi$ et donc

$$d_g\phi \circ d_1\ell_g = d_1\ell_{\phi(g)} \circ d_1\phi.$$

Par conséquent, ϕ est de rang constant $r = \mathrm{rang}(d_1\phi)$. Donc, d'après le théorème du rang constant 1.38, le sous-groupe $\mathrm{Ker}\,\phi = \phi^{-1}(1)$ est une sous-variété fermée de dimension

$$d = \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) - r = \dim \mathrm{Ker}\, d\phi.$$

C'est donc un sous-groupe de Lie fermé de G. De plus, ϕ étant identiquement égale à 1 sur $\mathrm{Ker}\,\phi$, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\phi) \subseteq \mathrm{Ker}\, d\phi,$$

d'où l'égalité puisque ces deux espaces ont même dimension. Le théorème est démontré. □

2.4. Représentations. — Si G est un groupe de Lie, par exemple un groupe fini, on peut considérer ses représentations dans un espace vectoriel réel ou bien complexe. Pour traiter les deux cas simultanément, désignons par $\mathbb{K}$ le corps de base, avec la convention que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

***Définition 2.17* (Représentations lisses de G).** — Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une représentation *lisse* (ou C^∞) de G dans V est un morphisme de groupes de Lie $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On peut alors considérer sa différentielle

$$d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

D'après le théorème 1.74, c'est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en posant $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ on obtient un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie

$$(d\rho)_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

qu'on notera encore $d\rho$ si cela ne crée pas d'ambiguité.

***Définition 2.18* (Sous-module des invariants).** — Si V est un G-module, on note

$$\mathrm{V}^{\mathrm{G}} = \{v \in \mathrm{V} \mid gv = v, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}\}.$$

On l'appelle le sous-module des invariants. Si V est une représentation lisse de dimension finie, on peut considérer l'action dérivée de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, et on obtient que

$$v \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}} \Rightarrow v \in \mathrm{V}^{\mathfrak{g}} = \{v \in \mathrm{V} \mid \mathrm{X}v = 0, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathfrak{g}\}.$$

On verra plus loin que la réciproque est vraie si G est *connexe*.

Remarque 2.19. — Soient G un groupe de Lie et $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un morphisme de groupes. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathbb{K}^{n^2}$, alors ρ est une application C^∞ si et seulement si les coefficients matriciels $\rho(g)_{ij}$ sont des fonctions C^∞ de g.

Proposition 2.20. — *Soit* V *une représentation lisse de dimension finie de* G *et soit* E *un sous-espace* G*-stable. Alors les représentations de* G *dans* E *et dans* V/E *sont lisses.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{B}_1$ une base de E et $\mathscr{B}_2$ une base d'un supplémentaire de E dans V. Dans la base $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ de V, la matrice de $\rho_\mathrm{V}(g)$ s'écrit :

$$\rho_\mathrm{V}(g) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

Alors la matrice de $\rho_\mathrm{E}(g)$, resp. $\rho_{\mathrm{V}/\mathrm{E}}(g)$, est A, resp. C. La proposition en découle. □

***Proposition 2.21* (Construction de représentations)**. — *Soient* V, W *des représentations lisses de dimension finie de* G*. Alors*

$$\mathrm{V} \otimes_\mathbb{K} \mathrm{W}, \qquad \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathrm{V}, \mathrm{W}), \qquad \mathrm{V}^*$$

sont des représentations lisses de G*, pour les actions définies par*

$$g \cdot (v \otimes w) = gv \otimes gw, \qquad g \cdot \theta = g_\mathrm{W} \circ \theta \circ g_\mathrm{V}^{-1}, \qquad g \cdot \phi = \phi \circ g_\mathrm{V}^{-1}.$$

Alors $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathrm{V}, \mathrm{W})^\mathrm{G} = \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}, \mathrm{G})$ *et* $(\mathrm{V} \otimes \mathrm{W})^\mathrm{G} = \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}^*, \mathrm{W})$.

D'autre part, les actions dérivées de $\mathfrak{g}$ *sur*

$$\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}, \qquad \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathrm{V}, \mathrm{W}), \qquad \mathrm{V}^*,$$

sont données par

$$\begin{cases} \mathrm{X}(v \otimes w) = \mathrm{X}v \otimes w + v \otimes \mathrm{X}w, \\ (\mathrm{X}\theta)(v) \ = \ \mathrm{X}\theta(v) - \theta(\mathrm{X}v), \\ (\mathrm{X}\phi)(v) \ = \ -\phi(\mathrm{X}v), \end{cases}$$

On retrouve ainsi les définitions données pour les algèbres de Lie dans le cours d'Introduction.

Démonstration. — Bien sûr, V^* est le cas particulier $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathrm{V}, \mathbb{K})$ de modules d'homomorphismes, où $\mathbb{K}$ = G-module trivial. Il est facile de voir que l'on obtient ainsi des morphismes de groupes. Pour voir qu'ils sont C^∞, introduisons des bases $(e_1, \dots, e_m)$ de V et $(f_1, \dots, f_n)$ de W, et soit $(e_1^*, \dots, e_m^*)$ la base duale de V^*. Notons $a_{ij}(g)$, resp. $b_{k\ell}(g)$, les coefficients matriciels de $\rho_\mathrm{V}(g)$, resp. $\rho_\mathrm{W}(g)$; par hypothèse, ce sont des fonctions C^∞ de g. En utilisant la base $(e_i \otimes f_k)$ de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$, resp. $(e_i^* \otimes f_k)$ de $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \cong \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{W}$, on voit sans difficulté que les coefficients matricels de

$$\rho_{\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}}(g), \qquad \text{resp.} \quad \rho_{\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\mathrm{V}, \mathrm{W})}(g)$$

sont des fonctions C^∞ des $a_{ij}(g)$ et $b_{k\ell}(g)$, donc de g. Ceci prouve la première assertion.

D'autre part, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)^G = \{\theta \mid g_W \circ \theta = \theta \circ g_V\} = \mathrm{Hom}_G(V,W)$, et comme

$$V \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, W),$$

on obtient aussi la deuxième égalité. Enfin, pour v, w fixés, l'application $g \mapsto gv \otimes gw$ est la composée de l'application diagonale $\Delta : G \to G \times G$ et de l'application

$$\phi_{v,w} : G \times G \longrightarrow V \otimes W, \qquad (g,h) \mapsto gv \otimes hw.$$

La dérivée en 1_G de Δ est l'application diagonale $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, et d'après la proposition 2.1 la différentielle en $(1_G, 1_G)$ de $\phi_{v,w}$ est l'application

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow V \otimes W, \qquad (X,Y) \mapsto Xv \otimes w + v \otimes Yw.$$

Le reste est laissé au lecteur. □

Lemme 2.22. — *Soient* U, V, W *des représentations de dimension finie lisses de* G. *Supposons donnée une application bilinéaire*

$$\mu : U \times V \longrightarrow W$$

qui soit G*-invariante, c.-à-d.,* $g\mu(u,v) = \mu(gu, gv)$. *Ceci équivaut à dire que, considérée comme application* linéaire $U \otimes V \to W$, μ *est un morphisme de* G*-modules. Alors, l'action dérivée de* $\mathfrak{g}$ *vérifie :*

$$X\mu(u,v) = \mu(Xu, v) + \mu(u, Xv),$$

c.-à-d., $\mathfrak{g}$ *agit par* dérivations.

Démonstration. — Ceci résulte de la proposition 2.1. □

Définition 2.23 **(Algèbres tensorielles, symétriques, extérieures)**

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son algèbre tensorielle est l'algèbre graduée

$$T(V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} T^n(V),$$

où $T^0(V) = \mathbb{K}$ et $T^n(V) = V^{\otimes n}$ pour $n \geqslant 1$, le produit $T^p(V) \times T^q(V) \to T^{p+q}(V)$ étant défini par concaténation :

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q.$$

Soit I l'idéal bilatère engendré par tous les éléments $v \otimes w - w \otimes v \in T^2(V)$; c'est un idéal *homogène*, c.-à-d., on a

$$I = \bigoplus_{n \geqslant 2} I_n, \qquad \text{où} \quad I_n = I \cap T^n(V).$$

Par conséquent, l'algèbre symétrique $\mathrm{S(V)} = \mathrm{T(V)/I}$ est graduée :

$$\mathrm{S(V)} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{S}^n(\mathrm{V}).$$

De même, soit J l'idéal bilatère engendré par tous les éléments $v\otimes v \in \mathrm{T}^2(\mathrm{V})$; c'est aussi un idéal *homogène*, et donc l'algèbre extérieure

$$\textstyle\bigwedge(\mathrm{V}) = \mathrm{T(V)/J} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \bigwedge^n(\mathrm{V})$$

est graduée. Le produit dans l'algèbre extérieure est noté $\wedge$; rappelons qu'il est antisymétrique, c.-à-d.,

$$\forall\, u, v \in \mathrm{V}, \qquad u \wedge v = -v \wedge u.$$

(Ceci résulte de l'égalité $0 = (u+v) \wedge (u+v)$.) Par conséquent,

$$\forall\, p, q \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \textstyle\bigwedge^p(\mathrm{V}),\ y \in \bigwedge^q(\mathrm{V}), \qquad y \wedge x = (-1)^{pq} x \wedge y.$$

Si V est de dimension finie d, et si $(v_1, \dots, v_d)$ en est une base, les monômes

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}, \qquad i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}$$

forment une base de $\mathrm{T}^n(\mathrm{V})$, qui est donc de dimension d^n ; les monômes

$$v_1^{n_1} \cdots v_d^{n_d}, \qquad n_1 + \cdots + n_d = n$$

forment une base de $\mathrm{S}^n(\mathrm{V})$, qui est donc de dimension $\binom{n+d-1}{d-1}$, et les monômes

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d$$

forment une base de $\bigwedge^n(\mathrm{V})$, qui est donc de dimension $\binom{n}{d}$ (en particulier, $\dim \bigwedge^d \mathrm{V} = 1$ et $\bigwedge^n(\mathrm{V}) = 0$ pour $n > d$).

Proposition 2.24. — *Soit* V *une représentation de dimension finie lisse de* G*. Alors chaque puissance tensorielle, symétrique, ou extérieure*

$$\mathrm{T}^n(\mathrm{V}), \qquad \mathrm{S}^n(\mathrm{V}), \qquad \textstyle\bigwedge^n(\mathrm{V})$$

est une représentation lisse de G*, et donc aussi une représentation de* $\mathfrak{g}$*. De plus,* G *agit dans chacune des algèbres par automorphismes, et* $\mathfrak{g}$ *y agit par dérivations.*

Démonstration. — Il résulte de la proposition 2.21, par récurrence sur n, que $\mathrm{T}^n(\mathrm{V})$ est une représentation lisse de dimension finie de G. Les idéaux I et J sont clairement G-stables, donc il en est de même de leurs composantes homogènes I_n et J_n et donc, d'après la proposition 2.20, les représentations quotients $\mathrm{S}^n(\mathrm{V}) = \mathrm{T}^n(\mathrm{V})/\mathrm{I}_n$ et $\bigwedge^n(\mathrm{V}) = \mathrm{T}^n(\mathrm{V})/\mathrm{J}_n$ sont lisses.

Enfin, la dernière assertion résulte du lemme 2.22. □

Exemple 2.25. — Soit (e_1, e_2) la base canonique de $V = \mathbb{C}^2$ et soit (e_1^*, e_2^*) la base duale de V^*. Posant $Y = -e_2^*$ et $X = e_1^*$, on a l'isomorphisme

$$S(V^*) \cong \mathbb{C}[X, Y].$$

Alors, V et V^* sont des représentations lisses de $SL_2(\mathbb{C})$ (et en fait $V^* \cong V$) et d'après ce qui précède $SL_2(\mathbb{C})$ agit par automorphismes d'algèbre sur $\mathbb{C}[X, Y]$. En dérivant cette action, on retrouve l'action par dérivations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ considérée dans le cours d'Introduction.

2.5. Champs de vecteurs et flots. — Commençons par quelques résultats concernant l'intégration des champs de vecteurs.

Soient M une variété C^∞ et $f : I \to M$ une application C^∞, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide. On rappelle que, pour tout $t \in I$, la différentielle $d_t f$ de f au point t est une application linéaire $\mathbb{R} \to T_{f(t)}M$ et l'on désigne par $f'(t)$ sa valeur sur le vecteur $1 \in \mathbb{R}$, c.-à-d., $f'(t) = (d_t f)(1)$.

***Définition 2.26* (Courbes intégrales)**. — Soient M une variété C^∞ et X un champ de vecteurs C^∞ sur M. Une **courbe intégrale** de X est une application C^∞ f d'un intervalle ouvert non vide $I \subseteq \mathbb{R}$ dans M telle que :

$$(*) \qquad \forall\, t \in I, \qquad f'(t) = X(f(t)).$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une *solution* de (l'équation différentielle définie par) $(*)$. On dit que (f, I) est une courbe intégrale (ou solution) **maximale** si f ne peut être prolongée en une courbe intégrale sur un intervalle contenant strictement I.

***Théorème 2.27* (Existence locale et unicité)**. — *Soient* M *une variété* C^∞ *et* X *un champ de vecteurs* C^∞ *sur* M.

1) *Pour tout* $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in M$, *il existe un intervalle ouvert* I *contenant* t_0 *et une application* C^∞ $f : I \to M$ *vérifiant* $(*)$ *et* $f(t_0) = x_0$.

2) *Si* I, J *sont deux intervalles ouverts contenant* t_0 *et si* $f : I \to M$ *et* $g : J \to M$ *sont deux solutions de* $(*)$ *telles que* $f(t_0) = x_0 = g(t_0)$, *alors* f *et* g *coïncident sur* $I \cap J$ *et se recollent donc en une solution* h *de* $(*)$, *vérifiant* $h(t_0) = x_0$ *et définie sur l'intervalle* $I \cup J$.

3) *Par conséquent, il existe une unique courbe intégrale maximale passant par* x_0 *au temps* t_0, *définie sur un intervalle* $I(t_0, x_0)$. *On la note*

$$t \mapsto \phi(t_0, x_0, t) \qquad \textit{ou simplement} \qquad t \mapsto \phi_t(x_0)$$

si t_0 *est déterminé par le contexte, par exemple si l'on a fixé* $t_0 = 0$.

Démonstration. — Voir [**Ca**, 1ère partie, II, §§1 & 3] ou [**Ma**, §II.2]. □

Définition 2.28. — Un **groupe à un paramètre de difféomorphismes** de M est une famille $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de difféomorphismes de M telle que :

$$\text{l'application : } \mathbb{R}\times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}, \quad (t,x)\mapsto \phi_t(x) \quad \text{est } \mathrm{C}^\infty\,;$$

$$\phi_0 = \mathrm{id}_\mathrm{M}, \qquad \phi_s\circ\phi_t = \phi_{s+t}, \quad \forall\, s,t\in\mathbb{R}.$$

Soient M une variété C^∞ et X un champ de vecteurs C^∞ sur M. Pour tout $x_0\in\mathrm{M}$, on note $t\mapsto\phi_t^{\mathrm{X}}(x_0)$, ou simplement $t\mapsto\phi_t(x_0)$ si le champ de vecteurs X est sous-entendu, la solution maximale de l'équation :

$$(*) \qquad f'(t) = \mathrm{X}(f(t)), \qquad f(0) = x_0,$$

et l'on note I_{x_0} son domaine de définition. Soit alors :

$$\Omega = \bigcup_{x_0\in\mathrm{M}} \{x_0\}\times\mathrm{I}_{x_0} \subseteq \mathrm{M}\times\mathbb{R}$$

et soit $\Phi=\Phi^{\mathrm{X}}$ l'application $\Omega\to\mathrm{M}$ définie par

$$\Phi(x_0,t) = \phi_t(x_0), \qquad \forall\, x_0\in\mathrm{M},\ t\in\mathrm{I}_{x_0}.$$

Enfin, pour $t\in\mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{U}_t = \{x_0\in\mathrm{M}\mid t\in\mathrm{I}_{x_0}\} = \Omega\cap(\mathrm{M}\times\{t\}).$$

***Théorème 2.29* (Flot d'un champ de vecteurs)**. — 1) Ω *est un ouvert de* $\mathrm{M}\times\mathbb{R}$*, contenant* $\mathrm{M}\times\{0\}$*, et l'application* Φ *est* C^∞*. De plus,* $\phi_0=\mathrm{id}_\mathrm{M}$.

2) *Pour tout* $(x,t)\in\Omega$ *et* $s\in\mathbb{R}$*, on a :*

a) $(x,t+s)\in\Omega \Leftrightarrow (\phi_t(x),s)\in\Omega$;
b) $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ si a) est réalisé.

2′) *Pour tout* $t\in\mathbb{R}$, U_t *est un ouvert de* M *et, si* $\mathrm{U}_t\neq\varnothing$*, alors* ϕ_t *est un difféomorphisme* C^∞ *de* U_t *sur* U_{-t}*, dont le difféomorphisme inverse est* ϕ_{-t}*. De plus, pour tout* $s,t\in\mathbb{R}$ *on a :*

$$\mathrm{U}_t\cap\mathrm{U}_{s+t} = \{x\in\mathrm{U}_t\mid\phi_t(x)\in\mathrm{U}_s\} \quad\text{et}\quad \phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x),\ \forall\, x\in\mathrm{U}_t\cap\mathrm{U}_{t+s}.$$

3) *L'application* $x\mapsto\mathrm{I}_x$ *est* « semi-continue » *en ce sens que* I_x *ne peut que croître par spécialisation, c.-à-d., pour tout* $x\in\mathrm{M}$ *il existe un voisinage* V_x *de* x *dans* M *tel que :*

$$\forall\, x'\in\mathrm{V}_x, \qquad \mathrm{I}_x\subseteq\mathrm{I}_{x'}.$$

Démonstration. — Voir [**Le**, § IV.1] . □

Remarque 2.30. — On appelle $\Phi=\Phi^{\mathrm{X}}$ le **flot** de X. On exprime parfois la propriété 2′) en disant que Φ est un pseudo-groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux.

Exemples 2.31. — Pour illustrer les résultats du théorème, le lecteur pourra étudier les exemples suivants.

1) $\mathrm{M} = \mathbb{R}$, $\mathrm{X}(x) = x^2$, cf. [**Le**, § IV.1.C].

2) $\mathrm{M} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{X}(x, y) = y^2(1 + x^2)e_1 = (y^2(1 + x^2), 0)$.

3) $\mathrm{M} = \mathbb{R}$, $\mathrm{X}(x) = \sin x$.

Définition 2.32. — On dit que le champ de vecteurs X est **complet** si pour tout $x \in \mathrm{M}$ on a $\mathrm{I}_x = \mathbb{R}$, c.-à-d., si $\phi_t^{\mathrm{X}}(x)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.6. Exponentielle d'un groupe de Lie. — Soit G un groupe de Lie. On désignera son élément neutre par 1 ou e, selon le contexte. Pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie(G)} = \mathrm{T}_1\mathrm{G}$, on désignera par $\mathbf{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé, c.-à-d.,

$$\mathbf{X}_1 = \mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X}_g = d_1\ell_g(\mathrm{X}), \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Définition 2.33. — Un **sous-groupe à un paramètre** de G (en abrégé : **1-psg**) est un morphisme de groupes de Lie $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$.

Théorème 2.34. — *Soient* $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie(G)}$ *et* $\mathbf{X}$ *le champ de vecteurs invariant à gauche associé. Alors* $\mathbf{X}$ *est complet et le flot associé est* G*-invariant, c.-à-d., vérifie*

$$\phi_t(g) = g\,\phi_t(e), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ g \in \mathrm{G}.$$

Par conséquent, l'application

$$\alpha_{\mathrm{X}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad t \mapsto \phi_t(e)$$

est un morphisme de groupes de Lie.

Réciproquement, si θ est un 1-psg *alors $\theta = \alpha_{\mathrm{X}}$, où $\mathrm{X} = \theta'(0)$. Par conséquent, on a une bijection*

$$\mathrm{Lie(G)} \leftrightarrow \{1\text{-psg } de \ \mathrm{G}\}.$$

Démonstration. — Notons $\Phi : (g, t) \mapsto \phi_t(g)$ le flot associé à $\mathbf{X}$. Soit $\mathrm{I} = \mathrm{I}_e$ le domaine de définition de la courbe intégrale maximale $\alpha : t \mapsto \phi_t(e)$ telle que $\alpha(0) = e$. Alors I est un intervalle ouvert contenant 0 et il s'agit de montrer que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, et que

$$\phi_t(g) = g\,\phi_t(e), \qquad \forall\, t \in \mathrm{I},\ g \in \mathrm{G}.$$

Soit $s \in \mathrm{I}$ arbitraire. Posons $g = \alpha(s)$ et

$$(\dagger) \qquad \beta(t) = g\alpha(t - s), \qquad \forall\, t \in s + \mathrm{I}.$$

Alors, pour tout $t \in s + \mathrm{I}$, $\beta'(t)$ égale :

$$(d_{\alpha(t-s)}\ell_g)(\alpha'(t - s)) = (d_{\alpha(t-s)}\ell_g)(\mathbf{X}(\alpha(t - s))) = \mathbf{X}(g\alpha(t - s)) = \mathbf{X}(\beta(t)).$$

Donc $t \mapsto \beta(t)$ est une courbe intégrale de $\mathbf{X}$, définie sur $s + \mathrm{I}$ et telle que $\beta(s) = g\alpha(0) = g = \alpha(s)$. Il en résulte que α et β coïncident sur l'intervalle

$\mathrm{I} \cap (s+\mathrm{I})$, donc α se prolonge à l'intervalle $\mathrm{I} \cup (s+\mathrm{I})$. Par maximalité de I, ceci entraîne que

$$s + \mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}, \qquad \forall\, s \in \mathrm{I},$$

et on en déduit que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Alors, pour g arbitraire, $\beta(t) = g\alpha(t)$ est la courbe intégrale maximale de $\mathbf{X}$ telle que $\beta(0) = g$, d'où

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_t(g) = g\,\phi_t(e).$$

En particulier, pour $g = \phi_s(e) = \alpha_{\mathrm{X}}(s)$ on obtient que

$$\alpha_{\mathrm{X}}(s+t) = \phi_{t+s}(e) = \phi_t(\phi_s(e)) = \phi_s(e)\phi_t(e) = \alpha_{\mathrm{X}}(s)\alpha_{\mathrm{X}}(t).$$

Comme $\alpha_{\mathrm{X}} : t \mapsto \alpha_{\mathrm{X}}(t)$ est C^∞, c'est donc un morphisme de groupes de Lie $\mathbb{R} \to \mathrm{G}$. Enfin, comme $\alpha'_{\mathrm{X}}(0) = \mathrm{X}$, l'application $\mathrm{X} \mapsto \alpha_{\mathrm{X}}$ est injective.

Réciproquement, soit θ un 1-psg et soient $\mathrm{X} = \theta'(0)$ et $\mathbf{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé. Alors, en dérivant par rapport à s, en $s = 0$, l'égalité

$$\theta(s+t) = \theta(t)\theta(s) = (\ell_{\theta(t)} \circ \theta)(s)$$

on obtient

$$\theta'(t) = d_1\ell_{\theta(t)}(\theta'(0)) = d_1\ell_{\theta(t)}(\mathbf{X}_1) = \mathbf{X}(\theta(t)).$$

Donc θ est la courbe intégrale de $\mathbf{X}$ passant par e en $t = 0$, d'où $\theta = \alpha_{\mathrm{X}}$. Ceci prouve la bijection annoncée. Le théorème est démontré. □

Corollaire 2.35. — *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *et* $t \in \mathbb{R}$, *on a* $\alpha_{t\mathrm{X}}(1) = \alpha_{\mathrm{X}}(t)$.

Démonstration. — L'application $\phi : s \mapsto \alpha_{\mathrm{X}}(ts)$ est un 1-psg, et $\phi'(0) = t\alpha'_{\mathrm{X}}(0) = t\mathrm{X}$. Donc ϕ coïncide avec $\alpha_{t\mathrm{X}}$. □

***Définition 2.36* (L'application exponentielle)**. — On pose $\exp(\mathrm{X}) = \alpha_{\mathrm{X}}(1)$. Alors $\exp(0) = e$ et, d'après le corollaire précédent,

$$\exp((s+t)\mathrm{X}) = \alpha_{\mathrm{X}}(s+t) = \alpha_{\mathrm{X}}(s)\alpha_{\mathrm{X}}(t) = \exp(s\mathrm{X})\exp(t\mathrm{X}), \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.37. — Pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, l'application exponentielle usuelle :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad t \mapsto \sum_{k \geqslant 0} \frac{t^k}{k!}\mathrm{X}^k$$

est un 1-psg, dont la dérivée en 0 est X. Ceci montre que pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'exponentielle de Lie définie plus haut coïncide avec l'exponentielle usuelle des matrices. Ceci explique la notation $\exp = \exp_{\mathrm{G}}$ pour G un groupe de Lie arbitraire.

Soit G^0 la composante connexe de G. Posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}^0)$.

Théorème 2.38. — 1) *L'application* $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ *est* C^∞.

2) $d_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. *Par conséquent,* exp *est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert* U *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *sur un voisinage ouvert* V *de* e *dans* G.

3) *Le sous-groupe engendré par* V (*ou par* $\exp(\mathfrak{g})$) *égale* G^0.

Démonstration. — 1) Considérons la variété $\mathrm{M} = \mathrm{G}\times\mathfrak{g}$ et le champ de vecteurs v sur M défini par

$$v(g, \mathrm{X}) = (d_1\ell_g(\mathrm{X}), 0) = (\mathbf{X}_g, 0).$$

Il est C^∞. Son flot est l'application

$$\Psi : \mathrm{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}, \qquad ((g, \mathrm{X}), t) \mapsto (g \exp(t\mathrm{X}), \mathrm{X}),$$

qui est donc C^∞. Notons pr_1 la projection $\mathrm{M} \to \mathrm{G}$ et τ l'inclusion de la sous-variété

$$\mathfrak{g} = \{e\} \times \mathfrak{g} \times \{1\} \quad \text{dans} \quad \mathrm{G} \times \mathfrak{g} \times \mathbb{R}.$$

Alors $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ égale $\mathrm{pr}_1 \circ \Psi \circ \tau$ donc est C^∞. Ceci prouve le point 1).

Montrons le point 2). Pour toute courbe C^∞ $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ telle que $f(0) = 0$, on a

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(f(t)) = (d_0 \exp)(f'(t)).$$

Appliquant ceci à la courbe $f(t) = t\mathrm{X}$, on obtient que

$$(d_0 \exp)(\mathrm{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{X}, \qquad \forall\, \mathrm{X} \in \mathfrak{g}.$$

Ceci montre que $d_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. La dernière assertion du point 2) résulte alors du théorème d'inversion locale.

Enfin, comme exp est continue et $\mathfrak{g}$ connexe, alors $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{G}^0$. D'autre part, comme V est un voisinage ouvert de e, le sous-groupe engendré par V égale G^0, d'après la proposition 1.50. □

***Théorème 2.39* (Fonctorialité de** exp**).** — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes de Lie et soient* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H})$. *Alors, pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, *on a :*

$$\exp_{\mathrm{H}}(d\phi(\mathrm{X})) = \phi(\exp_{\mathrm{G}}(\mathrm{X})),$$

c.-à-d., le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d\phi"] \arrow[d, "\exp_{\mathrm{G}}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_{\mathrm{H}}"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{H}. \end{tikzcd}$$

Démonstration. — L'application $\alpha : t \mapsto \phi(\exp(t\mathrm{X}))$ est un 1-psg de H, tel que $\alpha'(0) = d\phi(\mathrm{X})$, donc α est le 1-psg associé à $d\phi(\mathrm{X})$. □

2.7. G-variétés et représentations d'isotropie. —

***Définition 2.40* (Actions).** — Soient Γ un groupe quelconque et E un ensemble. Une **action** de Γ sur E est une application

$$\mu : \Gamma \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \qquad (g, x) \mapsto gx$$

telle que $1x = x$ et $g(hx) = (gh)x$, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g, h \in \Gamma$. Dans ce cas, on dit que E est un Γ-ensemble. On notera μ_g, resp. μ^x, les applications

$$\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \quad x \mapsto gx, \qquad \text{resp.} \quad \Gamma \longrightarrow \mathrm{E}, \quad g \mapsto gx.$$

***Définition 2.41* (Actions C^∞).** — Soient G un groupe de Lie et M une variété C^∞. On dit que M est une **G-variété** si l'on s'est donné une action $\mu : \mathrm{G}\times\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ qui est une application C^∞. Dans ce cas, chaque $\mu_g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est un difféomorphisme de M, d'inverse $\mu_{g^{-1}}$.

***Théorème 2.42* (Représentation d'isotropie).** — *Soit* M *une* G*-variété et soit* $p \in \mathrm{M}$ *un point fixe de* G *(c.-à-d.,* $gp = p$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$*). Alors*

$$g \mapsto d_p\mu_g \in \mathrm{GL}(\mathrm{T}_p\mathrm{M})$$

est une représentation C^∞ *de* G *dans l'espace tangent* $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$.

Démonstration. — Pour tout $g \in \mathrm{G}$, μ_g est un difféomorphisme de M, donc la différentielle $d_p\mu_g$ applique bijectivement $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$ sur $\mathrm{T}_{gp}\mathrm{M} = \mathrm{T}_p\mathrm{M}$. De plus, $d_p\mu_1 = \mathrm{id}$ et pour $g, h \in \mathrm{G}$ l'on a :

$$d_p\mu_{gh} = d_p(\mu_g \circ \mu_h) = d_{hp}\mu_g \circ d_p\mu_h = d_p\mu_g \circ d_p\mu_h.$$

Ceci montre que $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}_p\mathrm{M})$, $g \mapsto d_p\mu_g$ est un morphisme de groupes. Reste à voir que c'est une application C^∞.

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées locales sur un voisinage V de p dans M. Soit $(dx_1, \dots, dx_n)$ la base correspondante de l'espace cotangent $\mathrm{T}_p^*\mathrm{M} = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, et soit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

la base correspondante de $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$. Il faut montrer que les coefficients matriciels

$$g \mapsto dx_i\,(d_p\mu_g(\partial/\partial x_j))$$

sont des fonctions C^∞ de g.

Comme $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ est C^∞, il existe des fonctions C^∞ $f_1, \dots, f_n$, de $\mathrm{G} \times \mathrm{V}$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\mu(g, x) = (f_1(g, x), \dots, f_n(g, x)), \qquad \forall\,(g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{V},$$

c.-à-d., on a $f_i = x_i \circ \mu$. D'autre part, on a

$$d_{(g,x)}\mu = d_x\mu_g + d_g\mu^x, \qquad \forall\,(g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{M},$$

d'où, puisque μ^p est constante,

$$(d_{(g,p)}\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (d_p\mu_g)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G},\ j = 1, \dots, n.$$

Il en résulte que

$$(dx_i \circ d_p\mu_g)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = d_{(g,p)}(x_i \circ \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g, p)$$

est une fonction C^∞ de g. Le théorème est démontré. □

2.8. Action adjointe. — Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Alors G agit sur lui-même par conjugaison, car l'application

$$\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad (g, x) \mapsto gxg^{-1}$$

est C^∞. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'application μ_g correspondante est notée $\mathrm{Int}(g)$; c'est l'« *automorphisme intérieur* » de conjugaison par g. Alors, e est un point fixe de cette action et donc, d'après le théorème 2.42, on obtient une représentation de G dans $\mathfrak{g}$, appelée la **représentation adjointe** de G et notée :

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \qquad g \mapsto \mathrm{Ad}(g) = d_e\,\mathrm{Int}(g).$$

Lemme 2.43. — *Soient $g \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$(*) \qquad g\exp(t\mathrm{X})g^{-1} = \mathrm{Int}(g)(\exp(t\mathrm{X})) = \exp(t\,\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})).$$

Démonstration. — Fixons $g \in \mathrm{G}$. Alors, $\mathrm{Int}(g) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme de groupes de Lie dont la différentielle est $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Donc $(*)$ découle du théorème 2.39, appliqué à $\phi = \mathrm{Ad}(g)$. □

***Notation 2.44* (Centres)**. — 1) On note Z(G) le **centre** de G, c.-à-d.,

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{g \in \mathrm{G} \mid gh = hg, \quad \forall\, h \in \mathrm{G}\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de G, invariant par tout automorphisme de G.

2) On note $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{g}$, c.-à-d.,

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 0, \quad \forall\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}\}.$$

C'est un idéal de $\mathfrak{g}$, stable par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$.

***Définition 2.45* (Représentation adjointe de $\mathfrak{g}$)**. — La différentielle de Ad est un morphisme d'algèbres de Lie, noté provisoirement $\widetilde{\mathrm{ad}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, et définit donc une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$. En fait, on va voir plus bas que, pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$, $\widetilde{\mathrm{ad}}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, c.-à-d., $\widetilde{\mathrm{ad}}(\mathrm{X})$ n'est autre que l'endomorphisme $\mathrm{Y} \mapsto [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ de $\mathfrak{g}$, désigné par $\mathrm{ad}(\mathrm{X})$ dans le cours d'Introduction.

TABLE DES MATIÈRES

I. Groupes de Lie réels et groupes algébriques sur $\mathbb{C}$

Séance du 8/11/07 1

1. Groupes de Lie 1

1.1. Variétés différentiables 1

1.2. « Rappels » de calcul différentiel 5

1.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ 8

1.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant 11

1.5. Composante connexe d'un groupe topologique 14

I. Groupes de Lie réels (suite)

Séance du 9/11/07 17

1.6. Dérivations et champs de vecteurs 17

1.7. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie 27

I. Groupes de Lie réels (suite)

Séance du 15/11/07 31

2. Groupes et algèbres de Lie 31

2.1. Le cas de GL_n 31

2.2. Un « rappel » sur espaces tangents et différentielles 33

2.3. Sous-groupes de Lie fermés 34

2.4. Représentations 38

2.5. Champs de vecteurs et flots 42

2.6. Exponentielle d'un groupe de Lie 44

2.7. G-variétés et représentations d'isotropie 47

2.8. Action adjointe 48

Bibliographie iii