I. GROUPES DE LIE RÉELS (SUITE)

SÉANCE DU 23/11/07

3. Algèbres de Lie semi-simples compactes ou complexes

[7] On convient que, dans toute la suite, « algèbre de Lie » signifie « algèbre de Lie de dimension finie ».

3.1. Automorphismes et dérivations. — Soit L une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie. On rappelle qu'un $\mathbb{R}$-endomorphisme $D : L \to L$ est une **dérivation** de L s'il vérifie :

$$(*) \qquad \forall\, X, Y \in L, \qquad D([X,Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)].$$

On note Dér(L) l'ensemble des dérivations de L ; on vérifie sans peine que c'est une sous-algèbre de Lie de End(L).

Définition 3.1. — Soit Aut(L) le groupe des automorphismes de L, c.-à-d.,

$$\mathrm{Aut}(L) = \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid \forall\, X, Y \in L, \quad [g(X), g(Y)] = g([X,Y])\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de GL(L) (ceci se voit en prenant une base $(X_1, \dots, X_n)$ de L et en écrivant $[X_i, X_j] = \sum_k c_k^{i,j} X_k$ et les équations $[g(X_i), g(X_j)] = g([X_i, X_j])$, ou bien, de façon équivalente, avec le point de vue « stabilisateur » développé plus bas).

Donc Aut(L) est un sous-groupe de Lie fermé de GL(L). On note $\mathrm{Aut}^0(L)$ sa composante connexe.

Afin de déterminer l'algèbre de Lie de Aut(L), notons θ le crochet de Lie de L, considéré comme application linéaire $L \otimes L \to L$. Alors, on obtient que Aut(L) est le groupe d'isotropie de θ dans GL(L), c.-à-d.,

$$\mathrm{Aut}(L) = G_\theta, \qquad \text{où } G = \mathrm{GL}(L).$$

[7] version du 26/11/07

L'action dérivée de $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(\mathrm{L})$ sur $\mathrm{E} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{L} \otimes \mathrm{L}, \mathrm{L})$ est donnée, d'après la proposition 2.21, par

$$u \cdot \theta = u \circ \theta - \theta \circ u, \qquad \forall\, u \in \mathfrak{g},\ \theta \in \mathrm{E},$$

c.-à-d.,

$$\begin{aligned}(u \cdot \theta)(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}) &= u([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) - \theta(u(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{Y} + \mathrm{X} \otimes u(\mathrm{Y})) \\ &= u([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) - [u(\mathrm{X}), \mathrm{Y}] - [\mathrm{X}, u(\mathrm{Y})].\end{aligned}$$

Donc, le stabilisateur de θ dans $\mathfrak{g}$ est :

$$\mathfrak{g}_\theta = \mathrm{Dér}(\mathrm{L}).$$

Par conséquent, d'après le théorème 2.71, on obtient le théorème suivant (dans lequel L est notée $\mathfrak{g}$).

Théorème 3.2. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie de dimension finie. Alors* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *est un sous-groupe fermé* (*non nécessairement connexe*) *de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, *et l'on a*

$$\mathrm{Dér}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}).$$

3.2. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension finie. Rappelons les définitions suivantes.

Définition 3.3. — 1) $\mathfrak{g}$ est *simple* si elle est $\neq 0$, *non abélienne*, et ne possède pas d'idéal propre non nul.

2) $\mathfrak{g}$ est **semi-simple** si elle est $\neq 0$ et ne possède pas d'idéal résoluble $\neq 0$.

On a vu dans le cours d'Introduction les théorèmes suivants (Théorèmes 6.18 et 7.6, et Proposition 6.4)

***Théorème 3.4* (Critère de semi-simplicité de Cartan)**. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *La forme de Killing* $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *est non dégénérée ;*

(b) $\mathfrak{g}$ *se décompose de façon unique comme somme directe d'algèbres de Lie simples :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

chaque $\mathfrak{g}_i$ *étant alors un idéal simple non abélien de* $\mathfrak{g}$ *;*

(c) $\mathfrak{g}$ *est semi-simple au sens de la définition ci-dessus, c.-à-d., ne contient pas d'idéal résoluble* $\neq 0$.

Théorème 3.5. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie semi-simple. Alors*

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — Comme $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal abélien $\neq 0$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ et donc

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Dér}(\mathfrak{g});$$

l'inclusion résultant du fait que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$, d'après l'identité de Jacobi. Il s'agit donc de montrer l'inclusion réciproque.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}(\mathfrak{g})$. Considérons la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})).$$

Comme $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée, il existe un unique $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ tel que

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})), \qquad \forall\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}.$$

Montrons que $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$. Pour tout $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{D}([\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]) = [\mathrm{D}(\mathrm{Y}), \mathrm{Z}] + [\mathrm{Y}, \mathrm{D}(\mathrm{Z})],$$

d'où $\mathrm{ad}\, \mathrm{D}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) - \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{D}$. Donc, $\mathrm{K}(\mathrm{D}(\mathrm{Y}), \mathrm{Z})$ égale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, \mathrm{D}(\mathrm{Y})\, \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) - \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}([\mathrm{Y}, \mathrm{Z}])) = \mathrm{K}(\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]) = \mathrm{K}([\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \mathrm{Z}).
\end{aligned}$$

Comme K est non dégénérée, ceci entraîne $\mathrm{D}(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, pour tout Y, d'où $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$. □

Corollaire 3.6. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie semi-simple. Alors* $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ *est un sous-groupe de Lie fermé connexe de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *et l'on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \cong \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Ceci découle des théorèmes 3.2 et 3.5. □

Définition 3.7. — Pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, on dira que $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ est le groupe de Lie *adjoint* de $\mathfrak{g}$; on le notera $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.

Remarque 3.8. — Pour $\mathfrak{g}$ arbitraire, il résulte du théorème 2.55 qu'il existe un unique sous-groupe de Lie connexe H de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (non nécessairement fermé), tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. L'avantage des résultats précécents est qu'ils montrent directement, pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, que $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, où G est le sous-groupe fermé $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, sans faire appel au théorème 2.55 (que nous n'avons pas démontré).

3.3. Groupes de Lie semi-simples 1-connexes. — Rappelons la définition 2.92 : un groupe de Lie (connexe) est dit semi-simple (resp. quasi-simple) si son algèbre de Lie est semi-simple (resp. simple).

D'après la définition 2.84 et la remarque 2.85, une variété connexe est simplement connexe si et seulement si son groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{X}, x_0)$ (relativement à un point de base x_0 arbitrairement choisi) est trivial. D'après la proposition ci-dessous, un produit de variétés 1-connexes est 1-connexe :

Proposition 3.9. — *Soit* (X, x_0) (*resp.* (Y, y_0)) *une variété connexe munie d'un « point de base »* x_0 (*resp.* y_0). *Alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *est connexe et l'on a un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(\mathrm{X}, x_0) \times \pi_1(\mathrm{Y}, y_0).$$

En particulier, si X *et* Y *sont* 1*-connexes, alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *l'est aussi.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**GH**, Prop. (4.8)]. □

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple et soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n$$

sa décomposition en produit d'algèbres de Lie simples. (On rappelle que les $\mathfrak{g}_i$ sont uniquement déterminées ; ce sont les idéaux non nuls minimaux de $\mathfrak{g}$).

Notons G le revêtement universel de $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$; alors on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},$$

la seconde égalité résultant du corollaire 3.6 plus haut. De plus, d'après le corollaire 2.91, G est l'unique groupe de Lie 1-connexe (à isomorphisme près) tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathfrak{g}$.

On obtient de même, pour chaque $\mathfrak{g}_i$, un unique groupe de Lie quasi-simple 1-connexe G_i tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_i) = \mathfrak{g}_i$. Alors, le groupe de Lie

$$\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_n$$

est 1-connexe, d'après la proposition 3.9, et son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.$$

Donc, par unicité, $\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_n \cong \mathrm{G}$. On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 3.10. — *L'application* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *établit une bijection :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{groupes de Lie semi-simples 1-connexes,} \\ \textit{à isomorphisme près} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}\textit{-algèbres de Lie semi-simples,} \\ \textit{à isomorphisme près} \end{array} \right\},$$

dont la bijection réciproque associe à $\mathfrak{g}$ *le revêtement universel de* $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$. *De plus, cette bijection induit une bijection entre groupes quasi-simples et algèbres de Lie simples, et préserve les produits.*

3.4. Intégration invariante et groupes de Lie compacts. — Soit G un groupe de Lie compact. On note $C^0(G) = C^0(G, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $G \to \mathbb{C}$. (Il contient bien entendu le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0(G, \mathbb{R})$ des fonctions continues $G \to \mathbb{R}$). Les actions de G sur lui-même par translations à gauche $\ell_g : h \mapsto gh$ et à droite $r_g : h \mapsto hg$, induisent deux actions *à gauche* de G sur $C^0(G)$, définies par :

$$(\lambda_g \phi)(h) = \phi(g^{-1}h), \qquad (\rho_g \phi)(h) = \phi(hg).$$

On aura besoin dans la suite de l'existence d'une « mesure de Haar sur G », c.-à-d., d'une forme linéaire

$$\Lambda : C^0(G) \longrightarrow \mathbb{C},$$

qui est *positive* et *invariante à gauche*, c.-à-d., qui vérifie, d'une part : si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ alors $\Lambda(f) \in \mathbb{R}^+$, et, d'autre part :

$$\forall\, h \in G, \qquad \Lambda(\lambda_h \phi) = \Lambda(\phi). \tag{1}$$

On notera $\Lambda(\phi) = \int_G f(g) dg$; alors (1) se récrit :

$$\forall\, h \in G, \qquad \int_G \phi(hg) dg = \int_G \phi(g) dg. \tag{2}$$

Ceci peut se démontrer de deux façons différentes. D'une part, par une approche d'analyse fonctionnelle, on peut montrer qu'une telle mesure de Haar invariante à gauche existe en fait sur tout groupe topologique compact G (pas nécessairement un groupe de Lie), voir par exemple [**Ru73**, Th. 5.14] ou le polycopié [**Po2**].

D'autre part, on peut développer une théorie de l'intégration sur une variété C^∞ M de dimension n, en termes de formes différentielles de degré n ; dans le cas où M = G est un groupe de Lie, on obtient une « intégrale invariante à gauche » en considérant des formes différentielles invariantes à gauche sur G. On renvoie pour cette approche aux références suivantes : [**Fa**, Chap. V], [**BtD**, § I.5], ou [**Wa**, Chap. 4].

Contentons-nous d'énoncer le résultat suivant (dont nous ne nous servirons que dans le cas où G est un groupe de Lie compact).

Soit G un groupe de Lie arbitraire. On note $C^0_c(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $\phi : G \to \mathbb{C}$ à *support compact*, c.-à-d., telles que $\phi(g) = 0$ pour tout g en dehors d'un certain compact K de G (dépendant de ϕ, évidemment). Il contient le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues à support compact $\phi : G \to \mathbb{R}$, et le cône des fonctions « positives », c.-à-d., à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On notera $\phi \geqslant 0$ pour dire que ϕ est une telle « fonction positive ». On dit qu'une forme linéaire $\Lambda : C^0_c(G) \to \mathbb{C}$ est *positive* si $\Lambda(\phi) \in \mathbb{R}^+$ pour tout $\phi \geqslant 0$.

Théorème 3.11 **(Mesure de Haar sur** G**).** — *Il existe une mesure de Haar invariante à gauche sur* G*, c.-à-d., une forme linéaire positive* $\mathrm{C}^0_c(\mathrm{G}) \to \mathbb{C}$*, notée*

$$\phi \mapsto \int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg,$$

qui est **invariante à gauche***, c.-à-d., qui vérifie*

$$\forall\, h \in \mathrm{G}, \qquad \int_{\mathrm{G}} \phi(hg)dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg;$$

une telle forme est unique à un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$ *près.*

Si G *est* **compact***, on normalise la mesure de Haar de façon unique en exigeant que*

$$\int_{\mathrm{G}} 1\, dg = 1$$

(*c.-à-d., que la mesure totale de* G *soit* 1). *Dans ce cas, la mesure de Haar est aussi* invariante à droite*, c.-à-d., pour* G **compact***, on a*

$$\forall\, h \in \mathrm{G}, \qquad \int_{\mathrm{G}} \phi(hg)dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg = \int_{\mathrm{G}} \phi(gh)dg.$$

Remarque 3.12. — On dit qu'un groupe de Lie est *unimodulaire* si « sa » mesure de Haar à gauche (unique à un scalaire près !) est aussi invariante à droite. On peut montrer que le groupe des matrices triangulaires dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ n'est pas unimodulaire, pour $n \geqslant 2$, voir [**Fa**, Chap. 5].

L'application principale aux groupes (de Lie) compacts est la suivante.

Proposition 3.13. — *Soient* G *un groupe compact,* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ *un morphisme de groupes continus. Alors il existe sur* V *un produit scalaire hilbertien* G*-invariant.*

Remarque 3.14. — On a le même énoncé, avec une démonstration analogue, en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ et « produit scalaire hilbertien » par « produit scalaire euclidien ».

Démonstration. — Choisissant une base de V, on identifie V à $\mathbb{C}^n$. On munit alors V du produit scalaire hermitien standard, qu'on note $\langle -, - \rangle$, c.-à-d.,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y_i}.$$

Pour $x, y \in \mathrm{V}$, l'application $g \mapsto \langle gx, gy \rangle$ est continue ; on pose

$$(x, y) = \int_{\mathrm{G}} \langle g^{-1}x, g^{-1}y \rangle dg.$$

Alors $(-,-)$ est une forme bilinéaire hermitienne symétrique, et est définie positive puisque pour $x \neq 0$ on a

$$(x,x) = \int_{\mathrm{G}} \langle g^{-1}x, g^{-1}x \rangle dg > 0.$$

Donc $(-,-)$ est un nouveau produit scalaire hilbertien sur V. De plus, il est G-invariant, par invariance de la mesure de Haar. En effet, pour $x, y \in \mathrm{V}$ fixés et $h \in \mathrm{G}$, on a

$$(h^{-1}x, h^{-1}y) = \int_{\mathrm{G}} \langle (hg)^{-1}x, (hg)^{-1}y \rangle dg = \int_{\mathrm{G}} \langle g^{-1}x, g^{-1}y \rangle dg = (x,y).$$

De plus, comme V est de dimension finie, la norme sur V définie par ce produit scalaire est équivalente à la norme initiale, et si W un sous-espace G-stable de V, alors l'application $\mathrm{G} \times \mathrm{W} \to \mathrm{W}$, obtenue par restriction, est continue. □

Théorème 3.15 **(Réductibilité complète pour les groupes compacts)**
Soient G *un groupe compact,* V *une représentation continue de* G *de dimension finie. Alors* V *est complètement réductible.*

Démonstration. — Soit $(-,-)$ un produit scalaire hilbertien G-invariant sur V. Soit W un sous-espace G-stable de V, de dimension minimale. Alors W est irréductible. De plus, on a une décomposition orthogonale, relativement à $(-,-)$:

$$(**) \qquad \mathrm{V} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{W}^{\perp},$$

et $\mathrm{W}^{\perp}$ est G-stable. En effet, si $x \in \mathrm{W}^{\perp}$ et $g \in \mathrm{G}$ alors, pour tout $v \in \mathrm{W}$, on a

$$(v, gx) = (g^{-1}v, x) = 0,$$

d'où $gx \in \mathrm{W}^{\perp}$. Alors, la restriction de $(-,-)$ à $\mathrm{W}^{\perp}$ est encore un produit scalaire hilbertien, G-invariant, et on peut répéter le processus. Comme V est de dimension finie, on obtient ainsi une décomposition en somme directe orthogonale de sous-modules irréductibles :

$$\mathrm{V} = \mathrm{W}_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{W}_2 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{W}_r.$$

Le théorème est démontré. □

Comme toute représentation continue de dimension finie d'un groupe de Lie est lisse (théorème 2.76), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.16. — *Soit* G *un groupe de Lie compact. Toute représentation lisse de dimension finie de* G *est somme directe de représentations lisses irréductibles.*

3.5. Groupes et algèbres de Lie semi-simples compacts. — Soient G un groupe de Lie compact connexe et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. D'après le théorème 3.15, la représentation adjointe est complètement réductible, donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathrm{G}} \bigoplus \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n, \tag{1}$$

où chaque $\mathfrak{g}_i$ est un idéal simple non abélien, donc une algèbre de Lie simple, et où $\mathfrak{g}^{\mathrm{G}}$ désigne le sous-module des invariants. De plus, on a $\mathfrak{g}^{\mathrm{G}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$; ceci résulte du théorème 2.74 ou directement de la décomposition (1). Posons

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

alors $\mathfrak{g}' = \mathscr{D}(\mathfrak{g}') = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, où $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre de Lie dérivée.

Pour tout $g \in \mathrm{G}$, notons $\mathrm{Ad}'(g)$ la restriction à $\mathfrak{g}'$ de $\mathrm{Ad}(g)$. Alors, relativement à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$, la matrice de $\mathrm{Ad}(g)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ad}'(g) \end{pmatrix}.$$

Donc la projection sur le bloc inférieur droit induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ad}'(\mathrm{G}),$$

et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}' = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = \mathrm{Z}(\mathrm{G})$, et $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

D'autre part, comme G est compact connexe, son image $\mathrm{Ad}'(\mathrm{G})$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}')$ et donc Ad' et sa différentielle ad' se factorisent comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{G} \to & \mathrm{Ad}'(\mathrm{G}) & \hookrightarrow \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}') \\ \mathfrak{g} \to & \mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}'(\mathrm{G})) & \hookrightarrow \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}') \cong \mathfrak{g}'. \end{array}$$

Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, et $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on obtient, par égalités des dimensions, que

$$\mathrm{ad}'(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}'(\mathrm{G})) = \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}') \cong \mathfrak{g}'.$$

Donc $\mathrm{Ad}(\mathrm{G}) \cong \mathrm{Ad}'(\mathrm{G})$ est un groupe de Lie compact connexe *semi-simple*, puisque son algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ est semi-simple. (De plus, $\mathrm{Ad}'(\mathrm{G}) = \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}')$, d'après le corollaire 2.59).

En conclusion, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Z}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Ad}(\mathrm{G}) \longrightarrow 1,$$

et $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}(\mathrm{G})) \cong \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est semi-simple. Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}(\mathrm{G}))$, on a l'équivalence des conditions suivantes :

1) G est semi-simple (c.-à-d., $\mathfrak{g}$ est semi-simple) ;

2) $\mathfrak{g} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$;

3) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$;

4) $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est discret, donc fini.

Pour plus de détails sur la structure des groupes de Lie compacts, voir [**BtD**, § V.8].

3.6. Algèbres de Lie semi-simples compactes. — Une conséquence de la proposition 3.13 est la suivante.

Proposition 3.17. — *Soit* G *un groupe de Lie semi-simple compact et soit* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. *Alors, la forme de Killing* $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *est définie négative.*

Démonstration. — Comme G est compact, il existe sur $\mathfrak{g}$ un produit scalaire euclidien G-invariant $(-,-)$. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a

$$(\mathrm{ad}(x)(y), z) = -(y, \mathrm{ad}(x)(z)).$$

Munissons $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ du produit scalaire hilbertien ϕ prolongeant $(-,-)$. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\phi(i\,\mathrm{ad}(x)(y), z) = i(\mathrm{ad}(x)(y), z) = -i(y, \mathrm{ad}(x)(z)) = \phi(y, i\,\mathrm{ad}(x)(z)).$$

Par conséquent, chaque $i\,\mathrm{ad}(x)$ est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (relativement à ϕ), donc est diagonalisable, avec des valeurs propres réelles. Donc, $\mathrm{ad}(x)^2$ est diagonalisable dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, avec des valeurs propres réelles $\leqslant 0$. Il en résulte que

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x, x) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathrm{ad}(x)^2)$$

est $\leqslant 0$. Comme $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée, puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on obtient donc que $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est définie négative. □

Définition 3.18. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple. On dit que $\mathfrak{g}$ est **compacte** si $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est définie négative.

Lemme 3.19. — *Soit* L *une algèbre de Lie de dimension finie. Sa forme de Killing* K *est invariante par tout automorphisme de* L.

Démonstration. — Soit ϕ un automorphisme de L. Alors, pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Z} \in \mathrm{L}$ on a $[\phi(\mathrm{X}), \phi(\mathrm{Z})] = \phi([\mathrm{X}, \mathrm{Z}])$, d'où

$$\mathrm{ad}\,\phi(\mathrm{X}) \circ \phi = \phi \circ \mathrm{ad}(\mathrm{X}), \qquad \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{L}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(\phi(\mathrm{X}), \phi(\mathrm{Y})) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{ad}\,\phi(\mathrm{X})\ \mathrm{ad}\,\phi(\mathrm{Y})) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}}(\phi \circ \mathrm{ad}(\mathrm{X}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \phi^{-1})\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{ad}(\mathrm{X})\,\mathrm{ad}(\mathrm{Y})) = \mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. □

Théorème 3.20. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple compacte. Écrivons*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

où chaque $\mathfrak{g}_i$ est simple. Alors, il existe un unique groupe de Lie compact semi-simple 1-connexe G *(resp.* G_i*) tel que* Lie(G) $= \mathfrak{g}$ *(resp.* Lie(G_i) $= \mathfrak{g}_i$*), et l'on a*

$$G \cong G_1 \times \cdots \times G_n.$$

Démonstration. — Chaque $K_{\mathfrak{g}_i}$ est la restriction à $\mathfrak{g}_i$ de $K_{\mathfrak{g}}$ donc est définie négative. Donc chaque $\mathfrak{g}_i$ est simple compacte.

Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $G_0 = \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, tel que $\mathrm{Lie}(G_0) = \mathfrak{g}$. De plus, d'après le lemme 3.19, G_0 préserve la forme de Killing $K_{\mathfrak{g}}$, qui est définie négative, donc G_0 est un sous-groupe fermé du groupe orthogonal $O(\mathfrak{g})$, qui est compact. Donc G_0 est compact et semi-simple. D'après le théorème 2.93, son revêtement universel G est encore compact semi-simple, et vérifie $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Il est unique pour cette propriété, d'après le corollaire 2.91.

De même, pour $k = 1, \dots, n$, il existe un unique groupe de Lie semi-simple compact 1-connexe G_k tel que $\mathrm{Lie}(G_k) = \mathfrak{g}_k$. Alors, le groupe de Lie

$$G_1 \times \cdots \times G_k$$

est semi-simple, compact et 1-connexe (d'après la proposition 3.9, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, donc il est isomorphe, par unicité, à G. Le théorème est démontré. □

On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 3.21. — *L'application* $G \mapsto \mathrm{Lie}(G)$ *établit une bijection :*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{groupes de Lie 1-connexes}\\ \textit{semi-simples compacts,}\\ \textit{à isomorphisme près}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathbb{R}\textit{-algèbres de Lie}\\ \textit{semi-simples compactes,}\\ \textit{à isomorphisme près}\end{array}\right\},$$

dont la bijection réciproque associe à $\mathfrak{g}$ le revêtement universel de $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$*. De plus, cette bijection induit une bijection entre groupes quasi-simples et algèbres de Lie simples, et préserve les produits.*

Remarque 3.22. — On va voir qu'il y a aussi une bijection :

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbb{R}\text{-algèbres de Lie semi-simples}\\ \text{compactes, à isomorphisme près}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathbb{C}\text{-algèbres de Lie semi-simples}\\ \text{complexes, à isomorphisme près}\end{array}\right\}.$$

Pour commencer, il faut étudier les liens entre $\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples et $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

3.7. Extension et restriction des scalaires. — Soient k un corps de caractéristique 0 et k'/k une extension de k (c.-à-d., k' est un corps contenant k). Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie n. On pose $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$; c'est une k'-algèbre de Lie de dimension n. On note K' sa forme de Killing, et K celle de $\mathfrak{g}$.

Lemme 3.23. — K *est la restriction à* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ *de* K'*, c.-à-d.,*

$$(*) \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{K}(x,y) = \mathrm{K}'(x,y),$$

et l'on a : K *est non dégénérée* $\Leftrightarrow$ K' *est non dégénérée.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur k ; c'est aussi une base de $\mathfrak{g}'$ sur k'. La matrice de K dans $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$\mathrm{A} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{K}) = (\mathrm{K}(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\,;$$

c'est aussi la matrice de K' dans $\mathscr{B}$. L'égalité $(*)$ en découle. De plus, on sait que K (resp. K') est non dégénérée si et seulement si A est inversible. Le lemme en résulte. □

Proposition 3.24. — $\mathfrak{g}$ *est semi-simple* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}'$ *est semi-simple.*

Démonstration. — Ceci résulte du critère de semi-simplicité de Cartan, cf. Théorème 3.4. □

Étudions maintenant la restriction des scalaires, de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

***Définition 3.25* (Restriction des scalaires)**. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbb{C}$. Alors, considérée comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension $2n$. On la note $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ et on dit qu'elle est obtenue à partir de $\mathfrak{g}$ par **restriction des scalaires** (de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$). Si on note K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, on notera $\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$ celle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.

Notation 3.26. — On note $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z, c.-à-d., on écrit

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z).$$

On désigne par $\overline{z}$ le conjugué de z, c.-à-d., $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.

Proposition 3.27. — *On a* $\mathrm{K}^{\mathbb{R}} = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}$*, c.-à-d.,*

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}, \qquad \mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x,y) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{K}(x,y)).$$

Donc, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{K} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$*. En particulier :* K *est non dégénérée* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$ *est non dégénérée.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$. Alors

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$$

est une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et soit A la matrice dans $\mathscr{B}$ du $\mathbb{C}$-endomorphisme $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$. Posons

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} + i\mathrm{C}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Alors $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$, considéré comme $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, a dans la base $\mathscr{B}_0$ la matrice suivante :

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & -\mathrm{C} \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que

$$\mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}_0) = 2\,\mathrm{Tr}(\mathrm{B}) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\mathrm{A})) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{K}(x, y)).$$

Ceci prouve la première assertion.

Ceci entraîne immédiatement que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{K} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$. Alors, pour tout $y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, on a

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, y)/2 = 0$$

et

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{K}(x, y) = -\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}(x, iy) = -\mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, iy)/2 = 0,$$

d'où $\mathrm{K}(x, y) = 0$, et donc $x \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}$. Ceci prouve la seconde assertion. La proposition est démontrée. □

***Définition 3.28* (Formes réelles)**. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie. Une **forme réelle** de $\mathfrak{g}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ telle que l'application naturelle

$$\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

soit **bijective**, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{g}_0$ est engendrée comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel par une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{g}$.

Exemple 3.29. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, avec la base standard

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $[\mathrm{E}, \mathrm{F}] = \mathrm{H}$ et $[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = 2\mathrm{E}$, $[\mathrm{H}, \mathrm{F}] = -2\mathrm{F}$. Alors $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, dont $(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F})$ est une $\mathbb{R}$-base, est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dans la base $(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F})$ on a :

$$\mathrm{ad}(\mathrm{E})\,\mathrm{ad}(\mathrm{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}(\mathrm{H})^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ a pour matrice dans la base $(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F})$ la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

elle est de signature $(2, 1)$, sa matrice dans la base $(\mathrm{E}+\mathrm{F})/2$, $\mathrm{H}/2$, $(\mathrm{E}-\mathrm{F})/2$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

D'autre part, posons $\mathrm{X} = \mathrm{E} - \mathrm{F}$, $\mathrm{H}' = i\mathrm{H}$, $\mathrm{Y} = i(\mathrm{E}+\mathrm{F})$. Alors $(\mathrm{X}, \mathrm{H}', \mathrm{Y})$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et l'on a :

$$[\mathrm{H}', \mathrm{X}] = 2\mathrm{Y}, \qquad [\mathrm{H}', \mathrm{Y}] = -2\mathrm{X}, \quad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 2\mathrm{H}'.$$

Donc $\mathbb{R}\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}\mathrm{H}' \oplus \mathbb{R}\mathrm{Y}$ est une autre forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, notée $\mathfrak{su}_2$.

Alors, $\mathrm{ad}(\mathrm{X})\,\mathrm{ad}(\mathrm{H}')$, $\mathrm{ad}(\mathrm{Y})\,\mathrm{ad}(\mathrm{H}')$ et $\mathrm{ad}(\mathrm{Y})\,\mathrm{ad}(\mathrm{X})$ sont de trace nulle, et le tableau ci-dessous décrit $\mathrm{ad}(\mathrm{X})^2$, etc.

	X	H'	Y
$\mathrm{ad}(\mathrm{X})^2$	0	$-4\mathrm{H}'$	$-4\mathrm{Y}$
$\mathrm{ad}(\mathrm{Y})^2$	$-4\mathrm{X}$	$-4\mathrm{H}'$	0
$\mathrm{ad}(\mathrm{H}')^2$	$-4\mathrm{X}$	0	$-4\mathrm{Y}$

Par conséquent, la forme de Killing de $\mathfrak{su}_2$ a pour matrice dans la base $(\mathrm{X}, \mathrm{H}', \mathrm{Y})$:

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} ;$$

elle est définie négative. En particulier, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}_2$ ne sont pas isomorphes (puisque leurs formes de Killing ont des signatures différentes).

Corollaire 3.30. — *Soient* $\mathfrak{g}_0$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (*resp. soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie et* $\mathfrak{g}_0$ *une forme réelle de* $\mathfrak{g}$). *On a les équivalences :*

$$\mathfrak{g}_0 \textit{ est semi-simple} \Leftrightarrow \mathfrak{g} \textit{ est semi-simple} \Leftrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \textit{ est semi-simple.}$$

Démonstration. — Ceci résulte des propositions 3.24 et 3.27. □

4. Formes réelles déployées ou bien compactes

On suppose connus les résultats et notations du cours d'Introduction sur les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples.

4.1. Bases de Chevalley. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ sa forme de Killing, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines, Δ une base de R et R^+ les racines positives correspondantes.

On va montrer d'abord qu'il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle toutes les constantes de structure sont des entiers. On en déduira ensuite une forme réelle compacte $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$.

Pour tout $\beta \in \mathrm{R}$, soit H_β l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que

$$\mathrm{K}(\mathrm{H}_\beta, h') = \beta(h'), \qquad \forall\, h' \in \mathfrak{h}, \tag{1}$$

et soit

$$h_\beta = \frac{2\mathrm{H}_\beta}{\mathrm{K}(\mathrm{H}_\beta, \mathrm{H}_\beta)}; \tag{2}$$

alors h_β est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que :

$$h_\beta \in [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}] \qquad \text{et} \qquad \beta(h_\beta) = 2. \tag{3}$$

Notons $\nu : \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ l'isomorphisme induit par K (en particulier, $\mathrm{H}_\beta = \nu^{-1}(\beta)$). On transporte K à $\mathfrak{h}^*$ via ν, c.-à-d., on pose

$$(\lambda, \mu) = \mathrm{K}(\nu^{-1}(\lambda), \nu^{-1}(\mu)), \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*. \tag{3}$$

En particulier, $(\beta, \beta) = \mathrm{K}(\mathrm{H}_\beta, \mathrm{H}_\beta)$. Posons

$$\beta^\vee = \frac{2\beta}{(\beta, \beta)},$$

alors, pour $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, on a

$$\alpha(\mathrm{H}_\beta) = \mathrm{K}(\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{H}_\beta) = (\alpha, \beta)$$

et donc

$$\alpha(h_\beta) = (\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Tout $\beta \in \mathrm{R}^+$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\beta,\alpha}\, \alpha, \qquad \text{avec} \quad n_{\beta,\alpha} \in \mathbb{N},$$

et donc

$$\beta^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\beta,\alpha} \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}\, \alpha^\vee. \tag{$5^\vee$}$$

On peut montrer que $\mathrm{R}^\vee := \{\beta^\vee \mid \beta \in \mathrm{R}\}$ est un système de racines (appelé le système de racines **dual**), et que $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ en est une base ; voir [**Hu**, Ex. 9.2 & 10.1] ou [**Se**, V, Prop. 2 & 7]. Par conséquent, les coefficients

$$m_{\alpha,\beta} := n_{\beta,\alpha} \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$$

appartiennent à $\mathbb{N}$. Transportant alors l'égalité ($5^\vee$) par l'isomorphisme linéaire $\nu^{-1} : \mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, on obtient, pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$:

$$h_\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m_{\beta,\alpha}\, h_\alpha, \qquad \text{avec} \quad m_{\beta,\alpha} \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Remarque 4.1. — Comme $h_\beta = 2\mathrm{H}_\beta/(\beta,\beta)$, on a

$$\mathrm{K}(h_\beta, h_\beta) = \frac{4}{(\beta,\beta)}.$$

On reviendra sur cette quantité dans la remarque 4.17 plus bas.

Définition 4.2. — Soit k un corps de caractéristique 0 (par exemple, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Un **réseau** de V est un sous-$\mathbb{Z}$-module L engendré par une base de V ; ceci équivaut à dire que le morphisme $\mathrm{L} \otimes_{\mathbb{Z}} k \to \mathrm{V}$ est bijectif.

On va maintenant construire un réseau $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de Lie, c.-à-d., une **$\mathbb{Z}$-forme** de $\mathfrak{g}$.

D'abord, $(h_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est une base de $\mathfrak{h}$. Considérons le réseau

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}h_\alpha; \tag{6}$$

il contient h_β pour tout $\beta \in \mathrm{R}$, d'après (5).

Pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$, soit X_β un élément non nul de $\mathfrak{g}_\beta$ et soit $\mathrm{X}_{-\beta}$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\beta}$ tel que

$$[\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_{-\beta}] = h_\beta. \tag{7}$$

Remarquons que si $(e_\beta, e_{-\beta}) \in \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{g}_{-\beta}$ est un autre couple tel que $[e_\beta, e_{-\beta}] = h_\beta$, alors

$$e_\beta = t_\beta \mathrm{X}_\beta \quad \text{et} \quad e_{-\beta} = t_\beta^{-1}\mathrm{X}_{-\beta}, \quad \text{pour un unique } t_\beta \in \mathbb{C}^*.$$

Définition 4.3. — Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, non proportionnelles. L'ensemble des racines de la forme $\beta + k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, s'appelle la **α-chaîne de** β (en anglais : "α-string through β").

Notation 4.4. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on pose

$$\mathfrak{sl}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$.

Lemme 4.5. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, non proportionnelles. Alors*

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid \beta + k\alpha \in \mathrm{R}\} \quad \textit{est un intervalle } [-r, q], \textit{ avec } r, q \in \mathbb{N},$$

c.-à-d., la α-chaîne de β est « sans trous » *. De plus, on a $\beta(h_\alpha) = r - q$. Plus précisément, le sous-espace*

$$\bigoplus_{k=-r}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$$

est un $\mathfrak{sl}_\alpha$-module simple.

Démonstration. — Ceci résulte du fait que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\dim \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha} \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si $\beta + i\alpha \in \mathrm{R}$, et de la structure des $\mathfrak{sl}_\alpha$-modules de dimension finie, cf. Cours d'Introduction Théorème 1.48. □

Pour $\alpha \neq \beta$ dans R, posons $\mathrm{N}_{\alpha,\beta} = 0$ si $\alpha + \beta \notin \mathrm{R}$ et

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \mathrm{N}_{\alpha,\beta}\,\mathrm{X}_{\alpha+\beta} \qquad \text{si} \quad \alpha + \beta \in \mathrm{R}. \tag{8}$$

Lemme 4.6. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, non proportionnelles et telles que $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$. Soit $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$ la α-chaîne de β. Alors :*

a) $(r + 1)\,(\beta, \beta) = q\,(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ *;*

b) $\mathrm{N}_{\alpha,\beta}\,\mathrm{N}_{-\alpha,-\beta} = -(r + 1)^2$.

Démonstration. — Pour a) voir [**Hu**, 25.1], et pour b) [**BL7-8**, § VIII.2, Lemme 4], en tenant compte du changement de signe induit par la convention (bizarre) $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -h_\alpha$ adoptée par Bourbaki dans le Lemme 2, qui entraîne un changement de signe dans le Lemme 3 et les égalités (4) et (5) du Lemme 4 . □

***Théorème 4.7* (Automorphisme de Chevalley)**. — *Il existe un unique automorphisme involutif τ de $\mathfrak{g}$ tel que*

$$\begin{cases} \tau(h) = -h, & \forall\, h \in \mathfrak{h}, \\ \tau(\mathrm{X}_\alpha) = -\mathrm{X}_{-\alpha}, & \forall\, \alpha \in \Delta, \end{cases}$$

et l'on a $\tau(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{-\beta}$ pour tout $\beta \in \mathrm{R}$.

Démonstration. — Posons $n = |\Delta| = \dim \mathfrak{h}$. D'après le cours d'Introduction, Théorème 12.8, $\mathfrak{g}$ est engendrée par les $3n$ éléments

$$(\mathrm{X}_\alpha, h_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha})_{\alpha\in\Delta},$$

soumis aux relations (1–3) décrites en *loc. cit.* Les éléments

$$(-\mathrm{X}_{-\alpha}, -h_\alpha, -\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\Delta},$$

satisfont aux mêmes relations, donc il existe un unique automorphisme τ de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions du théorème, et τ^2 laisse fixe le système de générateurs donc est l'identité. Enfin, pour tout $x \in \mathfrak{g}_\beta$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$[h, \tau(x)] = -[\tau(h), \tau(x)] = -\tau([h, x]) = -\beta(h)\tau(x),$$

et donc $\tau(x) \in \mathfrak{g}_{-\beta}$. Ceci prouve le théorème. Pour plus de détails, voir [**Se**, VI, §§ 4-5]. □

***Théorème 4.8* (Constantes de structure)**. — *Pour tout $\alpha \in \Delta$, fixons $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h_\alpha$. Alors, il existe des éléments $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, pour tout $\beta \in R$, uniques au signe près, tels que $[e_\beta, e_{-\beta}] = h_\beta$, $e_\alpha = X_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, et, chaque fois que $\beta, \gamma, \beta + \gamma \in R$:*

$$[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta,\gamma}\, e_{\beta+\gamma}, \qquad N_{-\beta,-\gamma} = -N_{\beta,\gamma}, \qquad N_{\beta,\gamma} = \pm(r+1),$$

où r est le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $\beta - r\gamma \in R$. Par conséquent,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} := \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \bigoplus \bigoplus_{\beta \in R} \mathbb{Z} e_\beta$$

est une $\mathbb{Z}$-forme de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., un réseau qui est stable par le crochet de Lie.

Démonstration. — Prenons $e_{\pm\alpha} = X_{\pm\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ et soit τ l'automorphisme de Chevalley tel que $\tau|_{\mathfrak{h}} = -\operatorname{id}_{\mathfrak{h}}$ et $\tau(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$.

Pour tout $\beta \in R^+$, on a $\tau(X_\beta) = c_\beta X_{-\beta}$, pour un unique $c_\beta \in \mathbb{C}^*$, et $c_\alpha = -1$ pour $\alpha \in \Delta$. Posons

$$e_\beta = t_\beta X_\beta \qquad \text{et} \qquad e_{-\beta} = t_\beta^{-1} X_{-\beta}.$$

Alors

$$\tau(e_\beta) = t_\beta\, \tau(X_\beta) = t_\beta c_\beta\, X_{-\beta} = t_\beta^2 c_\beta\, e_{-\beta}.$$

Par conséquent, $\tau(e_\beta) = -e_{-\beta}$ équivaut à $t_\beta^2 = -c_\beta^{-1}$, ce qui détermine uniquement t_β au signe près. (Pour $\alpha \in \Delta$, on prend $t_\alpha = 1$).

Pour tout $\beta, \gamma \in R$ tels que $\beta + \gamma \in R$, posons alors

$$[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta,\gamma}\, e_{\beta+\gamma}.$$

Appliquant τ, on obtient $N_{-\beta,-\gamma} = -N_{\beta,\gamma}$. D'après le point b) du lemme 4.6 on obtient alors que

$$N_{\alpha,\beta} = \pm(r+1).$$

Ceci prouve le théorème. □

Définition 4.9. — La base construite dans le théorème précédent est appelée une **base de Chevalley** de $\mathfrak{g}$.

4.2. Formes déployées. — On rappelle la définition ci-dessous, introduite dans la section 12 du cours d'Introduction.

***Définition 4.10* (Sous-algèbres de Cartan)**. — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple. Une **sous-algèbre de Cartan** est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_0$ qui est nilpotente et égale à son normalisateur.

Lemme 4.11. — *Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Alors*

1) *$\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.*

2) *Par conséquent,* $\mathfrak{h}_0$ *est abélienne, et toutes les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}_0$ *sont de même dimension* (*mais pas nécessairement conjuguées par un automorphisme de* $\mathfrak{g}_0$).

Démonstration. — On voit facilement que $\mathfrak{h}$ est nilpotente. Pour l'égalité

$$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathrm{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{h},$$

on renvoie à [**BL1**, § 3, no.8]. Donc, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Or, $\mathfrak{g}$ est semi-simple d'après la proposition 3.24. Alors, d'après le cours d'Introduction, section 12, $\mathfrak{h}$ est abélienne (Corollaire 12.6), donc $\mathfrak{h}_0$ l'est aussi ; et toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées (Théorème 12.5), donc ont la même dimension sur $\mathbb{C}$. Comme

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h},$$

il s'ensuit que toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont de même dimension. □

Définition 4.12 **(Sous-algèbres de Cartan déployantes)**. — Soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. On dit que $\mathfrak{h}_0$ est **déployante** si, pour tout $h \in \mathfrak{h}_0$, $\mathrm{ad}(h)$ est diagonalisable (et donc à valeurs propres réelles).

Exemple 4.13. — Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}_2$, cf. 3.29 plus haut. Alors $\mathbb{R}\mathrm{H}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, car $\mathbb{C}\mathrm{H}' = \mathbb{C}\mathrm{H}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Mais, comme $[\mathrm{H}', \mathrm{X}] = 2\mathrm{Y}$ et $[\mathrm{H}', \mathrm{Y}] = -2\mathrm{X}$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}(\mathrm{H}')$ sont 0 et $\pm 2i$, donc $\mathbb{R}\mathrm{H}'$ n'est pas déployante. En fait, on peut montrer que $\mathfrak{su}_2$ n'a pas de sous-algèbre de Cartan déployante.

Définition 4.14 **(Formes déployées)**. — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On dit que $\mathfrak{g}_0$ est **déployée**, ou une **forme déployée de** $\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}_0$ possède une sous-algèbre de Cartan déployante.

Théorème 4.15 **(Existence et unicité d'une forme déployée)**

Soit $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie semi-simple. Alors* $\mathfrak{g}$ *possède une* $\mathbb{R}$*-forme déployée, unique à isomorphisme près.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}$-forme construite dans le théorème 4.8. Alors

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} h_\alpha \bigoplus \bigoplus_{\beta \in \mathrm{R}} \mathbb{R} e_\beta$$

est une $\mathbb{R}$-forme déployée de $\mathfrak{g}$. (Et en fait, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ est une « $\mathbb{Z}$-forme déployée »). Ceci prouve l'existence.

L'unicité à isomorphisme près résulte du théorème 12.8 du cours d'Introduction, ou de sa variante pour les formes déployées. Pour cela, on renvoie à [**BL7-8**, § VI.4]. □

4.3. Formes compactes. — On va maintenant construire une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$. Pour $\beta \in \mathrm{R}^+$, posons

$$h'_\beta = ih_\beta, \qquad x_\beta = e_\beta - e_{-\beta}, \qquad y_\beta = i(e_\beta + e_{-\beta}).$$

Alors $(h'_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \cup (x_\beta, y_\beta)_{\beta\in\mathrm{R}^+}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{u}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré. On a

$$\begin{aligned}[x_\beta, y_\beta] &= 2h'_\beta\\ [h_\beta, x_\gamma] &= \gamma(h_\beta)\, y_\gamma\\ -[h_\beta, y_\gamma] &= \gamma(h_\beta)\, x_\gamma\end{aligned}$$

et, pour $\beta \neq \pm\gamma$,

$$\begin{aligned}[x_\beta, x_\gamma] &= \mathrm{N}_{\beta,\gamma}\, x_{\beta+\gamma} - \mathrm{N}_{\beta,-\gamma}\, x_{\beta-\gamma}\\ -[y_\beta, y_\gamma] &= \mathrm{N}_{\beta,\gamma}\, x_{\beta+\gamma} + \mathrm{N}_{\beta,-\gamma}\, x_{\beta-\gamma}\\ [x_\beta, y_\gamma] &= \mathrm{N}_{\beta,\gamma}\, y_{\beta+\gamma} + \mathrm{N}_{\beta,-\gamma}\, y_{\beta-\gamma}.\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{u}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathrm{K}_\mathfrak{u}$ sa forme de Killing. D'après le lemme 3.23, $\mathrm{K}_\mathfrak{u}$ est non dégénérée et est la restriction à $\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}$ de $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\mathfrak{g}$. Or

$$\mathrm{K}(h'_\alpha, h'_\alpha) = -\mathrm{K}(h_\alpha, h_\alpha) \in -\mathbb{Q}_+^*$$

$$\mathrm{K}(x_\beta, x_\beta) = \mathrm{K}(y_\beta, y_\beta) = -2\mathrm{K}(e_\beta, e_{-\beta}) = \frac{-4}{(\beta,\beta)} \in -\mathbb{Q}_+^*.$$

Il en résulte que $\mathrm{K}_\mathfrak{u}$ est définie négative. Donc $\mathfrak{u}$ est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$. On a donc obtenu le théorème d'existence ci-dessous. On verra plus loin que toutes les formes compactes de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes.

***Théorème 4.16* (Existence d'une forme compacte)**. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie semi-simple,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan,* $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *le système de racines,* Δ *une base de* R*, et soit*

$$(h_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \bigcup (e_\beta)_{\beta\in\mathrm{R}}$$

une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$*. Alors*

$$\mathfrak{u}_0 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}ih_\alpha \bigoplus \bigoplus_{\beta\in\mathrm{R}^+} (\mathbb{R}(e_\beta - e_{-\beta}) \oplus \mathbb{R}i(e_\beta + e_{-\beta}))$$

est une forme compacte de $\mathfrak{g}$*.*

Remarque 4.17. — Dans la discussion précédant le théorème, on a vu apparaître la quantité

$$2\mathrm{K}(e_\beta, e_{-\beta}) = \frac{4}{(\beta,\beta)} = \mathrm{K}(h_\beta, h_\beta),$$

cf. la remarque 4.1 plus haut. Comme $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ est une $\mathbb{Z}$-forme, cette quantité doit être un entier > 0. En fait, on peut voir que $\mathrm{K}(h_\beta, h_\beta)$ est un entier divisible par 4, et donc $1/(\beta,\beta) \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\beta \in \mathrm{R}$.

Pour chaque système de racines irréductible (c.-à-d., dont le diagramme de Dynkin est connexe), il y a au plus deux longeurs de racines ; lorsque c'est le cas, on parle de racines longues ou courtes. Lorsque toutes les racines ont la même longueur (c.-à-d., en type A-D-E), on convient que toutes les racines sont longues. Alors, on a le tableau suivant, où β_ℓ, resp. α_c, désigne une racine longue, resp. courte.

	$1/(\beta_\ell, \beta_\ell)$	$1/(\alpha_c, \alpha_c)$
A_{n-1}	n	–
B_n	$2n-1$	$4n-2$
C_n	$n+1$	$2(n+1)$
D_n	$2n-2$	–
E_6	12	–
E_7	18	–
E_8	30	–
F_4	9	18
G_2	4	12

4.4. Astuce unitaire de Weyl. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple. D'après le théorème 4.16, il existe une forme compacte $\mathfrak{u}_0$ de $\mathfrak{g}$ (et on verra plus bas que $\mathfrak{u}_0$ est unique à isomorphisme près).

D'après le théorème 3.20, il existe un groupe de Lie compact semi-simple 1-connexe G_0 tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_0) = \mathfrak{u}_0$. Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V ; notons ϕ_0 sa restriction à $\mathfrak{u}_0$. Comme G_0 est 1-connexe, il existe une représentation $\rho : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ telle que $d\rho = \phi$ (2.89).

D'après le théorème 3.15, ρ est complètement réductible. Donc

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{V}_n,$$

où chaque V_i est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel stable par $\rho(\mathrm{G}_0)$, irréductible comme G_0-module. Chaque V_i est irréductible comme $\mathfrak{u}_0$-module, car si W_i est un sous-$\mathfrak{u}_0$-module non nul de V_i, alors W_i est stable par G_0 (Théorème 2.74), donc $\mathrm{W}_i = \mathrm{V}_i$.

De plus, comme V_i est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel, il est stable par $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Donc chaque V_i est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V, irréductible puisqu'il l'est déjà comme $\mathfrak{g}_0$-module. On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 4.18 **(Weyl's unitarian trick)**. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple. Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.*

Remarque 4.19. — On dispose aussi de preuves algébriques de ce théorème, cf. le cours d'Introduction, Théorème 14.10 ; voir aussi [**BL1**, § 6.2] ou [**Hu**, § 6.3] pour une preuve similaire, ou [**Di74**, 1.6.3] et [**Va**, § 3.12-13] pour une preuve cohomologique.

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Dold] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer Classics in Mathematics, 1995.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Po2] P. Polo, Introduction aux groupes et algèbres de Lie, cours de M2 2006/07 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Spi] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish, 1970, 3rd edition 2005.

[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.