I. GROUPES DE LIE RÉELS (SUITE)

SEMAINE 4 : SÉANCES DU 29 ET 30/11/07

5. Involutions et décompositions de Cartan

5.1. Conjugaison par rapport à une forme réelle. —

Définition 5.1. — [8] Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie et soit $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ (ou, de façon équivalente, soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$). Alors,

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus i\mathfrak{g}_0$$

et l'on définit la **conjugaison par rapport à $\mathfrak{g}_0$** par

$$\sigma(\mathrm{X} + i\mathrm{Y}) = \mathrm{X} - i\mathrm{Y}, \qquad \forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}_0.$$

Alors $\sigma^2 = \mathrm{id}$, et σ est $\mathbb{R}$-linéaire et préserve le crochet de Lie, c.-à-d., c'est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. De plus, σ est $\mathbb{C}$-semi-linéaire, c.-à-d., pour tout $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}$, on a

$$\sigma(i\mathrm{Z}) = -i\sigma(\mathrm{Z}), \qquad \text{d'où} \quad \sigma(\lambda \mathrm{Z}) = \overline{\lambda}\mathrm{Z}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

On résume ces propriétés en disant que σ est une **involution semi-linéaire** de $\mathfrak{g}$.

Réciproquement, soit τ une telle involution semi-linéaire de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., un automorphisme involutif de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie qui vérifie $\tau \circ \mathrm{J} = -\mathrm{J} \circ \tau$, où J désigne l'opérateur de multiplication par i. Notons $\mathfrak{g}^{\tau}$ et $\mathfrak{g}^{\tau,-}$ les invariants et anti-invariants de τ, c.-à-d., les sous-espaces propres associés à la valeur propre 1, resp. -1. Alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\tau} \bigoplus \mathfrak{g}^{\tau,-},$$

et comme τ est un automorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, on a

$$[\mathfrak{g}^{\tau}, \mathfrak{g}^{\tau}] \subseteq \mathfrak{g}^{\tau}, \quad [\mathfrak{g}^{\tau,-}, \mathfrak{g}^{\tau,-}] \subseteq \mathfrak{g}^{\tau}, \quad [\mathfrak{g}^{\tau}, \mathfrak{g}^{\tau,-}] \subseteq \mathfrak{g}^{\tau,-}.$$

[8] version du 30/11/07

Donc $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}^\tau$ est une sous-algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^{\tau,-}$ est un $\mathfrak{g}_0$-module. De plus, comme $\tau i = -i\tau$, on voit facilement que la multiplication par i échange $\mathfrak{g}^\tau$ et $\mathfrak{g}^{\tau,-}$, c.-à-d., on a

$$\mathfrak{g}^{\tau,-} = i\mathfrak{g}_0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus i\mathfrak{g}_0.$$

Donc $\mathfrak{g}_0$ est une $\mathbb{R}$-forme de $\mathfrak{g}$ et τ est la conjugaison associée. En conclusion :

se donner une forme réelle de $\mathfrak{g}$ équivaut à
se donner une involution semi-linéaire de $\mathfrak{g}$.

Notation 5.2. — On note $\mathrm{Aut}_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes ($\mathbb{C}$-linéaires) de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{Aut}^0_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ sa composante connexe. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}_\mathbb{R}(\mathfrak{g}^\mathbb{R})$, resp. de $\mathrm{Aut}^0_\mathbb{R}(\mathfrak{g}^\mathbb{R})$.

Lemme 5.3. — *Soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ deux formes réelles de $\mathfrak{g}$, et soient τ_0, τ_1 les conjugaisons associées. Alors $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ sont isomorphes (comme $\mathbb{R}$-algèbres de Lie) si et seulement si τ_0 et τ_1 sont conjuguées sous* $\mathrm{Aut}_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$*, c.-à-d., s'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ tel que*

$$\phi \circ \tau_0 \circ \phi^{-1} = \tau_1.$$

Démonstration. — Supposons que $\psi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_1$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie. Alors ψ induit un $\mathbb{C}$-isomorphisme ϕ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_1 \oplus i\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}, \qquad x_0 + iy_0 \mapsto \psi(x_0) + i\psi(y_0),$$

et l'on a $\tau_1 = \phi \circ \tau_0 \circ \phi^{-1}$. Réciproquement, si $\phi \in \mathrm{Aut}_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ vérifie cette égalité, alors ϕ induit un $\mathbb{R}$-isomorphisme de $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\tau_0}$ sur $\mathfrak{g}^{\tau_1} = \mathfrak{g}_1$. Le lemme est démontré. □

***Proposition 5.4* (Involutions qui commutent)**. — *Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux formes réelles de $\mathfrak{g}$, et τ_1, τ_2 les conjugaisons associées. On a les équivalences :*

$$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 \Leftrightarrow \tau_1(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2 \Leftrightarrow \tau_2(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1.$$

Démonstration. — Si $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ alors τ_1 laisse stable les espaces propres de τ_2, d'où $\tau_1(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2$, et de même $\tau_2(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$.

Réciproquement, supposons que $\tau_1(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2$. Comme $\tau_1\tau_2$ et $\tau_2\tau_1$ sont $\mathbb{C}$-linéaires, il suffit de vérifier qu'ils coïncident sur $\mathfrak{g}_2$, puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$. Et comme $\mathfrak{g}_2$ est stable par τ_1, on a

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2^{\tau_1} \oplus \mathfrak{g}_2^{\tau_1,-}.$$

Sur $\mathfrak{g}_2^{\tau_1}$, on a $\tau_1\tau_2 = \mathrm{id} = \tau_2\tau_1$, et sur l'autre facteur on a

$$\tau_1\tau_2 = -\,\mathrm{id} = \tau_2\tau_1.$$

Ceci montre que τ_1 et τ_2 commutent. La proposition en découle. □

5.2. Existence d'une décomposition de Cartan. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-forme de $\mathfrak{g}$, et σ la conjugaison associée. On a vu (Théorème 4.16) que $\mathfrak{g}$ possède une forme compacte $\mathfrak{u}$. Notons τ la conjugaison associée.

Théorème 5.5. — *Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{u}$ deux $\mathbb{R}$-formes de $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{u}$* **compacte**. *Soient σ et τ les conjugaisons associées. Il existe $\phi \in \mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tel que*

$$\phi\tau\phi^{-1} \quad \text{commute à} \quad \sigma,$$

c.-à-d., tel que $\mathfrak{g}_0$ soit stable par $\phi\tau\phi^{-1}$, qui est la conjugaison par rapport à la forme compacte $\phi(\mathfrak{u})$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On pose, pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{X}, \tau(\mathrm{Y})).$$

Lemme 5.6. — K_τ *est une forme hermitienne définie positive.*

Démonstration. — Il est clair que K_τ est $\mathbb{C}$-linéaire (resp. semi-linéaire) en la première (resp. deuxième) variable. Montrons qu'elle vérifie la symétrie hermitienne, c.-à-d.,

$$\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{K}_\tau(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = \overline{\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}.$$

Posant $\mathrm{X} = \tau(\mathrm{Z})$ et utilisant la symétrie de K, ceci équivaut à l'égalité

$$\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Z} \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \overline{\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\tau(\mathrm{Y}), \tau(\mathrm{Z}))}.$$

Comme τ est $\mathbb{C}$-semi-linéaire, les deux termes sont des applications $\mathbb{C}$-bilinéaires, donc il suffit de vérifier l'égalité sur une base de $\mathfrak{g}$. Or, pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{u}$, on a $\tau(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$, $\tau(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$, et, d'après le lemme 3.23,

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \mathrm{K}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \in \mathbb{R},$$

d'où l'égalité désirée. Ceci prouve que K_τ est une forme hermitienne. Pour montrer qu'elle est définie positive, il suffit de montrer que $\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{X}) > 0$ lorsque X parcourt une base de $\mathfrak{g}$. Or, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{u}$, on a

$$\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) > 0,$$

puisque $\mathrm{K}_{\mathfrak{u}}$ est définie négative (car $\mathfrak{u}$ est une forme compacte). Le lemme est démontré. $\square$

Poursuivons la démonstration du théorème 5.5. Posons $\mathrm{N} = \sigma\tau$. Alors N est $\mathbb{C}$-linéaire et est donc un $\mathbb{C}$-automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, donc N fixe $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ (Lemme 3.19). Observons que $\mathrm{N}^{-1} = \tau\sigma$. Alors, pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{K}_\tau(\mathrm{NX}, \mathrm{Y}) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{NX}, \tau\mathrm{Y}) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{X}, \tau\sigma\tau\mathrm{Y}) = \mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{NY}).$$

Ceci montre que N est un opérateur auto-adjoint pour le produit scalaire hermitien K_τ. Par conséquent, N est diagonalisable, à valeurs propres réelles, non nulles puisque N est inversible.

Pour toute la suite, on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle N est diagonale, et l'on considérera des matrices relativement à cette base. Pour commencer, soit

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}^2,$$

c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels > 0. On peut donc considérer leur logarithme $\mu_i = \log(\lambda_i)$ et la matrice diagonale

$$\mathrm{D} := \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose alors $\lambda_i^t = \exp(t\mu_i)$ et

$$\mathrm{P}^t = \exp(t\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{P}^t\,\mathrm{N} = \mathrm{N}\,\mathrm{P}^t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme N appartient à $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, il en est de même de $\mathrm{P} = \mathrm{N}^2$. Montrons que $\mathrm{P}^t \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Écrivons $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{i,j;k}\, e_k$. Appliquant l'automorphisme P, on obtient les égalités

$$\forall\, i, j, k, \qquad (\lambda_i\lambda_j - \lambda_k)\, c_{i,j;k} = 0.$$

Donc, chaque fois que $c_{i,j;k} \neq 0$ on a $\lambda_i\lambda_j = \lambda_k$, d'où $\mu_i + \mu_j = \mu_k$ et donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_i^t\lambda_j^t\, c_{i,j;k} = \lambda_k^t\, c_{i,j;k},$$

et bien sûr cette égalité est aussi vérifiée lorsque $c_{i,j;k} = 0$. Ceci montre que P^t est un automorphisme de $\mathfrak{g}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose alors, pour tout t,

$$\tau_t = \mathrm{P}^t \circ \tau \circ \mathrm{P}^{-t};$$

c'est la conjugaison par rapport à la forme compacte $\mathrm{P}^t(\mathfrak{u})$. Montrons que, pour t bien choisi, τ_t commute à σ. Observons d'abord que

$$\tau\mathrm{N}\tau^{-1} = \tau\sigma = \mathrm{N}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \tau\mathrm{P}\tau^{-1} = \mathrm{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \tau\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\tau.$$

Par un calcul matriciel analogue au précédent (facile car P et P^t sont diagonales), on obtient que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \tau\mathrm{P}^t = \mathrm{P}^{-t}\tau.$$

Alors :

$$\begin{cases} \sigma\tau_t = \sigma\mathrm{P}^t\tau\mathrm{P}^{-t} = \mathrm{N}\mathrm{P}^{-2t}, \\ \tau_t\sigma = \mathrm{P}^t\tau\mathrm{P}^{-t}\sigma = \mathrm{P}^{2t}\mathrm{N}^{-1} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{P}^{2t}, \end{cases}$$

la dernière égalité résultant du fait que N^{-1} et P^{2t} sont diagonales, donc commutent. Donc, on voit que

$$\sigma\tau_t = \tau_t\sigma \Leftrightarrow \mathrm{N}^2 = \mathrm{P}^{4t},$$

et comme $\mathrm{N}^2 = \mathrm{P}$, cette égalité est vérifiée pour $t = 1/4$. Par conséquent, l'automorphisme $\phi = \mathrm{P}^{1/4} = \exp(\mathrm{D}/4)$ convient. Enfin, le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(t\mathrm{D}) = \mathrm{P}^t$ est à valeurs dans la composante connexe $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, donc $\phi \in \mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. Le théorème est démontré. $\square$

Définition 5.7. — Soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et σ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{g}_0$. D'après le théorème 5.5, il existe une forme réelle compacte $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la conjugaison associée τ commute à σ, et donc laisse stable $\mathfrak{g}_0$. On a donc :

$$(*) \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^{\tau} \oplus \mathfrak{g}_0^{\tau,-} = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}).$$

Alors $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_0$, et $\mathfrak{p} := \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$ est un $\mathfrak{k}$-module, et l'on a $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$. L'involution τ (= conjugaison par rapport à une forme compacte de $\mathfrak{g}$ qui laisse stable $\mathfrak{g}_0$), ou sa restriction $\tau|_{\mathfrak{g}_0}$ à $\mathfrak{g}_0$, s'appelle une **involution de Cartan** de $\mathfrak{g}_0$, et la décomposition associée

$$(*) \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0^{\tau} \oplus \mathfrak{g}_0^{\tau,-}$$

s'appelle une **décomposition de Cartan** de $\mathfrak{g}_0$. On va voir dans le paragraphe suivant qu'une involution (resp. décomposition) de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ est unique à conjugaison près.

5.3. Conjugaison des formes compactes et décompositions de Cartan.

5.3. Conjugaison des formes compactes et décompositions de Cartan. — Soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et σ la conjugaison associée.

Théorème 5.8. — 1) *Soient $\mathfrak{u}_1$ et $\mathfrak{u}_2$ deux formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$, et τ_1, τ_2 les conjugaisons associées. Il existe un sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \mathrm{P}^t$ de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tel que $\phi = \mathrm{P}^{1/4}$ envoie $\mathfrak{u}_2$ sur $\mathfrak{u}_1$. Par conséquent, toutes les formes compactes de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.*

2) *Si τ_1 et τ_2 commutent à σ, et définissent donc des décompositions de Cartan*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

où $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_r$ et $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{p}_r$ pour $r = 1, 2$, alors P^t stabilise $\mathfrak{g}_0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\phi = \mathrm{P}^{1/4}$ envoie $\mathfrak{k}_2$ sur $\mathfrak{k}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sur $\mathfrak{p}_1$. Par conséquent, toutes les décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0)$.

Démonstration. — 1) Appliquons le théorème 5.5 à $u = \mathfrak{u}_2$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_1$. Alors, posant

$$\mathrm{N} = \tau_1\tau_2, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{N}^2,$$

et introduisant comme précédemment le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \mathrm{P}^t$, on obtient, pour $\phi = \mathrm{P}^{1/4}$, que $\phi(\mathfrak{u}_2)$ est stable par τ_1, d'où

$$\phi(\mathfrak{u}_2) = (\phi(\mathfrak{u}_2) \cap \mathfrak{u}_1) \bigoplus (\phi(\mathfrak{u}_2) \cap i\mathfrak{u}_1)\,.$$

Or, $\mathfrak{u}_2$ et $\mathfrak{u}_1$ sont des formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$ et donc, pour $x \in \mathfrak{u}_2 \setminus \{0\}$ et $y \in \mathfrak{u}_1 \setminus \{0\}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(iy, iy) &= -\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(y, y) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{u}_1}(y, y) > 0 \\ \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(\phi(x), \phi(x)) &= \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x, x) = \mathrm{K}_{\mathfrak{u}_2}(x, x) < 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{u}_1 = (0)$, d'où $\phi(\mathfrak{u}_2) \subseteq \mathfrak{u}_1$. Comme ϕ est bijectif et $\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1$ ont même dimension sur $\mathbb{R}$ (à savoir $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$), on obtient

$$\phi(\mathfrak{u}_2) = \mathfrak{u}_1.$$

Ceci prouve 1).

2) Supposons de plus que τ_1 et τ_2 commutent à σ. Alors, il en est de même de $\mathrm{N} = \tau_1\tau_2$ et de $\mathrm{P} = \mathrm{N}^2$. Se plaçant dans une base où N, et donc P, est diagonale, l'égalité $\sigma\mathrm{P} = \mathrm{P}\sigma$ entraîne, par le même calcul que dans la preuve du théorème 5.5, que

$$\sigma\mathrm{P}^t = \mathrm{P}^t\sigma, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Donc chaque P^t laisse stable les espaces propres de σ, d'où $\mathrm{P}^t(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_0$ pour tout $t \in \mathfrak{g}_0$. Par conséquent, désignant par θ_t la restriction de P^t à $\mathfrak{g}_0$, on obtient un sous-groupe à un paramètre

$$t \mapsto \theta_t, \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0).$$

Posons $\psi = \theta_{1/4} = \mathrm{P}^{1/4}|_{\mathfrak{g}_0}$. Comme $\mathrm{P}^{1/4}$ applique bijectivement $\mathfrak{u}_2$ sur $\mathfrak{u}_1$ et $i\mathfrak{u}_2$ sur $i\mathfrak{u}_1$ (car chaque P^t est $\mathbb{C}$-linéaire), alors ψ est un élément de $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0)$ qui applique bijectivement $\mathfrak{k}_2$ sur $\mathfrak{k}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sur $\mathfrak{p}_1$. Le théorème est démontré. $\square$

5.4. Correspondance entre formes réelles et involutions de $\mathfrak{g}$. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines, Δ une base de R,

$$(h_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \bigcup (e_\beta)_{\beta\in\mathrm{R}}$$

une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{u}_0 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}ih_\alpha \bigoplus \bigoplus_{\beta\in\mathrm{R}^+} (\mathbb{R}(e_\beta - e_{-\beta}) \oplus \mathbb{R}i(e_\beta + e_{-\beta}))$$

la forme compacte de $\mathfrak{g}$ construite dans le théorème 4.16, et τ_0 la conjugaison associée.

Pour éviter des confusions dans ce qui suit, précisons la terminologie utilisée.

Définition 5.9. — 1) Une **involution** de $\mathfrak{u}_0$, resp. de $\mathfrak{g}$, est un élément σ de $\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$, resp. $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, tel que $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

2) On a vu (5.1) que se donner une forme réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ équivaut à se donner une involution σ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ qui est de plus $\mathbb{C}$-semilinéaire, c.-à-d., qui anticommute à la multiplication par i.

3) Nous dirons qu'une forme réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ est **compatible à** $\mathfrak{u}_0$ si la conjugaison associée σ commute à τ_0. D'après la proposition 5.4, ceci équivaut à dire que $\mathfrak{u}_0$ (resp. $\mathfrak{g}_0$) est stable par σ (resp. par τ_0), et dans ce cas

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0) \bigoplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}_0)$$

est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.

Observons que si $\mathfrak{g}_0$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, alors tout $\gamma \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0)$ se prolonge de façon unique en un automorphisme $\gamma_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$; par conséquent, on a une identification naturelle :

$$\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0) = \{\phi \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) \mid \phi(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0\}.$$

Ceci vaut, en particulier, pour $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0$. On note :

$$\{\text{involutions de } \mathfrak{u}_0\} \Big/ \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$$

l'ensemble des classes de conjugaison d'involutions dans $\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$, et l'on note de même $\{\text{formes réelles de } \mathfrak{g}\}/\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des classes de conjugaison sous $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ de formes réelles de $\mathfrak{g}$. Noter que $\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$ et $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ ne sont pas nécessairement connexes !

Théorème 5.10. — *On a des bijections*

$$\begin{tikzcd}
\{\textit{formes réelles de } \mathfrak{g}\}/\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) \arrow[r, leftrightarrow, "(*)"] & \left\{\begin{matrix}\textit{formes réelles de } \mathfrak{g} \\ \textit{compatibles à } \mathfrak{u}_0\end{matrix}\right\} \Big/ \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0) \arrow[dl, leftrightarrow, "(\dagger)"] \\
\{\textit{involutions de } \mathfrak{u}_0\}/\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0). &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — D'après le théorème 5.5, toute forme réelle de $\mathfrak{g}$ est conjuguée sous $\operatorname{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ à une forme réelle $\mathfrak{g}_1$ compatible à $\mathfrak{u}_0$. Soit $\mathfrak{g}_2$ une autre forme réelle compatible à $\mathfrak{u}_0$. Pour établir la bijection $(*)$, il faut voir que si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont conjuguées sous $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, alors elles le sont sous $\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$.

Supposons donc qu'il existe $\phi \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tel que $\phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_2 &= \ (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0) \ \bigoplus \ (\mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{u}_0) \\
&= \phi(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) \bigoplus \phi(\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{u}_0)
\end{aligned}$$

sont deux décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}_2$. Donc, d'après le théorème 5.8, il existe $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_2)$ tel que

$$\gamma\phi(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma\phi(\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{u}_0.$$

Alors $\psi := \gamma_{\mathbb{C}} \circ \phi$ appartient à $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ et vérifie :

$$\psi(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(i\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) = i\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0.$$

Comme on a, pour $k = 1, 2$,

$$\mathfrak{u}_0 = (\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{g}_k) \bigoplus (\mathfrak{u}_0 \cap i\mathfrak{g}_k),$$

il en résulte que $\psi(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0$, d'où $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$. Ceci prouve que $(*)$ est une bijection.

Définissons maintenant la correspondance (†). Soient $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ compatible à $\mathfrak{u}_0$ et σ la conjugaison associée. Alors σ laisse stable $\mathfrak{u}_0$, donc on peut lui associer sa restriction $s = \sigma|_{\mathfrak{u}_0}$. De plus, on a

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0) \bigoplus i(i\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0^s \bigoplus i\mathfrak{u}_0^{s,-}. \tag{1}$$

Réciproquement, soient s une involution de $\mathfrak{u}_0$ et

$$\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0^s \bigoplus \mathfrak{u}_0^{s,-} \tag{2}$$

la décomposition correspondante. Alors $\mathfrak{u}_0^s$ est une sous-algèbre, $\mathfrak{u}_0^{s,-}$ un $\mathfrak{u}_0^s$-module, et l'on a $[\mathfrak{u}_0^{s,-}, \mathfrak{u}_0^{s,-}] \subseteq \mathfrak{u}_0^s$. Par conséquent

$$\mathfrak{g}_0(s) := \mathfrak{u}_0^s \bigoplus i\mathfrak{u}_0^{s,-} \tag{3}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et c'en est une forme réelle. Notons σ la conjugaison associée ; alors $\sigma = 1$ sur $\mathfrak{g}_0(s)$ et $\sigma = -1$ sur $i\mathfrak{g}_0(s) = \mathfrak{u}_0^{s,-} \oplus i\mathfrak{u}_0^s$, donc $\sigma(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0$ et $\sigma|_{\mathfrak{u}_0} = s$. Ceci montre que les applications

$$\sigma \mapsto \sigma|_{\mathfrak{u}_0} \qquad \text{et} \qquad s \mapsto \mathfrak{g}_0(s)$$

sont des bijections réciproques. De plus, elles sont clairement équivariantes sous $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$, d'où la bijection (†). Ceci prouve le théorème. □

D'autre part, toute involution s de $\mathfrak{u}_0$ se prolonge en une involution $s_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$, et l'on a le théorème suivant, pour lequel on renvoie à [**Hel**, X.1.4].

Théorème 5.11. — *L'application $s \mapsto s_{\mathbb{C}}$ induit une bijection*

$$\{\textit{involutions de } \mathfrak{u}_0\}/\,\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0) \leftrightarrow \{\textit{involutions de } \mathfrak{g}\}/\,\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}).$$

Ces deux théorèmes ramènent la classification des formes réelles de $\mathfrak{g}$ à la question, purement algébrique, de la classification des classes de conjugaison d'involutions dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. Cette classification est faite dans [**Hel**, § X.5], voir aussi [**Ka**, Chap. 8]. On va donner sans démonstrations, dans le paragraphe 5.6 plus bas, la classification des $\mathbb{R}$-algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}_0$ de « type classique ».

5.5. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie absolument simples. — Commençons par le lemme suivant.

Lemme 5.12. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple. Alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. D'après le corollaire 3.30, on sait déjà que $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est semi-simple et l'idéal $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simples. On a donc

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \qquad \text{d'où} \quad \mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}].$$

Donc, tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{h}$ s'écrit $\mathrm{H} = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k]$, avec $\mathrm{X}_k \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Y}_k \in \mathfrak{h}$. Alors

$$i\mathrm{H} = \sum_{k=1}^{n} [i\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}.$$

Ceci montre que $\mathfrak{h}$ est stable par multiplication par i donc est un $\mathbb{C}$-idéal de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, il vient $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Ceci prouve que $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est simple. □

Donc, parmi les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie simples, on trouve les $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, pour $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple. Celles-ci sont caractérisées par les résultats suivants.

Lemme 5.13. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple. Alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, donc n'est pas simple. De plus, $\mathfrak{g}$ est uniquement déterminée par $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. — On a vu que $\mathfrak{g}$ admet au moins une forme réelle $\mathfrak{g}_0$, par exemple la forme déployée 4.8 (ou la forme compacte 4.16). Donc $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres), on obtient un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie :

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}.$$

Ceci prouve la première assertion. La deuxième découle de l'unicité des composantes simples d'une algèbre de Lie semi-simple (cf. Théorème 3.4). □

Définition 5.14. — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple. On dit que $\mathfrak{g}_0$ est **absolument simple** si $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie **simple**.

On vient de voir que si $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple, alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple mais **pas** absolument simple. Ceci caractérise les $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, d'après la proposition qui suit.

Lemme 5.15. — *Soient V_0 un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et τ la conjugaison par rapport à V_0. Soit W un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de V et soit $\mathrm{W}_0 = \mathrm{W} \cap \mathrm{V}_0$. Alors :*

$$\tau(\mathrm{W}) = \mathrm{W} \Leftrightarrow \mathrm{W} = \mathrm{W}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Démonstration. — L'implication $\Leftarrow$ est claire. D'autre part, l'application composée

$$\mathrm{W}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

est injective, donc il en est de même de f. Montrons que f est surjective si $\tau(\mathrm{W}) = \mathrm{W}$. Soit $x \in \mathrm{W}$. Comme W est τ-stable, alors

$$\mathrm{Re}(x) := \frac{x + \tau(x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(x) := i\frac{\tau(x) - x}{2} \quad \text{appartiennent à W,}$$

et sont fixés par τ, donc appartiennent à W_0, et l'on a

$$x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x) \in \mathrm{W}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Ceci montre que f est surjective. Le lemme est démontré. □

Proposition 5.16. — *Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ne soit pas simple. Alors*

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \times \mathfrak{s},$$

où $\mathfrak{s}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple uniquement déterminée, et $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$.

Démonstration. — Notons τ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{g}_0$. On sait déjà que $\mathfrak{g}$ est semi-simple (corollaire 3.30). Soit $\mathfrak{s}$ un idéal simple (non-abélien !) de $\mathfrak{g}$. Alors $\tau(\mathfrak{s})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, donc

$$\mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{s} + \tau(\mathfrak{s}).$$

sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ qui sont τ-stables, donc d'après le lemme 5.15 on a :

$$\mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad \mathfrak{s} + \tau(\mathfrak{s}) = \mathfrak{b}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

où $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0$ sont des idéaux de de $\mathfrak{g}_0$, nuls ou égaux à $\mathfrak{g}_0$ puisque $\mathfrak{g}_0$ est simple. Comme $\mathfrak{s} \neq 0$, on a $\mathfrak{b}_0 \neq 0$, d'où $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{g}_0$ et

(1) $$\mathfrak{s} + \tau(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}.$$

D'autre part, on ne peut avoir $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g}_0$, car sinon $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ serait contenue dans $\mathfrak{s}$, d'où $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$, contredisant la non-simplicité de $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{a}_0 = 0 = \mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s})$. Par conséquent, la somme (1) est une *somme directe*, et $[\mathfrak{s}, \tau(\mathfrak{s})]$ est nul, puisque contenu dans $\mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s}) = 0$. Donc, $\mathfrak{g}$ est le produit direct :

(2) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \tau(\mathfrak{s}).$$

Notons $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$ la projection sur le premier facteur ; c'est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie. Comme l'inclusion $\eta : \mathfrak{g}_0 \hookrightarrow \mathfrak{g}$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie, la composée

$$\phi = p \circ \eta : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{s}$$

est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie, de noyau $\mathfrak{g}_0 \cap \tau(\mathfrak{s})$. Ce noyau est nul, car si $X \in \mathfrak{g}_0 \cap \tau(\mathfrak{s})$, alors $X = \tau(X)$ appartient à $\tau(\mathfrak{s}) \cap \mathfrak{s} = 0$. Donc ϕ est injectif. Or, comme $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{s} = \dim_{\mathbb{R}} \tau(\mathfrak{s})$, il résulte de (2) que

$$2 \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{s} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 2 \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0,$$

d'où $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{s} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$. Par conséquent, ϕ est surjectif, donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}_0$ sur $\mathfrak{s}$. Alors, il résulte du lemme 5.13 que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{s} \times \mathfrak{s},$$

et $\mathfrak{s}$ est uniquement déterminée. La proposition est démontrée. □

En conclusion, on a obtenu le théorème suivant.

***Théorème 5.17* (L'alternative « complexe/absolument simple »)**
Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple. Alors, de deux choses l'une :

1) **ou bien** $\mathfrak{g}_0$ *est* complexe*, c.-à-d.,* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ *pour une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie simple, unique à isomorphisme près ;*

2) **ou bien** $\mathfrak{g}_0$ *est absolument simple, et donc* $\mathfrak{g}_0$ *est une* forme réelle *de la* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie simple* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

5.6. Aperçu de la classification. — Pour terminer, donnons un aperçu de la classification des $\mathbb{R}$-algèbres de Lie absolument simples classiques. Les références pour ce paragraphe sont [**Ti**, § IV.6.3], [**Hel**, § X.2] et [**Kna**, § I.8 & § I.17].

Soit $\mathbb{H}$ le corps (non-commutatif) des quaternions, il admet comme $\mathbb{R}$-base $(1, i, j, k)$, avec la table de multiplication suivante : $i^2 = -1 = j^2 = k^2$, et

$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik.$$

Le *centre* de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$. Pour tout $x = a + ib + jc + kd$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on pose

$$\overline{x} = a - ib - jc - jd.$$

Alors, $\tau : x \mapsto \overline{x}$ est une **anti-involution** de $\mathbb{H}$, c.-à-d., $\tau^2 = \mathrm{id}$ et

$$\forall\, x, y \in \mathbb{H}, \qquad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{H}$, on pose

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{x + \overline{x}}{2} \qquad \mathrm{Pu}(x) = \frac{x - \overline{x}}{2},$$

et l'on dit que x est un quaternion **pur** si $x = \mathrm{Pu}(x)$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on considère $\mathbb{H}^n$ comme un $\mathbb{H}$-espace vectoriel **à droite**, ceci afin de pouvoir écrire les endomorphismes à gauche. C.-à-d., notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, tout élément de $\mathbb{H}^n$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell \, x_\ell, \qquad \text{avec} \quad x_\ell \in \mathbb{H}.$$

Alors, $\mathrm{End}(\mathbb{H}^n)$ s'identifie à $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$, c.-à-d., un endomorphisme u est représenté par la matrice $(\alpha_{r,s})_{r,s=1}^{n}$, où

$$u(e_s) = \sum_{r=1}^{n} e_r \, \alpha_{r,s},$$

et l'on a

$$u(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ est $\mathbb{R}\mathrm{I}_n$, où I_n est la matrice identité. Ceci conduit à poser

$$(*) \qquad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H}) \mid \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\};$$

on a alors $\mathrm{M}_n(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\mathrm{I}_n \bigoplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$.

Pour toute anti-involution σ de $\mathbb{H}$, on a une notion de forme hermitienne ou anti-hermitienne sur $\mathbb{H}^n$ relativement à σ : c'est une application biadditive

$$\phi : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H},$$

qui vérifie $\phi(xt, yt') = \sigma(t)\phi(x, y)t'$, pour $x, y \in \mathbb{H}^n$ et $t, t' \in \mathbb{H}$, ainsi que l'une des propriétés de symétrie suivantes :

$$\phi(y, x) = \begin{cases} \sigma(\phi(x, y)) & \text{cas hermitien ;} \\ -\sigma(\phi(x, y)) & \text{cas anti-hermitien .} \end{cases}$$

On associe à ϕ sa matrice

$$\mathrm{J}(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(e_1, e_1) & \cdots & \phi(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(e_n, e_1) & \cdots & \phi(e_n, e_n) \end{pmatrix};$$

alors, si $x, y \in \mathbb{H}^n$ sont représentés, comme d'habitude, par des vecteurs colonnes X, Y, on a (où ${}^t\mathrm{M}$ désigne la transposée de M) :

$$\phi(x, y) = {}^t\sigma(\mathrm{X})\,\mathrm{J}(\phi)\,\mathrm{Y} = \sum_{r,s=1}^{n} \sigma(x_r)\,\phi(e_r, e_s)\,y_s.$$

La condition que ϕ soit hermitienne, resp. anti-hermitienne, équivaut à

$${}^t\sigma(\mathrm{J}) = \mathrm{J}, \qquad \text{resp.} \qquad {}^t\sigma(\mathrm{J}) = -\mathrm{J}.$$

À σ et ϕ, on associe le groupe

$$\mathrm{U}_\sigma(\phi) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n) \mid {}^t\sigma(\mathrm{A})\,\mathrm{J}\,\mathrm{A} = \mathrm{J}\}$$

et l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{su}_\sigma(\phi) = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) \mid {}^t\sigma(\mathrm{M})\,\mathrm{J} + \mathrm{J}\,\mathrm{M} = 0\}.$$

(En fait, notant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n)$, on a une identification

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\overline{\mathrm{B}} \\ \mathrm{B} & \overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \right\},$$

et l'on note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{4n}(\mathbb{R})$, et son algèbre de Lie est $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$. Les sous-groupes $\mathrm{U}_\sigma(\phi)$ sont automatiquement contenus dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ et donc leur algèbre de Lie dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$, ce qui explique la notation $\mathfrak{su}_\sigma(\phi)$.)

Il y a une notion de « similitude » entre formes hermitiennes ou anti-hermitiennes ; en particulier des formes similaires donnent des groupes et algèbres de Lie isomorphes. D'après [**Ti**, IV.6.3], les matrices suivantes forment un système complet de représentants des classes de similitudes de formes hermitiennes ou anti-hermitiennes, relativement à l'anti-involution $t \mapsto \bar{t}$ de $\mathbb{H}$:

$$\mathrm{F}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-r} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_r \end{pmatrix}, \ (r \geqslant 0,\ 2r \leqslant n) \qquad \mathrm{F}_\alpha = i\,\mathrm{I}_n$$

On obtient ainsi, d'une part, les groupes $\mathrm{U}(n, r, \mathbb{H})$ et algèbres de Lie $\mathfrak{su}(n, r, \mathbb{H})$, $r \geqslant 0$, $2r \leqslant n$, qui sont des formes réelles de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de type C_n, notée $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ dans le cours d'Introduction. La forme compacte est $\mathfrak{su}(n, 0, \mathbb{H})$, notée $\mathfrak{su}(n, \mathbb{H})$.

D'autre part, pour $n \geqslant 3$, on obtient le groupe $\mathrm{U}_\alpha(n, \mathbb{H})$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_\alpha(n, \mathbb{H})$ est une forme réelle de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de type D_n, notée $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.

À ces groupes et algèbres de Lie construits à l'aide des quaternions, il convient d'ajouter les groupes et algèbres de Lie « plus classiques » $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{SO}(p, q)$ et $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. En résumé, on obtient la table suivante, dans laquelle on a indiqué les noms qu'on trouve dans Tits [**Ti**] d'une part, ou dans Helgason [**Hel**] ou Knapp [**Kna**], d'autre part. Ces noms diffèrent pour les groupes liés aux quaternions, et aussi pour l'indice n ou $2n$ du groupe symplectique ; dans ces cas, on a donné les deux notations (T) et (H-K).

Pour chaque type, on a indiqué la forme déployée, la forme compacte, les autres formes, et des groupes de Lie associés. Pour les séries SO, on a répété la forme déployée parmi la liste des autres cas.

type		déployée	compacte	autres
A_{n-1}		$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(n)$	$\mathfrak{su}(p,q)$, $\mathfrak{sl}(n/2,\mathbb{H})$ (n pair)
A_{n-1}		$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{SU}(p,q)$ $\mathrm{SL}(n/2,\mathbb{H})$ (n pair)
B_n		$\mathfrak{so}(n+1,n)$	$\mathfrak{so}(2n+1)$	$\mathfrak{so}(p,q)$ ($p+q=2n+1$)
B_n		$\mathrm{SO}(n+1,n)$	$\mathrm{SO}(2n+1)$	$\mathrm{SO}(p,q)$ ($p+q=2n+1$)
C_n	(T)	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{su}(n,r,\mathbb{H})$
C_n	(T)	$\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$	$\mathrm{SU}(n,\mathbb{H})$	$\mathrm{SU}(n,r,\mathbb{H})$
C_n	(H-K)	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$
C_n	(H-K)	$\mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{SP}(n)$	$\mathrm{SP}(p,q)$
D_n	(T)	$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{su}_\alpha(n,\mathbb{H})$
D_n	(T)	$\mathrm{SO}(n,n)$	$\mathrm{SO}(2n)$	$\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{U}_\alpha(n,\mathbb{H})$
D_n	(H-K)	$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{so}^*(2n)$
D_n	(H-K)	$\mathrm{SO}(n,n)$	$\mathrm{SO}(2n)$	$\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.
[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.
[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.
[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.
[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.
[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.
[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.
[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.
[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.
[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.
[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.
[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.
[Dold] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer Classics in Mathematics, 1995.
[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.
[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po1] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Po2] P. Polo, Introduction aux groupes et algèbres de Lie, cours de M2 2006/07 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Spi] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish, 1970, 3rd edition 2005.

[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.