I. GROUPES DE LIE RÉELS (SUITE)

SÉANCE DU 16/11/07

2.8. Action adjointe, suite. — [4] Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$.

Lemme 2.46. — *Soit f une fonction C^∞ au voisinage d'un point $g \in \mathrm{G}$.*

1) *Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. Alors, pour t dans un voisinage de 0, et $k \in \mathbb{N}$, on a* [5]

$$\frac{d^k}{dt^k} f(g\exp(t\mathrm{X})) = (\mathrm{X}^k f)(g\exp(t\mathrm{X})). \tag{1}$$

En particulier,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(g\exp(t\mathrm{X})) = (\mathrm{X}f)(g). \tag{2}$$

2) *Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_s \in \mathfrak{g}$. Alors*

$$(\mathrm{X}_1 \cdots \mathrm{X}_s f)(g) = \left.\frac{\partial^s}{\partial t_1 \cdots \partial t_s}\right|_{t_1=\cdots=t_s=0} f(g\exp(t_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(t_s\mathrm{X}_s)). \tag{3}$$

Démonstration. — Par hypothèse, f est définie et C^∞ sur un voisinage ouvert V de g dans G, et comme $t \mapsto \exp(t\mathrm{X})$ est C^∞, *a fortiori* continue, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que $g\exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{V}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.

Pour toute fonction ϕ C^∞ sur V et tout $x \in \mathrm{V}$, on a, puisque $\mathrm{X} = \exp'_{\mathrm{X}}(0)$:

$$(\mathrm{X}\phi)(x) = (d_x\phi)(\mathrm{X}_x) = (d_x\phi \circ d_1\ell_x)(\mathrm{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(x\exp(t\mathrm{X})).$$

---

[4] version du 22/11/07

[5] avec l'abus de notation usuel, qui consiste à noter $(d/dt)\mathrm{F}(t)$ la fonction qui à t associe $\mathrm{F}'(t) = (d_t\mathrm{F})(1)$.

Fixons $t_0 \in \mathrm{I}$. Appliquant l'égalité précédente à $x = g\exp(t_0\mathrm{X})$, on obtient :

$$(\mathrm{X}\phi)(g\exp(t_0\mathrm{X})) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \phi(g\exp((t_0+s)\mathrm{X})) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \phi(g\exp(t\mathrm{X})).$$

Ceci montre que, avec l'abus de notation déjà signalé,

$$(\dagger) \qquad \frac{d}{dt} f(g\exp(t\mathrm{X})) = (\mathrm{X}\phi)(g\exp(t\mathrm{X})), \qquad \forall\, t \in \mathrm{I}.$$

La formule (1) en découle aussitôt, par récurrence sur k. La formule (2) est, bien sûr, l'évaluation en $t = 0$ de (1).

Montrons (3). Posons

$$\mathrm{F}(t_1, \ldots, t_s) = f(g\exp(t_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(t_s\mathrm{X}_s)).$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que F soit définie et C^∞ sur le voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^s$ suivant :

$$\mathrm{I}_\varepsilon^s = \{(t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s \mid \forall\, i = 1, \ldots s, \quad |t_i| < \varepsilon\}.$$

D'après (2), on a :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t_s}(t_1, \ldots, t_{s-1}, 0) = (\mathrm{X}_s f)(g\exp(t_1\mathrm{X}_1)\cdots\exp(t_{s-1}\mathrm{X}_{s-1})),$$

pour tout $(t_1, \ldots, t_{s-1}) \in \mathrm{I}_\varepsilon^{s-1}$, et (3) en découle par récurrence sur s. □

***Théorème 2.47* (Représentation adjointe et centres)**. — 1) *La différentielle de* $\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *coïncide avec l'application adjointe* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$*, c.-à-d., pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$*, on a :*

$$d(\mathrm{Ad})(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{ad}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}).$$

2) *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$*, on a*

$$\mathrm{Ad}(\exp_{\mathrm{G}}(\mathrm{X})) = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(\mathrm{X})) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathrm{ad}(\mathrm{X})^k}{k!}.$$

3) *Supposons* G **connexe**. *Alors*

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Z}(\mathrm{G}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}(\mathrm{G})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — 1) Notons provisoirement $\widetilde{\mathrm{ad}} = d(\mathrm{Ad})$. Comme $d_1\exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, on a, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, l'égalité suivante dans $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$:

$$(1) \qquad \widetilde{\mathrm{ad}}(\mathrm{X}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(t\mathrm{X})).$$

En composant ceci avec l'application linéaire d'évaluation en $\mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$, on obtient l'égalité suivante dans $\mathfrak{g}$:

$$(2) \qquad \widetilde{\mathrm{ad}}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(t\mathrm{X}))(\mathrm{Y}).$$

Soit f une fonction C^∞ sur un voisinage de e. Alors, l'application $Z \mapsto (Zf)(e) = d_e f(Z)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$; en l'appliquant à (2) on obtient l'égalité suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\text{(3)} \qquad \left(\widetilde{\mathrm{ad}}(X)(Y)f\right)(e) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)f\big)(e).$$

Or, pour t fixé, on a, d'après les lemmes 2.46 et 2.43 :

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \big(\mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)f\big)(e) &= \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} f\Big(\exp\big(\mathrm{Ad}(\exp(tX))(sY)\big)\Big) \\ &= \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} f\Big(\exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX)\Big). \end{aligned}$$

Par conséquent, posant $F(t,s) = f(\exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX))$, on obtient que

$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}}(X)(Y)f\right)(e) = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial s}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial t}(0,0).$$

Or, F est la composée de l'application $(t,s) \mapsto (t,s,-t)$ et de l'application

$$H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (t_1, s, t_2) \mapsto f(\exp(t_1X)\exp(sY)\exp(t_2X)).$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(t,s) = \frac{d}{dt_1}\bigg|_{t_1=0} H(t_1,s,0) - \frac{d}{dt_2}\bigg|_{t_2=0} H(0,s,t_2),$$

d'où

$$\left(\widetilde{\mathrm{ad}}(X)(Y)f\right)(e) = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\bigg|_{s=t=0} \Big(f(\exp(tX)\exp(sY)) - f(\exp(sY)\exp(tX))\Big).$$

D'après le lemme 2.46, combiné avec l'égalité $\partial^2/\partial s\,\partial t = \partial^2/\partial t\,\partial s$, ceci égale

$$(XYf)(e) - (YXf)e = ([X,Y]f)(e).$$

Ceci montre que $d(\mathrm{Ad})(X)(Y) = [X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$. Le point 1) est démontré.

Le point 2) découle du théorème 2.39 (fonctorialité de l'exponentielle), appliqué à $\phi = \mathrm{Ad}$, et du fait que l'application exponentielle pour $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est l'exponentielle usuelle d'une matrice (2.37).

Montrons le point 3). Pour tout morphisme $\phi : G \to H$ de groupes de Lie, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\phi) = \mathrm{Ker}(d\phi),$$

d'après le théorème 2.16. Appliquant ceci à $\phi = \mathrm{Ad}$ et tenant compte du point 1), on obtient :

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Il reste à montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = Z(G)$, lorsque G est connexe. On a toujours l'inclusion $Z(G) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$. En effet, si $g \in Z(G)$, alors $\mathrm{Int}(g) = \mathrm{id}_G$ et donc $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, d'où $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$.

Réciproquement, supposons G connexe et soit $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad})$. Alors, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, on a

$$g \exp(\mathrm{X}) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})) = \exp(\mathrm{X}),$$

et donc g commute au sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{g})$, qui égale $\mathrm{G}^0 = \mathrm{G}$ d'après le point 3) du théorème 2.38. Ceci achève la preuve du théorème 2.47. □

Remarque 2.48. — En particulier, si G est commutatif, alors Lie(G) est une algèbre de Lie abélienne, et réciproqument si G est connexe.

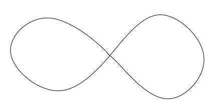
2.9. Sous-groupes et sous-algèbres de Lie. —

***Définition 2.49* (Immersions, etc.)**. — Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application C^∞ entre deux variétés C^∞, et soit $m \in \mathrm{M}$. On dit que f est une

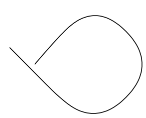
immersion en m	si	$d_m f$ est injective
resp. **submersion** en m	si	$d_m f$ est surjective
resp. **application étale** en m	si	$d_m f$ est bijective.

On dit que f est une immersion, resp. submersion, resp. application étale, si elle l'est en tout point $m \in \mathrm{M}$. Ainsi, « *application étale* » est synonyme de *difféomorphisme local.*

Remarque 2.50. — Attention, une immersion n'est pas nécessairement injective ! Par exemple, on a une immersion non injective

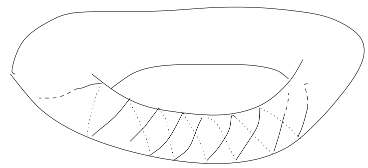
$\mathrm{S}^1 \longrightarrow$  $\subset \mathbb{R}^2$.

De plus, une immersion injective $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ n'est pas nécessairement un homéomorphisme de X sur une sous-variété de Y. Par exemple,

$f : \mathbb{R} \longrightarrow$  $\subset \mathbb{R}^2$

est une immersion injective, dont l'image n'est pas une sous-variété au voisinage du point $f(0) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$, et qui n'est pas un homéomorphisme (car l'image inverse de tout voisinage de $f(0)$ dans $\mathbb{R}^2$ est la réunion d'un voisinage de 0 et de $+\infty$).

Pire encore, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'application $\mathbb{R} \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$, $t \mapsto (e^{it}, e^{i\alpha t})$ est un morphisme de groupes de Lie et une immersion injective, dont l'image est dense :



***Définition 2.51* (Plongements).** — Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ une application C^∞. On dit que c'est un **plongement** (= "imbedding" in American, or "embedding" in English, according to Spivak [**Spi**, p.49]), si : 1) c'est une immersion injective, et un homéomorphisme de Y sur son image, 2) $f(\mathrm{Y})$ est une sous-variété (localement fermée !) de X.

Si de plus $f(\mathrm{Y})$ est ouvert (resp. fermé) dans X, on dit que que f est un plongement ouvert (resp. fermé).

***Remarque 2.52*.** — En fait, on peut montrer que la condition 2) est conséquence de la condition 1), voir par exemple la preuve de [**Le**, § I.4.B, Prop. 2].

***Lemme 2.53* (Immersions, etc. de groupes de Lie).** — *Soit $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de groupes de Lie. Alors ϕ est une immersion* (*resp. submersion, resp. application étale*) *si et seulement si $d_1\phi$ est injective* (*resp. surjective, resp. bijective*).

Démonstration. — Notons ℓ_g, resp. ℓ_h, la translation à gauche par un élément $g \in \mathrm{G}$, resp. $h \in \mathrm{G}'$. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \ell_g = \ell_{\phi(g)} \circ \phi$ et donc :

$$d_g\phi \circ d_1\ell_g = d_1\ell_{\phi(g)} \circ d_1\phi.$$

Comme $d_1\ell_g$ et $d_1\ell_{\phi(g)}$ sont inversibles, ceci montre que $d_g\phi$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si $d_1\phi$ l'est. $\square$

***Définition 2.54* (Sous-groupes de Lie).** — Soit G un groupe de Lie. Un sous-groupe de Lie de G est un sous-groupe H, muni d'une structure de groupe de Lie telle que l'inclusion $\mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ soit une application C^∞ (et donc un morphisme de groupes de Lie).

De façon plus formelle mais équivalente, un sous-groupe de Lie est une classe d'équivalence de couples (H, τ), où H est un groupe de Lie et τ une immersion injective ; deux tels couples (H, τ) et (H', τ') étant équivalents s'il existe un isomorphisme $\phi : \mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}'$ tel que $\tau' \circ \phi = \tau$.

Le théorème suivant est important. Pour une démonstration reposant sur la théorie des équations différentielles (plus précisément, le théorème d'intégrabilité de Frobenius), on renvoie à [**Va**, § 2.5] ou [**Wa**, 3.19]. (Pour d'autres démonstrations, voir [**Go**, § 6.13] ou [**DK**, 1.10.3].)

***Théorème 2.55* (Sous-groupes de Lie).** — *Soient* G *un groupe de Lie,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ *et* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Il existe un* **unique** *sous-groupe de Lie* **connexe** H *tel que* $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$*, c.-à-d., il existe un groupe de Lie connexe* H *et une immersion injective*

$$\tau : H \hookrightarrow G \qquad \textit{telle que} \quad d\tau = \sigma,$$

où σ *désigne l'inclusion* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$*. De plus, le couple* (H, τ) *est unique à isomorphisme unique près. On dit que* H *est le sous-groupe* **associé à** $\mathfrak{h}$*.*

***Proposition 2.56*.** — *Soient* G *un groupe de Lie,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ *et* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Soit* H *le sous-groupe de Lie connexe de* G *associé à* $\mathfrak{h}$*. Alors,* H *est le sous-groupe de* G *engendré par* $\exp(\mathfrak{h})$*.*

Démonstration. — L'hypothèse signifie qu'il existe une immersion injective $\tau : H \hookrightarrow G$ telle que $d\tau$ soit l'inclusion de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Identifions H à son image dans G. Alors, il résulte du théorème 2.39 que $\exp_H$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de $\exp = \exp_G$.

Donc $\exp(\mathfrak{h}) \subseteq H$, et comme H est connexe il est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, d'après le point 3) du théorème 2.38. $\square$

***Remarque 2.57*.** — Dans la proposition précédente, on a supposé *l'existence de* H *établie* (grâce au théorème d'intégrabilité de Frobenius), et montré qu'alors H est nécessairement égal au sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$. Une autre approche consiste à montrer directement que le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, notons-le H', peut être muni d'une (unique) structure de groupe de Lie telle que l'inclusion $H' \hookrightarrow G$ soit un morphisme de groupes de Lie. C'est l'approche suivie dans [**Go**, § 6.13] et [**DK**, 1.10.3].

***Exemples 2.58*.** — 1) Soit $G = S^1$. Alors $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ et l'application exponentielle est $t \mapsto e^{it}$. Ou bien, mieux encore, considérons $G = S^1$ comme sous-groupe de Lie (fermé) de $G_1 = \mathbb{C}^*$. Alors

$$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$$

et l'application exponentielle $\exp_{G_1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est l'exponentielle usuelle.

Alors, le sous-groupe S^1 de $\mathbb{C}^*$ étant défini par l'équation $z\overline{z} = 1$, son algèbre de Lie est définie par l'équation $z + \overline{z} = 0$, c.-à-d., $\mathrm{Lie}(S^1) = i\mathbb{R}$, et l'application exponentielle $\exp_{S^1}$ est la restriction de $\exp = \exp_{\mathbb{C}^*}$ à la sous-algèbre de Lie $i\mathbb{R} = \mathrm{Lie}(S^1)$.

2) De même, l'algèbre de Lie du tore $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ est $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons la droite

$$\Delta_\alpha = \{(t, \alpha t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Le sous-groupe de Lie connexe qui lui est associé par le théorème 2.55 est le sous-groupe de Lie

$$\{(e^{it}, e^{i\alpha t}) \in \mathbb{T} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

rencontré plus haut : si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, ce sous-groupe est dense dans $\mathbb{T}$, et n'est pas une sous-variété.

Corollaire 2.59. — *Soient* G *un groupe de Lie,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$*,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*, et soit* K *un sous-groupe de Lie (non nécessairement connexe) de* G *tel que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{K}) = \mathfrak{h}$*. Alors,* K^0 *est le sous-groupe de* G *engendré par* $\exp(\mathfrak{h})$*.*

En particulier, si G *est connexe et si* $\mathrm{Lie}(\mathrm{K}) = \mathfrak{g}$*, alors* $\mathrm{K} = \mathrm{G}$*.*

Démonstration. — Soit H le sous-groupe de Lie connexe de G associé à $\mathfrak{h}$, c'est le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, d'après la proposition 2.56.

Notons τ (resp. σ) l'inclusion de H (resp. K^0) dans G. Comme $\mathrm{Lie}(\mathrm{K}^0) = \mathrm{Lie}(\mathrm{K})$, l'hypothèse entraîne que $d\sigma = d\tau$ est l'inclusion de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors l'assertion d'unicité dans le théorème 2.55 entraîne que $\mathrm{H} = \mathrm{K}^0$. Ceci prouve le corollaire. □

2.10. Sous-groupes fermés d'un groupe de Lie. — Dans ce paragraphe, on va démontrer le théorème suivant (établi dans le cas $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par John von Neumann en 1929, puis généralisé pour G arbitraire par Élie Cartan).

Théorème 2.60. — *Soit* G *un groupe de Lie et soit* H *un sous-groupe fermé de* G*. Alors* H *est un sous-groupe de Lie fermé de* G*, dont l'algèbre de Lie est :*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \mid \exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{H}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. — Elle se fait en trois étapes. Posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ et munissons $\mathfrak{g}$ d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$.

Lemme 2.61. — *Soit* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments non-nuls de* $\mathfrak{g}$*, convergeant vers* 0 *et telle que*

$$\exp(\mathrm{X}_n) \in \mathrm{H}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

et que la suite $\mathrm{U}_n := \mathrm{X}_n/\|\mathrm{X}_n\|$ *converge vers* $\mathrm{U} \in \mathfrak{g}$*. Alors, on a*

$$\exp(t\mathrm{U}) \in \mathrm{H}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Fixons $t \in \mathbb{R}$ et posons $t_n = t/\|\mathrm{X}_n\|$. Soient k_n la partie entière de t_n et $t'_n = t_n - k_n$. Comme $t'_n \in [0,1[$ et $\mathrm{X}_n \to 0$, la suite $(t'_n\mathrm{X}_n)_n$ tend vers 0, et donc la suite de terme général

$$k_n\mathrm{X}_n = t_n\mathrm{X}_n - t'_n\mathrm{X}_n = t\mathrm{U}_n - t'_n\mathrm{X}_n$$

converge vers $t\mathrm{U}$. Par conséquent, comme l'application $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ est C^∞, donc *a fortiori* continue, la suite de terme général

$$\exp(k_n\mathrm{X}_n) = \exp(\mathrm{X}_n)^{k_n}$$

converge vers $\exp(t\mathrm{U})$. Le sous-groupe H contient $\exp(\mathrm{X}_n)$ par hypothèse, donc aussi $\exp(\mathrm{X}_n)^{k_n}$, et comme H est fermé il contient aussi la limite $\exp(t\mathrm{U})$. Ceci prouve le lemme. $\square$

Posons maintenant

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{H}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Lemme 2.62. — *$\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. — Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{h}$. Il est clair que $s\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc il suffit de montrer que $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in \mathfrak{h}$. On peut évidemment supposer que $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \neq 0$.

On sait que $d_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, donc exp induit un difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage V de 1 dans G. Notons log le difféomorphisme réciproque. Alors $d_1 \log = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

La multiplication $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est C^∞, donc *a fortiori* continue, donc il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que

$$\exp(s\mathrm{X})\exp(t\mathrm{Y}) \in \mathrm{V}, \qquad \forall\, s, t \in \mathrm{I}.$$

Alors l'application

$$\psi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{U}, \qquad t \mapsto \log(\exp(t\mathrm{X})\exp(t\mathrm{Y}))$$

est bien définie, C^∞, et vérifie $\psi(t) \neq 0$ si $t \neq 0$ (car $\psi(t) = 0$ et $t \in \mathrm{I}$ impliquent $\exp(t\mathrm{X}) = \exp(-t\mathrm{Y})$, d'où $t\mathrm{X} = -t\mathrm{Y}$, et $t = 0$ car on a supposé $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \neq 0$), et

$$\forall\, t \in \mathrm{I}, \qquad \exp(\psi(t)) = \exp(t\mathrm{X})\exp(ty) \in \mathrm{H},$$

puisque $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{h}$.

De plus, comme la dérivée en $(1,1)$ de μ est l'addition $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, on obtient que $\psi'(0) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$, d'où

$$(*) \qquad \psi(t) = t(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) + \mathrm{O}(t^2), \qquad \text{pour} \quad t \longrightarrow 0.$$

Soit alors $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non-nuls de I convergeant vers 0, et posons $\mathrm{Z}_n = \psi(t_n)$. Alors on a $\mathrm{Z}_n \neq 0$ et $\exp(\mathrm{Z}_n) \in \mathrm{H}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\mathrm{Z}_n)_n$ converge vers 0, et d'après $(*)$, la suite $(\mathrm{Z}_n/t_n)_n$ converge vers $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$, d'où en déduit que la suite de terme général $\mathrm{Z}_n/\|\mathrm{Z}_n\|$ converge vers $\mathrm{U} := (\mathrm{X}+\mathrm{Y})/\|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\|$. Par conséquent, d'après le lemme précédent, U et donc $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ appartiennent à $\mathfrak{h}$. Ceci prouve que $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. $\square$

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, c.-à-d.,

$$(\dagger) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \mathfrak{m}.$$

Lemme 2.63. — *Il existe un voisinage ouvert* $W_{\mathfrak{m}}$ *de* 0 *dans* $\mathfrak{m}$ *tel que* $\exp(W_{\mathfrak{m}}) \cap H = \{1\}$.

Démonstration. — En effet, il existerait sinon une suite d'éléments non nuls $Y_k \in \mathfrak{m}$, convergeant vers 0, et telle que chaque $h_k = \exp(Y_k)$ soit un élément de H, distinct de 1 (puisque exp est bijective au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$). Alors chaque

$$X_k = \frac{Y_k}{\|Y_k\|}$$

appartient à la sphère unité $\mathbf{S}(\mathfrak{m})$ de $\mathfrak{m}$, qui est compacte, donc la suite X_k possède une valeur d'adhérence $X \in \mathbf{S}(\mathfrak{m})$. Alors, d'après le lemme 2.61, $X \in \mathfrak{h}$, d'où une contradiction avec l'hypothèse $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. Ceci prouve le lemme. □

On peut maintenant achever la démonstration du théorème 2.60. L'application

$$\phi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y),$$

est C^∞, et sa différentielle en $(0, 0)$ est $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \oplus \mathrm{id}_{\mathfrak{m}}$, qui est un isomorphisme. Donc d'après le théorème d'inversion locale (1.24), il existe des voisinages ouverts $U_{\mathfrak{h}}, U_{\mathfrak{m}}$, resp. V, de 0 dans $\mathfrak{h}, \mathfrak{m}$, resp. de 1 dans G, tels que ϕ induise un difféomorphisme

$$\psi : U_{\mathfrak{h}} \times U_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} V.$$

De plus, d'après le lemme précédent on peut supposer, quitte à remplacer $U_{\mathfrak{m}}$ par $U_{\mathfrak{m}} \cap W_{\mathfrak{m}}$, que l'on a $\exp(U_{\mathfrak{m}}) \cap H = \{1\}$. Il est clair que

$$\exp(U_{\mathfrak{h}}) = \psi(U_{\mathfrak{h}} \times \{0_{\mathfrak{m}}\}) \subseteq V \cap H.$$

Réciproquement, soit $h \in H \cap V$. Alors, il existe $X \in U_{\mathfrak{h}}$ et $Y \in U_{\mathfrak{m}}$ tels que $h = \exp(X)\exp(Y)$, mais alors

$$\exp(Y) = \exp(-X)\, h \quad \text{appartient à} \quad \exp(U_{\mathfrak{m}}) \cap H = \{1\},$$

d'où $Y = 0$. Posant $U = U_{\mathfrak{h}} \times U_{\mathfrak{m}}$, ceci montre que

$$V \cap H = \psi(U_{\mathfrak{h}}) = \psi(U \cap \mathfrak{h}).$$

Par conséquent, H est, au voisinage de 1, une sous-variété C^∞ de G, de dimension $d = \dim \mathfrak{h}$.

Il en est de même en tout point $h \in H$, puisque la translation $\ell_h : g \mapsto hg$ est un difféomorphisme C^∞ de G. Ceci montre que H est un sous-groupe de Lie fermé de G, de dimension d.

Enfin, pour tout $X \in \mathfrak{h}$, la courbe $f(t) = \exp(tX)$ est C^∞, à valeurs dans H, et vérifie $f(0) = 1$ et

$$f'(0) = X.$$

Donc $X \in T_1 H = \mathrm{Lie}(H)$, et ceci montre que $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Lie}(H)$. Comme

$$\dim \mathrm{Lie}(H) = \dim(H) = \dim \mathfrak{h},$$

on a l'égalité $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H})$. (On pouvait aussi dire que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{H})$ et $t \in \mathbb{R}$, on a, par fonctorialité de l'exponentielle :

$$\exp_{\mathrm{G}}(t\mathrm{X}) = \exp_{\mathrm{H}}(t\mathrm{X}) \in \mathrm{H},$$

d'où $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$ et l'inclusion $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) \subseteq \mathfrak{h}$). Le théorème est démontré. □

***Proposition 2.64* (Stabilisateurs).** — *Soient* G *un groupe de Lie et* M *une* G-*variété* C^∞. *Pour tout* $p \in \mathrm{M}$, *son* **stabilisateur**

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(p) = \{g \in \mathrm{G} \mid gp = p\},$$

qu'on note aussi G_p, *est un sous-groupe de Lie fermé de* G.

Démonstration. — G_p est un sous-groupe, et il est fermé car c'est l'image inverse de la diagonale de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ par l'application C^∞ (donc continue)

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{M} \times \mathrm{M}, \qquad g \mapsto (p, gp).$$

□

***Corollaire 2.65* (Représentation d'isotropie, II).** — *Soient* M *une* G-*variété et* $p \in \mathrm{M}$. *Alors,*

$$h \mapsto d_p\mu_h \in \mathrm{GL}(\mathrm{T}_p\mathrm{M})$$

est une représentation C^∞ *de* G_p *dans l'espace tangent* $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$ (*où l'on a noté* μ_h *l'application* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $x \mapsto hx$).

Démonstration. — Sachant que G_p est un groupe de Lie, d'après la proposition précédente, ceci résulte du théorème 2.42. □

2.11. Le yoga des -zateurs. — Soit G un groupe de Lie. Reprenons les conventions sur les représentations introduites dans le paragraphe 2.4, c.-à-d., désignons par $\mathbb{K}$ le corps de base, avec la convention que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ un morphisme de groupes de Lie, c.-à-d., une représentation lisse de G dans V. Soit θ le morphisme d'algèbres de Lie $d\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$.

Dans la suite, on écrira souvent $g \cdot v$ ou gv au lieu de $\rho(g)(v)$, et de même $\mathrm{X} \cdot v$ ou $\mathrm{X}v$ au lieu de $\theta(\mathrm{X})(v)$, pour $g \in \mathrm{G}$, $v \in \mathrm{V}$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$.

***Lemme 2.66*.** — *Pour tout* $v \in \mathrm{V}$, *la différentielle en* e *de* $g \mapsto gv$ *est l'application* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}v$.

Démonstration. — Posons $\phi_v(g) = gv$ et notons η_v l'application

$$\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}v.$$

Sa différentielle en tout point $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ est l'application linéaire

$$\varepsilon_v : \mathrm{End}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Y}(v).$$

Comme $\phi_v = \eta_v \circ \rho$ alors, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, on a

$$(d_e\phi_v)(\mathrm{X}) = (\varepsilon_v \circ d_e\rho)(\mathrm{X}) = \mathrm{X}v.$$

Ceci prouve le lemme. □

Soient W un sous-espace de V et $g \in \mathrm{G}$ tels que

$$\rho(g)(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W}.$$

Comme $\rho(g)$ est inversible, $\rho(g)(\mathrm{W})$ a même dimension que W, et donc on a l'égalité $\rho(g)(\mathrm{W}) = \mathrm{W}$, d'où aussi $\mathrm{W} = \rho(g^{-1})(\mathrm{W})$. Posons alors les définitions suivantes, où l'égalité $(*)$ résulte de ce qui précède.

Définition 2.67 **(Stabilisateurs dans G)**. — Soient $v \in \mathrm{V}$ et W un sous-espace de V. On introduit leurs stabilisateurs dans G :

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v) &= \{g \in \mathrm{G} \mid gv = v\};\\ \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}) &= \{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{W} = \mathrm{W}\} \overset{(*)}{=} \{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{W} \subseteq \mathrm{W}\}.\end{aligned}$$

Ce sont des sous-groupes de G. On dit aussi que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v)$ est le *fixateur* de v, noté $\mathrm{Fix}_{\mathrm{G}}(v)$, ou le *groupe d'isotropie* (dans G) de v, noté G_v. De même, $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ est aussi noté G_{W}.

Lemme 2.68. — $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v)$ *et* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$ *sont des sous-groupes fermés de* G*, donc des sous-groupes de Lie fermés.*

Démonstration. — Pour tout $v \in \mathrm{V}$, l'application $\mu_v : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv$ est continue, et l'on a

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v) = \mu_v^{-1}(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}) = \bigcap_{w \in \mathrm{W}} \mu_w^{-1}(\mathrm{W}),$$

ce qui montre que ce sont des sous-groupes fermés de G. Ce sont donc des sous-groupes de Lie fermés, d'après le théorème 2.60. □

Notation 2.69. — On note $\mathrm{Stab}^0_{\mathrm{G}}(v)$, resp. $\mathrm{Stab}^0_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$, la composante connexe de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(v)$, resp. $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$. On les appelle les « **stabilisateurs connexes** ».

On introduit aussi les stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$. (La définition ci-dessous est valable pour toute représentation $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$.)

Définition 2.70 **(Stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$)**. — Soient $v \in \mathrm{V}$ et W un sous-espace de V. On introduit leurs stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(v) &= \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{X} \cdot v = 0\};\\ \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{W}) &= \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{X} \cdot \mathrm{W} \subseteq \mathrm{W}\}.\end{aligned}$$

Ce sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ (vérification immédiate). On les note aussi $\mathfrak{g}_v$, resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{W}}$.

Théorème 2.71. — *On a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v$ (*resp.* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G_W}) = \mathfrak{g}_\mathrm{W}$) *et donc* G_v^0 (*resp.* G_W^0) *est le sous-groupe de Lie connexe (et ici, fermé) associé à* $\mathfrak{g}_v$ (*resp.* $\mathfrak{g}_\mathrm{W}$).

Démonstration. — L'application $\mathrm{G}_v \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv = v$ est constante, donc sa différentielle est nulle. Par conséquent, d'après le lemme 2.66, on a

$$\mathrm{X}v = 0, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) \subseteq \mathfrak{g}_v.$$

De même, pour tout $w \in \mathrm{W}$, on a $\phi_w(g) \in \mathrm{W}$ pour tout $g \in \mathrm{G_W}$, d'où

$$\mathrm{X}w = d_e\phi_w(\mathrm{X}) \in \mathrm{W}, \quad \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G_W}), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{Lie}(\mathrm{G_W}) \subseteq \mathfrak{g}_\mathrm{W}.$$

Montrons les inclusions réciproques.

Soit S (resp. H) le sous-groupe connexe de G associé à $\mathfrak{g}_v$ (resp. $\mathfrak{g}_\mathrm{W}$) ; il est engendré par $\exp(\mathfrak{g}_v)$ (resp. $\exp(\mathfrak{g}_\mathrm{W})$), d'après la proposition 2.56.

D'après le théorème 2.39 et l'exemple 2.37 on a, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$,

$$\rho(\exp(\mathrm{X})) = \exp(\theta(\mathrm{X})) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\theta(\mathrm{X})^k}{k!}.$$

Par conséquent, v est fixé par $\exp(\mathfrak{g}_v)$, donc par S, et, de même, W est laissé stable par $\exp(\mathfrak{g}_\mathrm{W})$, donc par H. Donc

$$(*) \qquad \mathrm{S} \subseteq \mathrm{G}_v^0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}_\mathrm{W}^0$$

d'où les inclusions

$$\mathfrak{g}_v = \mathrm{Lie}(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}_\mathrm{W} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{G_W}).$$

On obtient donc les égalités

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Lie}(\mathrm{G_W}) = \mathfrak{g}_\mathrm{W},$$

et donc les inclusions dans $(*)$ sont des égalités, d'après le corollaire 2.59. □

Remarque 2.72. — Voici une autre démonstration de l'égalité $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) = \mathfrak{g}_v$, qui n'utilise pas l'application exponentielle (mais utilise à la place le théorème du rang constant). On a vu plus haut que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_v) \subseteq \mathfrak{g}_v$, donc il suffit de montrer que ces deux espaces ont même dimension.

L'application $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv$ est C^∞. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \ell_g = \rho(g) \circ \phi$, d'où

$$d_g\phi \circ d_1\ell_g = \rho(g) \circ d_1\phi.$$

Comme $d_1\ell_g$ et $\rho(g)$ sont inversibles, $d_g\phi$ a même rang que $d_1\phi$. Or $d_1\phi$ est l'application

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}\cdot v,$$

dont le noyau est $\mathfrak{g}_v$. Ceci prouve que ϕ est de rang constant égal à

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_v.$$

Donc, d'après le théorème du rang constant 1.38, $G_v = \phi^{-1}(v)$ est une sous-variété fermée de dimension $\dim \mathfrak{g}_v$. Par conséquent, on a l'égalité $\mathrm{Lie}(G_v) = \mathfrak{g}_v$.

***Définition 2.73* (Vecteurs invariants)**. — Soit V une représentation de dimension finie de G. On pose

$$\begin{aligned} V^G &= \{v \in V \mid gv = v, \quad \forall\, g \in G\} \\ V^{\mathfrak{g}} &= \{v \in V \mid Xv = 0, \quad \forall\, X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.74. — *Supposons* G **connexe**.

1) *On a* $V^{\mathfrak{g}} = V^G$.

2) *Soit* W *un sous-espace de* V *stable par* $\mathfrak{g}$. *Alors* W *est stable par* G.

Démonstration. — 1) Il est clair que $V^G \subseteq V^{\mathfrak{g}}$. Réciproquement, soit $v \in V^{\mathfrak{g}}$. Alors, $\mathrm{Lie}(G_v) = \mathfrak{g}$. Donc, d'après le corollaire 2.59, $G_v = G$, d'où $v \in V^G$. Ceci prouve 1).

De même, on a $\mathrm{Lie}(G_W) = \mathfrak{g}$, d'où $G_W = G$, c.-à-d., W est stable par G. ☐

Théorème 2.75. — *Soient* G *un groupe de Lie* **connexe**, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$, *et* H *le sous-groupe de Lie connexe de* G *associé à* $\mathfrak{h}$. *On a les équivalences suivantes :*

1) $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g} \Leftrightarrow$ H *est normal dans* G.

2) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow H \subseteq Z(G)$.

Démonstration. — 1) Si H est normal, alors $\mathfrak{h}$ est stable par Ad(G) donc *a fortiori* par $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{h}$ soit un idéal de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., que son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$, pour la représentation adjointe, égale $\mathfrak{g}$. Comme G est connexe alors, d'après le théorème précédent, $\mathfrak{h}$ est stable par Ad(G).

De plus, d'après le théorème 2.39, l'application exponentielle de H est la restriction à $\mathfrak{h}$ de celle de $\mathfrak{g}$. Donc, utilisant le lemme 2.43, on obtient que, pour tout $X \in \mathfrak{h}$ et $g \in G$,

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)(X)) \in H.$$

Donc G normalise le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{h})$, qui égale H d'après le théorème 2.56. Ceci montre que H est normal dans G. Le point 1) est démontré.

La preuve du point 2) est analogue et est laissée au lecteur. ☐

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Spi] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish, 1970, 3rd edition 2005.

[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.