II. GROUPES ALGÉBRIQUES SUR $\mathbb{C}$

SEMAINE 5 : SÉANCES DU 7 ET 10/12/07

6. Variétés et groupes algébriques affines

[(9)] Dans cette section, le corps de base k est **algébriquement clos**, de caractéristique arbitraire. Plus loin, on prendra $k = \mathbb{C}$ afin de faire le lien avec les groupes de Lie.

6.1. Variétés algébriques affines : point de vue « concret ». —

Définition 6.1 **(Racine d'un idéal et anneaux réduits)**. — 1) Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. On pose

$$\sqrt{\mathrm{I}} := \{a \in \mathrm{A} \mid \exists\, n \geqslant 1 \text{ tel que } a^n \in \mathrm{I}\}.$$

On voit facilement que I est un idéal de A ; on l'appelle la **racine** (ou le radical) de I. Alors, $\sqrt{\mathrm{I}}/\mathrm{I}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau quotient A/I. En particulier, l'ensemble des éléments nilpotents de A est l'idéal $\sqrt{0}$.

2) On dit que A est un anneau **réduit** s'il n'a pas d'élément nilpotent non nul, c.-à-d., si $\sqrt{0} = (0)$. Pour cette raison, nous dirons que l'idéal I est **réduit** si $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}}$.

Remarque 6.2. — Si $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}}$, certains auteurs disent que I est un idéal *radiciel* ([**Die**, p.14]) ou *radical* ([**Pe**, I.4.5]).

Définition 6.3. — Une **sous-variété algébrique fermée** de k^n est un sous-ensemble de k^n défini par une collection arbitraire d'équations polynomiales, c.-à-d., un sous-ensemble de la forme :

$$\mathscr{V}(\mathrm{S}) = \{x \in k^n \mid \mathrm{P}(x) = 0,\ \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{S}\},$$

[(9)] version du 7/12/07

où S est une partie arbitraire de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Si on note I l'idéal engendré par S, on voit facilement que

$$\mathscr{V}(S) = \mathscr{V}(I) = \mathscr{V}(\sqrt{I}\,).$$

En particulier, comme tout idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est engendré par un nombre fini d'éléments, on voit que toute $\mathscr{V}(S)$ peut être définie par un nombre fini d'équations polynomiales.

Réciproquement, à tout sous-ensemble $V \subseteq k^n$ on associe l'idéal

$$\mathscr{I}(V) = \{\varphi \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \varphi(x) = 0, \quad \forall\, x \in V\}.$$

On voit facilement que $\mathscr{I}(V)$ est un idéal **réduit**, et que $V \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{I}(V))$.

Il est clair que les applications $I \mapsto \mathscr{V}(I)$ et $V \mapsto \mathscr{I}(V)$ sont décroissantes, c.-à-d., vérifient :

$$\begin{cases} I \subseteq J \;\Rightarrow\; \mathscr{V}(I) \supseteq \mathscr{V}(J); \\ V \subseteq W \Rightarrow \mathscr{I}(V) \supseteq \mathscr{I}(W). \end{cases} \tag{1}$$

De ceci, on déduit le lemme suivant.

Lemme 6.4. — $\mathscr{V}(\mathscr{I}(V))$ *est la plus petite sous-variété algébrique fermée de* k^n *contenant* V. *En particulier,* V *est une sous-variété algébrique fermée de* k^n *si et seulement si* $V = \mathscr{V}(\mathscr{I}(V))$.

Démonstration. — En effet, si $V \subseteq \mathscr{V}(J)$ alors J est contenu dans $\mathscr{I}(V)$, d'où

$$V \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{I}(V)) \subseteq \mathscr{V}(J).$$

Ceci prouve le lemme. □

***Définition 6.5* (L'algèbre $k[V]$)**. — À chaque sous-variété fermée $V \subseteq k^n$, on associe la k-algèbre réduite

$$k[V] = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathscr{I}(V).$$

On l'appelle l'algèbre des fonctions **régulières** (ou **polynomiales**) sur V.

***Définition 6.6* (Variétés irréductibles)**. — Une sous-variété algébrique fermée V de k^n est dite **irréductible** si elle n'est pas réunion de deux sous-variétés algébriques fermées strictement plus petites, c.-à-d., si la propriété suivante est vérifiée : si I, J sont deux idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $V = \mathscr{V}(I) \cup \mathscr{V}(J)$, alors $\mathscr{V}(I) = V$ ou $\mathscr{V}(J) = V$.

Proposition 6.7. — V *est irréductible* $\Leftrightarrow \mathscr{I}(V)$ *est premier.*

Démonstration. — Posons $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Supposons V irréductible et soient $f, g \in A$ tels que $f \notin \mathscr{I}(V)$ et $fg \in \mathscr{I}(V)$. Posant $I = \mathscr{I}(V) + Af$ et $J = \mathscr{I}(V) + Ag$, on a $V(I) \neq V$ (car sinon on aurait $f \in \mathscr{I}(V)$) et $V = V(I) \cup V(J)$ (car fg est nulle sur V). Comme V est irréductible, il vient $V(J) = V$ et donc $g \in \mathscr{I}(V)$. Ceci montre que $\mathscr{I}(V)$ est premier.

Réciproquement, supposons $\mathscr{I}(V)$ premier. Si V égale $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$, alors IJ est contenu dans $\mathscr{I}(V)$ et comme ce dernier est premier, il contient I ou J, et il en résulte que V est contenue dans, donc égale à, V(I) ou V(J). Ceci prouve que V est irréductible. □

***Définition 6.8* (Morphismes et comorphismes).** — Soit V, resp. W, une sous-variété algébrique fermée de k^n, resp. k^r.

1) Un **morphisme** de sous-variétés algébriques fermées $\phi : V \to W$ est :

$$(0) \qquad \begin{cases} \text{un } r\text{-uplet } (P_1, \ldots, P_r) \text{ d'éléments de } k[X_1, \ldots, X_n], \text{ tel que} \\ \qquad \phi(x) := (P_1(x), \ldots, P_r(x)) \in W, \qquad \forall\, x \in V. \end{cases}$$

Soient $\mathscr{I}(V)$ l'idéal des polynômes nuls sur V et $k[V] = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathscr{I}(V)$ l'algèbre des fonctions régulières sur V. Alors chaque fonction $P_i(x)$ ne dépend que de l'image ϕ_i de P_i dans $k[V]$. Par conséquent, on peut reformuler la définition en disant qu'un morphisme $\phi : V \to W$ est :

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{un } r\text{-uplet } \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r) \text{ d'éléments de } k[V], \text{ tel que} \\ \qquad \phi(x) := (\phi_1(x), \ldots, \phi_r(x)) \in W, \qquad \forall\, x \in V. \end{cases}$$

On notera $\mathrm{Hom}_{\text{ss-var}}(V, W)$ l'ensemble de ces morphismes.

2) Soit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)$ comme ci-dessus. Notons

$$\phi^* : k[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow k[V]$$

le morphisme de k-algèbres défini par $\phi^*(X_i) = \phi_i$, pour $i = 1, \ldots, r$, c.-à-d.,

$$(2) \qquad \phi^*(Q) = Q(\phi_1, \ldots, \phi_r) = Q \circ \phi, \qquad \forall\, Q \in k[X_1, \ldots, X_r].$$

On observe alors que la condition (1) s'écrit :

$$\phi^*(Q)(x) = 0, \qquad \forall\, x \in V, \forall\, Q \in \mathscr{I}(W),$$

et ceci équivaut à $\phi^*(\mathscr{I}(W)) = 0$. Par conséquent, ϕ^* se factorise en un morphisme de k-algèbres $k[W] \to k[V]$, qu'on notera encore ϕ^*. On l'appelle le **comorphisme** de ϕ.

3) Un morphisme $\phi : V \to W$ est un isomorphisme s'il existe un morphisme $\tau : W \to V$ tel que $\tau \circ \phi = \mathrm{id}_V$ et $\phi \circ \tau = \mathrm{id}_W$.

Lemme 6.9. — *Soient* $X \subseteq k^n$ *et* $Y \subseteq k^r$ *des sous-variétés algébriques fermées,* $\phi : X \to Y$ *un morphisme.*

1) *Si* Z *est une sous-variété algébrique fermée de* k^r *contenant* $\phi(\mathrm{X})$*, alors* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *est un morphisme.*

2) *En particulier, posons* $\overline{\phi(\mathrm{X})} = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\phi(\mathrm{X})))$*, cf.* 6.4*. Alors*

$$\phi : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\phi(\mathrm{X})}$$

est un morphisme.

3) *On a* $\mathscr{I}(\phi(\mathrm{X})) = \operatorname{Ker}\phi^*$ *et la factorisation* $\mathrm{X} \xrightarrow{\phi} \overline{\phi(\mathrm{X})} \subseteq \mathrm{Y}$ *correspond à la factorisation suivante de* ϕ^* *:*

$$k[\mathrm{Y}] \twoheadrightarrow \frac{k[\mathrm{Y}]}{\operatorname{Ker}\phi^*} \hookrightarrow k[\mathrm{X}].$$

Démonstration. — 1) est une conséquence immédiate de la définition des morphismes, et 2) en est un cas particulier. (Noter que $\phi(\mathrm{X})$ n'est pas nécessairement une sous-variété algébrique fermée !)

Démontrons le point 3). D'abord, $\mathscr{I}(\phi(\mathrm{X}))$ est l'ensemble des $f \in k[\mathrm{Y}]$ telles que $f(\phi(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, c.-à-d., telles que $0 = f \circ \phi = \phi^*(f)$. Ceci montre que $\mathscr{I}(\phi(\mathrm{X})) = \operatorname{Ker}\phi^*$. La dernière assertion est alors claire. □

Définition 6.10. — Soient V, Z des sous-variétés algébriques fermées de k^n. Si $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{V}$, on dit que Z est une **sous-variété** (algébrique) **fermée de** V ; dans ce cas, l'inclusion $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathrm{V}$ est un morphisme.

La proposition suivante sera très utile plus loin.

Proposition 6.11. — *Soit* $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *une application ensembliste quelconque. Alors* ϕ *est un morphisme si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :*

$$(*) \qquad \forall\, f \in k[\mathrm{W}], \qquad \phi \circ f \in k[\mathrm{V}].$$

Démonstration. — On vient de voir que si ϕ est un morphisme, alors $\phi^* : f \mapsto \phi \circ f$ est un morphisme d'algèbres de $k[\mathrm{W}]$ vers $k[\mathrm{V}]$. Réciproquement, supposons $(*)$ vérifiée. Notons π la projection $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r] \to k[\mathrm{W}]$. Appliquant $(*)$ à chaque $\pi(\mathrm{X}_i)$, on obtient que les composantes $\phi_1, \ldots, \phi_r$ sont des éléments de $k[\mathrm{V}]$. Ceci montre que ϕ est un morphisme. La proposition est démontrée. □

Remarque 6.12. — Il est clair que id_{V} est un morphisme, et que la composée de deux morphismes est un morphisme. On obtient donc ainsi une catégorie, appelée la catégorie des *ensembles algébriques affines* (cf. [**Pe**, I.6.2]).

Lemme 6.13. — *Soit* V*, resp.* W, Z *une sous-variété algébrique fermée de* k^n*, resp.* k^r, k^p*, et soient* $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *et* $\psi : \mathrm{W} \to \mathrm{Z}$ *des morphismes. On a* $\mathrm{id}_{\mathrm{V}}^* = \mathrm{id}_{k[\mathrm{V}]}$ *et*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

Démonstration. — D'après la définition 6.8, on a $\mathrm{id}_{\mathrm{V}}^* = \mathrm{id}_{k[\mathrm{V}]}$ et, pour tout $f \in k[\mathrm{Z}]$,

$$(\psi \circ \phi)^*(f) = f \circ \psi \circ \phi = \phi^*(f \circ \psi) = (\phi^*(\psi^*(f)).$$

Le lemme en découle. □

***Proposition 6.14* (Produits).** — *Soit* V*, resp.* W*, une sous-variété algébrique fermée de* k^n*, resp.* k^p*.*

(a) $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ *est une sous-variété algébrique fermée de* k^{n+p} *et*

$$k[\mathrm{V} \times \mathrm{W}] \cong k[\mathrm{V}] \otimes_k k[\mathrm{W}].$$

(b) *Si* V'*, resp.* W'*, est une sous-variété fermée de* V*, resp.* W*, alors* $\mathrm{V}' \times \mathrm{W}'$ *est une sous-variété fermée de* $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$*.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{R} = k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$, $\mathrm{S} = k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p]$, et

$$\mathrm{J} = \mathrm{R} \otimes \mathscr{I}(\mathrm{Y}) + \mathscr{I}(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{S}.$$

Il est clair que $\mathrm{V} \times \mathrm{W} \subseteq \mathscr{V}(\mathrm{J})$. Réciproquement, si $(x, y) \in k^n \times k^p$ appartient à $\mathscr{V}(\mathrm{J})$, alors $\mathrm{P}(x) = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathscr{V}(\mathrm{V})$, d'où $x \in \mathrm{V}$, et de même $y \in \mathrm{W}$. Donc $\mathrm{V} \times \mathrm{W} = \mathscr{V}(\mathrm{J})$, ce qui prouve la première assertion de (a).

Comme

$$k[\mathrm{V}] \otimes_k k[\mathrm{W}] \cong (\mathrm{R} \otimes \mathrm{S})/\mathrm{J},$$

la deuxième assertion résultera de l'égalité $\mathrm{J} = \mathscr{I}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$. On vient de voir l'inclusion $\subseteq$; montrons l'inclusion réciproque.

Soit F, resp. G, un supplémentaire de $\mathscr{I}(\mathrm{X})$ dans R, resp. de $\mathscr{I}(\mathrm{Y})$ dans S. Alors $\mathrm{R} \otimes \mathrm{S} = \mathrm{J} \oplus (\mathrm{F} \otimes \mathrm{G})$. Supposons l'inclusion $\mathrm{J} \subseteq \mathscr{I}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ stricte ; alors $\mathscr{I}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ contient un élément non nul $\phi \in \mathrm{F} \otimes \mathrm{G}$. On peut écrire ϕ comme une somme finie $\sum_i f_i \otimes g_i$, où les $g_i \in \mathrm{G}$ sont linéairement indépendants, et où chaque $f_i \in \mathrm{F}$ est non nulle. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, la fonction

$$y \mapsto \phi(x, y) = \sum_i f_i(x) g_i(y)$$

est identiquement nulle sur Y. L'hypothèse sur les g_i entraîne donc que chaque f_i est nulle sur X, donc nulle puisque $\mathrm{F} \cap \mathscr{I}(\mathrm{X}) = (0)$. Ceci contredit l'hypothèse $\phi \neq 0$, et cette contradiction montre que $\mathrm{J} = \mathscr{I}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$. Ceci achève la preuve de (a). Le point (b) en découle, en utilisant le lemme 6.9. □

***Définition 6.15*.** — On appellera **variété algébrique affine** sur k toute sous-variété algébrique fermée de k^n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Si V et W sont des variétés algébriques affines et si $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un morphisme au sens de la définition 6.8 on dira simplement, pour abréger, que ϕ est un **morphisme de variétés**.

6.2. Groupes algébriques affines. —

Définition 6.16. — 1) Un **groupe algébrique affine** sur k est une variété algébrique affine G sur k, munie d'une structure de groupe telle que les applications $\mu : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(x,y)\mapsto xy$, et $\kappa : \mathrm{G}\to\mathrm{G}$, $x\mapsto x^{-1}$ soient des morphismes de variétés.

2) Un **morphisme de groupes algébriques** $\phi : \mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ est un morphisme de variétés qui est aussi un morphisme de groupes. C'est un isomorphisme s'il existe un morphisme de groupes algébriques $\psi : \mathrm{G}'\to\mathrm{G}$ tel que $\psi\circ\phi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ et $\phi\circ\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}'}$.

Remarque 6.17. — On introduira plus loin les variétés algébriques sur k arbitraires, c.-à-d., non nécessairement affines. On peut donc, de même, introduire la notion de groupe algébrique sur k, non nécessairement affine. Dans ce cours, on se limitera exclusivement aux groupes algébriques *affines*.

Lemme 6.18. — *Soit* G *un groupe algébrique affine et* H *une sous-variété algébrique fermée de* G *qui est un sous-groupe. Alors* H *est un groupe algébrique affine. On dira simplement que* H *est un* **sous-groupe fermé** *de* G.

Démonstration. — Par hypothèse, H est une sous-variété algébrique fermée de G et, d'après le lemme 6.9, la restriction μ_{H} de μ_{G} à H est un morphisme de $\mathrm{H}\times\mathrm{H}$ dans H. De même, le passage à l'inverse κ_{H} est un morphisme $\mathrm{H}\to\mathrm{H}$. Ceci montre que H est un groupe algébrique, et l'inclusion $\mathrm{H}\subseteq\mathrm{G}$ est un morphisme de groupes algébriques. □

Exemples 6.19. — **1)** Le groupe additif $\mathbb{G}_a = (k,+)$. Il est clair que $\mu : (x,y)\mapsto x+y$ et $\kappa : x\mapsto -x$ sont des morphismes.

4) [10] Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(k) = \{\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(k) \mid \text{dét}\,\mathrm{A} = 1\}$. La multiplication est un morphisme, car $(\mathrm{AB})_{i,j} = \sum_{m=1}^{n}\mathrm{A}_{i,m}\mathrm{B}_{m,j}$; le passage à l'inverse aussi, car $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{C}(\mathrm{A})$, où ${}^t\mathrm{C}(\mathrm{A})$ désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

5) Le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes : $\mathrm{U}_n(k) = \{\mathrm{A}\in\mathrm{SL}_n(k) \mid \mathrm{A}_{i,j} = 0,\ \forall\, i>j,\quad \mathrm{A}_{i,i} = 1,\ \forall\, i = 1,\dots,n\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}_n(k)$.

6.3. Théorème des zéros et premières conséquences. — On a vu au paragraphe précédent qu'il est trop restrictif de se limiter à considérer des sous-variétés algébriques fermées de k^n, car ceci ne permet pas (en tout cas, pas de façon immédiate) de considérer le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*,\times)$ comme

[10] Ce n'est pas une erreur de numérotation ! Il manque les exemples 2) et 3) de $\mathbb{G}_m = (k^*,\times)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$, dont on ne peut pas encore dire que ce sont des variétés algébriques affines.

un groupe algébrique sur $\mathbb{C}$. Pour pallier à cela, il faut s'autoriser une définition plus souple (et plus intrinsèque) des variétés algébriques affines.

Commençons par rappeler le théorème des zéros de Hilbert. Tout $x \in k^n$ définit un morphisme de k-algèbres, l'évaluation en x,

$$\varepsilon_x : k[\mathrm{X}_1 \ldots, \mathrm{X}_n] \longrightarrow k, \quad f \mapsto f(x).$$

On note $\mathfrak{m}_x$ son noyau ; c'est l'idéal maximal engendré par $\mathrm{X}_1 - x_1, \cdots, \mathrm{X}_n - x_n$. Les $\mathfrak{m}_x$ sont deux à deux distincts puisque, par exemple, $\mathscr{V}(\mathfrak{m}_x) = \{x\}$. Si I est un idéal de $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, on observe que

$$\mathrm{I} \subseteq \mathfrak{m}_x \Leftrightarrow x \in \mathscr{V}(\mathrm{I}).$$

Pour toute k-algèbre A, on notera Max(A), resp. Spec(A), l'ensemble de ses idéaux maximaux, resp. premiers.

***Théorème 6.20* (Théorème des zéros de Hilbert).** — (*k algébriquement clos*)

1) *Soit* I *un idéal quelconque de* $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ *et soit* $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathrm{I})$. *L'application*

$$\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Max}(k[\mathrm{V}]), \quad x \mapsto \frac{\mathfrak{m}_x}{\mathscr{I}(\mathrm{V})}$$

est une bijection, et l'on a $\mathscr{I}(\mathrm{V}) = \sqrt{\mathrm{I}}$.

2) *Par conséquent, on a des bijections réciproques*

$$\{\text{Idéaux réduits de } k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]\} \underset{\mathscr{I}}{\overset{\mathscr{V}}{\rightleftarrows}} \{\text{Sous-var. algébriques fermées de } k^n\}.$$

Dans cette correspondance, les sous-variétés irréductibles correspondent aux idéaux premiers.

Démonstration. — Pour le point 1), voir, par exemple, l'une des références suivantes. En français : [**BrM**, Thm. VI.2.19], [**Die**, (A,37)], [**Pe**, § I.4], ou [**Po1**, Chap. V], ou en anglais : [**Ku**, § I.3], [**Ma1**, (14.L)], [**Ma2**, Chap. 2, § 5].

Démontrons le point 2). Si V est une sous-variété algébrique fermée de k^n, on a déjà vu que $\mathscr{I}(\mathrm{V})$ est réduit et que $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{V}))$. Réciproquement, si I est un idéal réduit, 1) entraîne que $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}} = \mathscr{I}(\mathscr{V}(\mathrm{I}))$. Ceci prouve la première assertion de 2). La seconde en découle, d'après la proposition 6.7. □

***Proposition 6.21*.** — 1) *L'application* $\phi \mapsto \phi^*$ *est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\textit{ss-var}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \cong \mathrm{Hom}_{\textit{k-alg}}(k[\mathrm{W}], k[\mathrm{V}]).$$

2) *En particulier, un morphisme* $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *est un isomorphisme si et seulement si son comorphisme* $\phi^* : k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$ *est un isomorphisme de k-algèbres.*

Démonstration. — 1) L'application $\phi \mapsto \phi^*$ est injective, puisque $\phi_i = \phi^*(\mathrm{X}_i)$ pour $i = 1, \dots, r$.

Réciproquement, soit $\psi : k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$ un morphisme de k-algèbres. Notons π la projection $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r] \to k[\mathrm{W}]$ et posons $\phi_i = (\psi \circ \pi)(\mathrm{X}_i)$, pour $i = 1, \dots, r$. Alors, le morphisme de k-algèbres $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r] \to k[\mathrm{W}]$ défini par le r-uplet $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ n'est autre que $\psi \circ \pi$, qui se factorise en $\psi : k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$. D'après la proposition 6.11, ceci montre que ϕ est un morphisme de V vers W dont le comorphisme est ψ. Ceci prouve le point 1).

2) Le lemme 6.13 entraîne facilement que si ϕ est un isomorphisme, il en est de même de ϕ^*. Réciproquement, supposons que ϕ^* soit un isomorphisme, d'inverse ψ. D'après le point 1), il existe un (unique) morphisme $\tau : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ tel que $\psi = \tau^*$, et l'égalité

$$(\tau \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi = \mathrm{id}_{k[\mathrm{V}]} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}^*$$

entraîne, d'après 1) à nouveau, que $\tau \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. On obtient de même que $\phi \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$. Ceci prouve que τ est l'inverse de ϕ. La proposition est démontrée. □

Remarque 6.22. — **Attention !** Soit $\mathrm{V} = \mathscr{V}(x^3 - y^2) \subset k^2$. Le morphisme $\phi : k \to \mathrm{V}, t \mapsto (t^2, t^3)$ est bijectif, mais n'est pas un isomorphisme puisque son comorphisme est l'inclusion $k[\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3] \subset k[\mathrm{T}]$ qui n'est pas surjective.

Remarque 6.23. — a) Il résulte du lemme 6.13 que la correspondance $\mathrm{V} \mapsto k[\mathrm{V}]$ définit un foncteur **contravariant** de la catégorie des variétés algébriques affines vers celle des k-algèbres de type fini réduites (dont les morphismes sont les morphismes de k-algèbres). Suivant [**Pe**], nous noterons Γ ce foncteur.

b) Alors, le point 1) de la proposition 6.21 signifie que le foncteur Γ est **pleinement fidèle** (on renvoie à [**Laf74**, § I.1] pour une agréable introduction au langage des foncteurs).

Il résulte du théorème des zéros que Γ est une équivalence de catégories.

***Corollaire 6.24* (Une équivalence de catégories).** — (k *algébriquement clos*)

Le foncteur Γ *est* essentiellement surjectif*, donc induit une équivalence de catégories contravariante :*

$$\{\textit{variétés algébriques affines}\} \xrightarrow{\sim} \{k\textit{-algèbres de type fini réduites}\}.$$

Démonstration. — Soit A une k-algèbre de type fini réduite et soit $x_1, \dots, x_n$ un système de générateurs de A. Alors $\mathrm{A} \cong k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}$, où I est le noyau du morphisme $\phi : k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{A}$ défini par $\phi(\mathrm{X}_i) = x_i$, pour $i = 1, \dots, n$. L'idéal I est réduit puisque, par hypothèse, A est réduite. Posons $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathrm{I})$. D'après 2), on a $\mathrm{I} = \mathscr{I}(\mathrm{V})$ et donc $\mathrm{A} \cong k[\mathrm{V}] = \Gamma(\mathrm{V})$. Ceci montre que toute k-algèbre de type fini réduite est isomorphe à une algèbre $\Gamma(\mathrm{V})$; ceci est la définition de **essentiellement surjectif**.

Enfin, un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif ; on renvoie pour cela à [**Laf74**, § I.1] (on peut aussi prendre ceci comme définition d'une équivalence de catégories). Comme on a déjà vu que Γ est pleinement fidèle (Proposition 6.21), le corollaire en découle. □

6.4. Variétés algébriques affines : point de vue « abstrait ». — Le théorème des zéros de Hilbert a la conséquence suivante. Soit A une k-algèbre de type fini réduite. Si l'on *choisit* un système de générateurs $x_1, \ldots, x_r$ de A, on obtient un isomorphisme

$$(*) \qquad k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r]/\mathrm{I} \cong \mathrm{A},$$

et l'ensemble Max(A) des idéaux maximaux de A s'identifie aux points de la sous-variété algébrique fermée $\mathscr{V}(\mathrm{I}) \subseteq k^r$.

On voudrait pouvoir définir « la variété algébrique affine » associée à A de façon *intrinsèque*, c.-à-d., sans avoir à choisir un système de générateurs de A ni un plongement de la variété dans un k^r.

Bien sûr, comme ensemble, cette variété doit être Max(A), l'ensemble des idéaux maximaux de A. On le munit d'une topologie, la topologie de Zariski, en déclarant que les fermés sont les ensembles

$$\mathscr{V}(\mathrm{J}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathrm{A}) \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathrm{J}\}.$$

Notons que si $\mathfrak{m}$ contient J, il contient aussi $\sqrt{\mathrm{J}}$, d'où $\mathscr{V}(\mathrm{J}) = \mathscr{V}(\sqrt{\mathrm{J}})$. On obtient bien une topologie, d'après la proposition suivante.

Proposition 6.25 **(Topologie de Zariski)**. — (a) $\mathrm{Max}(\mathrm{A}) = \mathscr{V}(\{0\})$ *et* $\varnothing = \mathscr{V}(\{1\}) = \mathscr{V}(\mathrm{A})$.

(b) *Soit* $(\mathrm{I}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille quelconque d'idéaux de* A*, alors*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{V}(\mathrm{I}_\lambda) = \mathscr{V}(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda).$$

(c) *Soient* I, J *deux idéaux de* A*. On a* $\mathscr{V}(\mathrm{I}) \cup \mathscr{V}(\mathrm{J}) = \mathscr{V}(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) = \mathscr{V}(\mathrm{IJ})$.

Démonstration. — Le point (a) est clair. Posons $\Sigma = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda$. D'après 1), $\mathscr{V}(\Sigma)$ est contenu dans chaque $\mathscr{V}(\mathrm{I}_\lambda)$ et donc dans leur intersection. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_\lambda \mathscr{V}(\mathrm{I}_\lambda)$. Alors Σ s'annule sur x, d'où $x \in \mathscr{V}(\Sigma)$. Ceci prouve (b).

Enfin, comme $\mathrm{IJ} \subseteq \mathrm{I} \cap \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}, \mathrm{J}$, il résulte de 1) que

$$\mathscr{V}(\mathrm{IJ}) \supseteq \mathscr{V}(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \supseteq \mathscr{V}(\mathrm{I}) \cup \mathscr{V}(\mathrm{J}).$$

Soit $\mathfrak{m} \in \mathscr{V}(\mathrm{IJ})$ tel que $\mathfrak{m} \notin \mathscr{V}(\mathrm{I})$, c.-à-d., $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal tel que

$$\mathrm{IJ} \subseteq \mathfrak{m} \qquad \text{mais} \qquad \mathrm{I} \not\subseteq \mathfrak{m}.$$

Comme $\mathfrak{m}$ est un idéal premier, ceci entraîne $J \subseteq \mathfrak{m}$, c.-à-d., $\mathfrak{m} \in \mathscr{V}(J)$. Le point (c) en découle. La proposition est démontrée. □

Choisissons, pour un instant, un isomorphisme

$$(*) \qquad k[X_1, \ldots, X_r]/I \cong A,$$

et posons $V = \mathscr{V}(I) \subseteq k^r$. Comme A est réduite, $I = \sqrt{I}$. Alors on a $\mathscr{I}(V) = \sqrt{I} = I$, d'où un isomorphisme $k[V] \cong A$ et une bijection $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(A)$, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$.

Observons que, pour tout $f \in A$ et $x \in V$, l'image de f dans $A/\mathfrak{m}_x \cong k$ n'est autre que $f(x)$. Par conséquent, pour tout idéal J de A, les deux définitions de $\mathscr{V}(J)$, comme ensemble des zéros de J dans k^r, ou comme ensemble des idéaux maximaux de A contenant J, coïncident ; c.-à-d., pour $x \in k^n$, on a

$$x \in \mathscr{V}(J) \Leftrightarrow J \subseteq \mathfrak{m}_x,$$

et donc $\mathscr{V}(J) = \mathrm{Max}(A/J) = \mathrm{Max}(A/\sqrt{J})$. De plus, d'après le théorème des zéros de Hilbert, on a $\mathscr{I}(\mathscr{V}(J)) = \sqrt{J}$ et donc $k[\mathscr{V}(J)] = A/\sqrt{J}$. Pour résumer, on a obtenu la proposition suivante.

Définition et proposition 6.26 **(La variété** $\mathrm{Max}(A)$**)**. — *Soit* A *une k-algèbre de type fini réduite.*

1) *La variété algébrique affine associée est* $\mathrm{Max}(A)$, *munie de la topologie de Zariski, et son algèbre de fonctions régulières est* A.

2) *Les sous-variétés fermées sont les* $\mathscr{V}(J) = \mathscr{V}(\sqrt{J})$, *pour* J *idéal de* A, *et la k-algèbre des fonctions régulières sur* $\mathscr{V}(J)$ *est* $A/\sqrt{J}$. *Par conséquent, on a une bijection entre sous-variétés fermées de* $\mathrm{Max}(A)$ *et idéaux réduits de* A.

Rappelons la notion de localisation d'un anneau ; voir par exemple [**AM**, Chap. 3] ou [**Po1**, Chap. X].

Définition 6.27 **(Localisation)**. — Soient A un anneau commutatif et S une *partie multiplicative*, c.-à-d., S contient 1, est stable par multiplication, et ne contient pas 0. On définit l'anneau localisé $S^{-1}A$ comme l'ensemble des « fractions » a/s, pour $a \in A$, $s \in S$, c.-à-d., c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples $(a, s) \in A \times S$ pour la relation d'équivalence

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists\, u \in S \text{ tel que } u(at - bs) = 0.$$

On note a/s la classe du couple (a, s), et la structure d'anneau est définie par

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \qquad \frac{a}{s} \times \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

L'application $\tau : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto a/1$ est un morphisme d'anneaux, non nécessairement injectif. Son noyau est

$$\mathrm{Ker}\,\tau = \{a \in A \mid \exists\, s \in S \text{ tel que } as = 0\}.$$

Donc τ est injectif si et seulement si S ne contient pas de diviseur de zéro ; en particulier si A est intègre.

Si $f \in \mathrm{A}$ est un élément non nilpotent, alors $\mathrm{S} = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative ; dans ce cas, le localisé $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est noté A_f ou $\mathrm{A}[f^{-1}]$; il s'identifie à l'anneau $\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$.

Lemme 6.28. — 1) *Soient* A *un anneau,* S *une partie multiplicative. Si* A *est réduit,* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *l'est aussi.*

2) *Soient* A *une k-algèbre de type fini réduite et $f \in \mathrm{A}$. Alors* A_f *est une k-algèbre de type fini réduite.*

Démonstration. — 1) Soit $a/s \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ tel que $0 = (a/s)^n = a^n/s^n$. Alors, il existe $t \in \mathrm{S}$ tel que $ta^n = 0$, d'où $0 = t^n a^n = (ta)^n$. Comme A est réduit, ceci entraîne $ta = 0$, d'où les égalités $a/1 = 0 = a/s$ dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. Ceci prouve 1).

2) A_f est de type fini puisqu'isomorphe à $\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$, et est réduite d'après le point 1). □

***Proposition 6.29* (Ouverts affines principaux U_f)**. — *Soient* A *une k-algèbre de type fini réduite et $f \in \mathrm{A}$. On note* U_f *l'ouvert de Zariski complémentaire du fermé* $\mathscr{V}(\mathrm{A}f)$*, c.-à-d.,*

$$\mathrm{U}_f = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max(A)} \mid f \notin \mathfrak{m}\}.$$

Alors U_f *s'identifie à* $\mathrm{Max}(\mathrm{A}_f)$*, donc est une variété algébrique affine. On dit que* U_f *est un* ouvert affine principal *de la variété algébrique affine* Max(A).

Démonstration. — Voir [**AM**, Chap. 3] ou [**Po1**, Chap. X] pour l'identification $\mathrm{U}_f = \mathrm{Max}(\mathrm{A}_f)$. □

Exemple 6.30. — $k^* = \mathrm{Max}(k[\mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}])$ est une variété algébrique affine, isomorphe à la variété algébrique affine

$$\mathrm{V} = \{(x, y) \in k^2 \mid xy = 1\};$$

en effet, $k[\mathrm{V}] = k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{XY}-1) \cong k[\mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}]$. Dans ce cas, on voit que X^{-1} est une fonction *régulière* (ou *polynomiale*) sur k^*.

On peut maintenant donner plus d'exemples de groupes algébriques affines.

Exemples 6.31. — **2)** Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m = (k^*, \times)$. On a

$$k[\mathbb{G}_m] = k[\mathrm{X}, \mathrm{T}]/(\mathrm{XT}-1) = k[\mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}].$$

Les applications $\mu : (x, y) \mapsto xy$ et $\kappa : x \mapsto x^{-1}$ sont des morphismes (car $x \mapsto x^{-1}$ est une fonction régulière sur k^*).

3) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ s'identifie à :

$$\{(\mathrm{A}, t) \in \mathrm{M}_n(k) \times k \mid (\mathrm{dét\,A})t = 1\},$$

qui est une sous-variété fermée de k^{n^2+1}, et l'on a

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[\mathrm{X}_{1,1}, \ldots, \mathrm{X}_{n,n}, \mathrm{dét}^{-1}].$$

La multiplication est un morphisme, car $(\mathrm{AB})_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} \mathrm{A}_{i,m}\mathrm{B}_{m,j}$; le passage à l'inverse aussi, car

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{dét}(\mathrm{A})^{-1}\ {}^t\mathrm{C}(\mathrm{A}),$$

où ${}^t\mathrm{C}(\mathrm{A})$ désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

6) Le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles : $\mathrm{B}_n(k) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \mathrm{A}_{i,j} = 0, \text{ pour } i > j\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$.

7) Le groupe $\mathrm{D}_n(k)$ des matrices diagonales inversibles est un sous-groupe fermé de $\mathrm{B}_n(k)$.

Proposition 6.32. — 1) *Soit* E *un ensemble fini de cardinal n. Alors* $\mathrm{E} \cong \mathrm{Max}(k \times \cdots \times k)$ *(n copies), donc* E *est une variété algébrique affine.*

2) *Soient* E, F *deux ensembles finis. Toute application* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est un morphisme de variétés algébriques affines.*

Démonstration. — 1) Posons $\mathrm{A} \cong k \times \cdots \times k$ (n copies) ; c'est une k-algèbre réduite de type fini. On voit facilement que Max(A) est formé des n idéaux suivants, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathrm{J}_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid x_i = 0\}.$$

Donc on peut identifier E à Max(A), ce qui prouve 1). Observons que, dans ce cas, l'algèbre des « fonctions régulières »

$$k[\mathrm{E}] = k^n$$

coïncide avec l'algèbre de *toutes* les fonctions $\mathrm{E} \to k$. Par conséquent, le point 2) découle de la proposition 6.43. □

Corollaire 6.33. — *Tout groupe fini* G *est un groupe algébrique.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, G est une variété algébrique et la multiplication $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme de variétés, de même que l'application $\kappa : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g^{-1}$. □

Remarque 6.34. — Si on note δ_g l'application $\mathrm{G} \to k$ telle que $\delta_g(h) = 1$ si $h = g$ et $= 0$ sinon, alors $k[\mathrm{G}] = \bigoplus_{g \in \mathrm{G}} k\delta_g$ et $k[\mathrm{G} \times \mathrm{G}]$ s'identifie à $k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}]$. Le comorphisme de μ est

$$\mu^* : k[\mathrm{G}] \longrightarrow k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}], \quad \delta_g \mapsto \sum_{h \in \mathrm{G}} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h,$$

et celui de κ est $\kappa^* : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}]$, $\delta_g \mapsto \delta_{g^{-1}}$.

Exemple 6.35 **(Facultatif)**. — Pour les lecteurs intéressés, donnons encore un exemple de groupe algébrique affine, plus compliqué que les précédents. La discussion qui suit fait appel à plusieurs notions qui n'ont pas encore été introduites, et donc cet exemple peut être omis pour le moment. On peut définir $\mathrm{PGL}_n(k)$ comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(k))$ formé des automorphismes d'algèbres. On sait, d'après le théorème de Skolem-Noether, que tout automorphisme de $\mathrm{M}_n(k)$ est intérieur, et est donc de déterminant 1. Par conséquent, $\mathrm{PGL}_n(k)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(\mathrm{M}_n(k))$. Si $g = (g_{pq}^{ij})_{1\leqslant i,j,p,q\leqslant n}$ est un élément de $\mathrm{SL}(\mathrm{M}_n(k))$, on vérifie que g est un automorphisme d'algèbres si et seulement si

$$g(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad g(\mathrm{E}_{ij})g(\mathrm{E}_{r\ell}) = \delta_{jr}q(\mathrm{E}_{i\ell}),$$

et ceci équivaut aux équations suivantes :

$$(\dagger) \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{pq}^{ss} = \delta_{pq}, \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{ps}^{ij} g_{sq}^{r\ell} = \delta_{jr} g_{pq}^{i\ell},$$

pour tout p, q, i, j, r, ℓ. On peut montrer que l'idéal engendré par ces éléments est réduit, et contient l'élément $\mathrm{dét} - 1$, où dét est le déterminant $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(k)) \to k^*$. (En effet, on vérifie (cf. $(*)$) que l'espace tangent en $\mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(k)}$ à la variété définie par $(\dagger)$ est de dimension $n^2 - 1$, et ceci entraîne l'assertion précédente). Par conséquent, $\mathrm{PGL}_n(k)$ a pour algèbre de fonctions régulières :

$$k[\mathrm{PGL}_n] = k[\mathrm{X}_{pq}^{ij} \mid 1 \leqslant i, j, p, q \leqslant n]/\text{relations } (\dagger).$$

D'autre part, l'application $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$, $g \mapsto \mathrm{Int}(g)$ (où $\mathrm{Int}(g)$ est l'automorphisme intérieur $\mathrm{X} \mapsto g\mathrm{X}g^{-1}$) est un morphisme de groupes algébriques. En effet, on vérifie que

$$\mathrm{X}_{pq}^{ij}(\mathrm{Int}(g)) = \mathrm{dét}(g)^{-1} a_{pi}(g)\mathrm{C}_{qj}(g),$$

où $a_{rs}(g)$, resp. $\mathrm{C}_{rs}(g)$, désigne le coefficient d'indice (r, s) de g, resp. de sa matrice des cofacteurs.

De plus, la restriction de Ad à SL_n est surjective, et donc $k[\mathrm{PGL}_n]$ s'identife à la sous-algèbre de $k[\mathrm{SL}_n]$ engendrée par les éléments

$$(\ddagger) \qquad a_{pi}\mathrm{C}_{qj}, \quad \text{pour } i, j, p, q = 1, \dots, n.$$

Ceci montre déjà que plusieurs points de vues sont nécessaires : on préfère considérer $\mathrm{PGL}_n(k)$ comme le quotient $\mathrm{GL}_n(k)/k^*$ (on verra plus loin qu'un tel quotient a une structure de groupe algébrique affine), plutôt que de considérer l'une des algèbres ci-dessus.

$(*)$ *Indications concernant l'espace tangent.* L'espace tangent précité est l'ensemble des matrices $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_{pq}^{ij}) \in \mathrm{M}_n(k)$ telles que la matrice $\mathrm{id} + \varepsilon\mathrm{X} \in$

$\mathrm{M}_n(k[\varepsilon])$ vérifie les équations (†). On trouve que $\mathrm{X}^{ij}_{pq} = 0$ si $i \neq p$ et $j \neq q$; si $i = p$ et $j \neq q$ (resp., si $i \neq p$ et $j = q$) alors

$$\mathrm{E}_{q,j} := \mathrm{X}^{ij}_{iq}, \qquad \text{resp. } \mathrm{E}'_{p,i} := \mathrm{X}^{ij}_{pj}$$

est indépendant de i (resp. de j), et $\mathrm{E}_{q,p} + \mathrm{E}'_{p,q} = 0$. Enfin, pour $i = p$ et $j = q$, posant $\mathrm{H}_{i,j} = \mathrm{X}^{ij}_{ij}$, on a les relations :

$$\mathrm{H}_{i,j} + \mathrm{H}_{j,\ell} = \mathrm{H}_{i,\ell},$$

d'où l'on tire : $\mathrm{H}_{i,i} = 0$, puis $\mathrm{H}_{j,i} = -\mathrm{H}_{i,j}$, et enfin, pour tout $i < j$:

$$\mathrm{H}_{i,j} = \mathrm{H}_i + \cdots + \mathrm{H}_{j-1},$$

où l'on a posé $\mathrm{H}_i := \mathrm{H}_{i,i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. Ceci montre que l'espace tangent considéré est engendré par les $n(n-1)$ éléments $\mathrm{E}_{i,j}$, pour $i \neq j$, et les $n-1$ éléments H_i, pour $i = 1, \ldots, n-1$, donc est de dimension $\leqslant n^2 - 1$.

Définition 6.36 **(Immersions fermées)**. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés algébriques affines. On dit que f est une **immersion fermée** si $f(\mathrm{X})$ est un fermé de Y et si f induit un isomorphisme de X sur $f(\mathrm{X})$.

Proposition 6.37. — *f est une immersion fermée si et seulement si son comorphisme $\varphi : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}]$ est surjectif.*

Démonstration. — Posons $f' : \mathrm{X} \to \mathrm{X}' = \overline{f(\mathrm{X})}$ et $i : \mathrm{X}' \hookrightarrow \mathrm{Y}$, et soient $\tau : k[\mathrm{X}'] \to k[\mathrm{X}]$ et $\pi : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}']$ leurs comorphismes. Alors τ est injectif (car $f(\mathrm{X})$ est dense dans X') et π surjectif, et l'on a $\varphi = \tau \circ \pi$. Si f' est un isomorphisme, il en est de même de τ et donc φ est surjectif.

Réciproquement, si φ est surjectif alors τ l'est aussi et est donc un isomorphisme, de même que f'. □

Notation 6.38. — On note $\chi(\mathrm{A})$ l'ensemble des morphismes de k-algèbres $\mathrm{A} \to k$. Il s'identifie à $\mathrm{Max}(\mathrm{A})$, d'après le lemme suivant.

Lemme 6.39. — *L'application $\chi(\mathrm{A}) \to \mathrm{Max}(\mathrm{A})$, $\chi \mapsto \mathrm{Ker}\,\chi$ est une* **bijection***, dont la bijection réciproque est l'application qui à $\mathfrak{m}$ associe le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{m} = k$; si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, ce morphisme n'est autre que $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$.*

Démonstration. — D'après le théorème des zéros de Hilbert, $\mathrm{A}/\mathfrak{m} \cong k$ et donc il n'y a qu'un seul morphisme de k-algèbres $\mathrm{A}/\mathfrak{m} \to k$. □

Définition 6.40 **(Le couplage $\chi(\mathrm{A}) \times \mathrm{A} \to k$)**. — Pour $\chi \in \chi(\mathrm{A})$ et $f \in \mathrm{A}$, on pose

$$\langle \chi, f \rangle := \chi(f) \in k.$$

On peut voir ceci comme la valeur de la fonction f sur le point χ de $\chi(\mathrm{A}) \cong \mathrm{Max}(\mathrm{A})$.

Proposition 6.41. — *Soient* A, B *deux k-algèbres de type fini réduites. Alors la k-algèbre* $\mathrm{A}\otimes_k \mathrm{B}$ *est de type fini et réduite, et les applications*

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{Max(A)}\times\mathrm{Max(B)} & \to & \mathrm{Max(A}\otimes\mathrm{B}), & (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \mapsto & \mathfrak{m}\otimes\mathrm{B}+\mathrm{A}\otimes\mathfrak{n}, \\ \chi(\mathrm{A})\times\chi(\mathrm{B}) & \to & \chi(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}), & (\chi,\chi') \mapsto & \chi\otimes\chi', \end{array}$$

sont des bijections.

Démonstration. — C'est une reformulation « abstraite » de la proposition 6.14. □

Remarque 6.42. — **Attention !** Soient X, Y des variétés algébriques affines. La topologie de Zariski sur X × Y n'est pas le produit des topologies de Zariski sur X et Y ! Pour s'en convaincre, méditer l'exemple le plus trivial $\mathrm{X}=\mathrm{Y}=k$.

6.5. Morphismes : la bijection $\phi\mapsto\phi^\sharp$. — Ce paragraphe donne une version abstraite de la proposition 6.21. Cette version n'est pas indispensable pour la suite, et ce paragraphe peut être omis.

Soient A, B deux k-algèbres de type fini réduites et $\phi:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ un morphisme de k-algèbres. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B. Puisque ϕ induit un isomorphisme de k-algèbres $\mathrm{A}/\phi^{-1}(\mathfrak{m})\cong\mathrm{B}/\mathfrak{m}\cong k$, alors $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal de A ; on le notera $\phi^\sharp(\mathfrak{m})$. Ainsi, ϕ induit une application $\phi^\sharp:\mathrm{Max(B)}\to\mathrm{Max(A)}$. Une autre façon de voir cette application est la suivante : pour tout $\chi\in\chi(\mathrm{B})$, $\phi^\sharp(\chi)$ est le morphisme de k-algèbres $\chi\circ\phi:\mathrm{A}\to k$.

Par définition, on dira qu'une application $\theta:\mathrm{Max(B)}\to\mathrm{Max(A)}$ est un morphisme s'il existe un morphisme de k-algèbres $\phi:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ tel que $\phi^\sharp=\theta$, et l'on notera $\mathrm{Hom}_{\mathrm{var}}(\mathrm{Max(B)},\mathrm{Max(A)})$ l'ensemble de ces morphismes. Ceci est compatible avec la définition donnée pour les sous-ensembles algébriques de k^n.

D'autre part, notons $k^{\chi(\mathrm{B})}$ l'ensemble de **toutes** les applications de $\chi(\mathrm{B})$ vers k. Il résulte du théorème des zéros de Hilbert que l'application $\mathrm{ev_B}:\mathrm{B}\to k^{\chi(\mathrm{B})}$ qui à tout $b\in\mathrm{B}$ associe l'application

$$\mathrm{ev_B}(b):\chi\mapsto\langle\chi,b\rangle:=\chi(b)$$

est **injective**. Par conséquent, B s'identifie à une certaine sous-algèbre de $k^{\chi(\mathrm{B})}$.

Au lieu de $k^{\chi(\mathrm{B})}$, on peut aussi considérer $k^{\mathrm{Max(B)}}$. Dans ce cas, l'application $\mathrm{ev_B}:\mathrm{B}\to k^{\mathrm{Max(B)}}$ se décrit comme suit. Pour tout $\mathfrak{m}\in\mathrm{Max(B)}$, on a $\mathrm{B}/\mathfrak{m}\cong k$ et, pour tout $b\in\mathrm{B}$, l'application $\mathrm{ev_B}(b)$ n'est autre que l'application qui à tout $\mathfrak{m}\in\mathrm{Max(B)}$ associe l'image de b dans $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$. Si l'on choisit un plongement de Max(B) dans k^n et si $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_x$, alors $\mathrm{ev_B}(b)(\mathfrak{m}_x)$ n'est autre que $b(x)$!

Ceci étant dit, à toute application $\eta:\chi(\mathrm{B})\to\chi(\mathrm{A})$, on associe son comorphisme $\eta^*:\mathrm{A}\to k^{\chi(\mathrm{B})}$, défini de la façon suivante. Définissons d'abord la tranposée

$$\eta^t:k^{\chi(\mathrm{A})}\longrightarrow k^{\chi(\mathrm{B})},\qquad f\mapsto f\circ\eta.$$

C'est un morphisme de k-algèbres. On pose alors $\eta^*=\eta^t\circ\mathrm{ev_A}$. C.-à-d., pour tout $a\in\mathrm{A}$, on a

$$\eta^*(a)=\eta^t(\mathrm{ev_A}(a))=\mathrm{ev_A}(a)\circ\eta,$$

et donc, pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$, l'on a

$$\eta^*(a)(\chi) = \mathrm{ev}_{\mathrm{A}}(a)(\eta(\chi)) = \langle \eta(\chi), a \rangle = \eta(\chi)(a).$$

***Proposition 6.43* (Morphismes).** — *On a une identification :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{var}}(\mathrm{Max}(\mathrm{B}), \mathrm{Max}(\mathrm{A})) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{A}, \mathrm{B});$$

plus précisément, on a les deux assertions suivantes.

1) *Soit* $\phi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, *soit* $\phi^\sharp : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$ *le morphisme associé. Alors* $\phi^{\sharp *} = \phi$.

2) *Réciproquement, soit* $\eta : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$ *une application quelconque. Alors* η *est un morphisme si et seulement si* η^* *envoie* A *dans la sous-algèbre* $\mathrm{B} \subseteq k^{\chi(\mathrm{B})}$, *et dans ce cas l'on a* $\eta = \eta^{*\sharp}$.

Démonstration. — Il s'agit essentiellement d'une reformulation abstraite de la proposition 6.21. Toutefois, il est utile de disposer du résultat sous la forme ci-dessus, qui décrit la bijection de façon intrinsèque, c.-à-d., sans faire appel à des plongements $\mathrm{Max}(\mathrm{B}) \subseteq k^n$ et $\mathrm{Max}(\mathrm{A}) \subseteq k^r$.

1) Montrons que $\phi^{\sharp *}(a) = \phi(a)$, pour tout $a \in \mathrm{A}$. Comme on a vu que l'application $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \to k^{\chi(\mathrm{B})}$ est injective, il suffit de vérifier que, pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$, l'on a

$$\phi^{\sharp *}(a)(\chi) = \langle \chi, \phi(a) \rangle.$$

Mais, par définition,

$$\phi^{\sharp *}(a)(\chi) = \langle \phi^\sharp(\chi), a \rangle = \langle \chi \circ \phi, a \rangle = \langle \chi, \phi(a) \rangle.$$

Ceci prouve le point 1). Par conséquent, si $\eta = \phi^\sharp$ est un morphisme, alors $\eta^* = \phi^{\sharp *} = \phi$ applique A dans B.

2) Réciproquement, soit $\eta : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$ tel que $\eta^*(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$. Dans ce cas, pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $\eta^*(a) \in \mathrm{B}$ et, pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$,

$$\langle \eta(\chi), a \rangle = \eta^*(a)(\chi) = \langle \chi, \eta(a) \rangle = \langle \chi \circ \eta^*, a \rangle.$$

Ceci montre que $\eta(\chi) = \chi \circ \eta^*$ pour tout χ, et donc $\eta = \eta^{*\sharp}$ est le morphisme associé à η^*. Ceci prouve la proposition. □

7. Groupes algébriques affines et algèbres de Hopf

7.1. Algèbres de Hopf. — Soient G un groupe algébrique affine et $k[\mathrm{G}]$ son algèbre des fonctions régulières. D'après la proposition 6.14, $k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}]$ s'identifie à $k[\mathrm{G} \times \mathrm{G}]$ par le morphisme qui à tout $\phi \otimes \psi$ associe l'application $(g, g') \mapsto \phi(g)\psi(g')$. Donc, le comorphisme de la multiplication $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme d'algèbres

$$\Delta = \mu^* : k[\mathrm{G}] \longrightarrow k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}].$$

Pour tout $\phi \in k[\mathrm{G}]$, $\Delta(\phi)$ est une somme finie $\sum_i \phi_i \otimes \psi_i$ et, pour tout $g, g' \in \mathrm{G}$, l'on a

$$\phi(gg') = (\phi \circ \mu)(g, g') = \Delta(\phi)(g, g') = \sum_i \phi_i(g)\psi(g').$$

De même, le comorphisme de $\kappa : g \mapsto g^{-1}$ est le morphisme d'algèbres $\tau = \kappa^* : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}]$ tel que $\tau(\phi)(g) = \phi(g^{-1})$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

L'associativité de μ se traduit par $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}) = \mu \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \mu)$ (égalité de morphismes $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$) ; ceci implique l'égalité

$$\text{(Ass)} \qquad (\Delta \otimes \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

qui exprime la **coassociativité** de Δ.

Notons $\varepsilon = \varepsilon_e$, où e est l'élément neutre de G et désignons par u l'inclusion de k dans $k[\mathrm{G}]$ et par $m : k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}]$ la multiplication dans $k[\mathrm{G}]$. La propriété $eg = g = ge$ pour tout g se traduit par

$$\text{(Neutre)} \qquad (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]}) \circ \Delta = \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} = (\mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} \otimes \varepsilon)\Delta.$$

(On fait les identifications $k \otimes k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{G}] \otimes k$.) Enfin, la propriété $gg^{-1} = e = g^{-1}g$ se traduit par

$$\text{(Inv)} \qquad m \circ (\tau \otimes \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]}) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} \otimes \tau) \circ \Delta.$$

Ces propriétés constituent les axiomes définissant la notion **d'algèbre de Hopf** (commutative).

Définition 7.1. — 1) Soit A une k-algèbre commutative. On dit que A est une **algèbre de Hopf** si l'on s'est donné trois morphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}, \quad \varepsilon : \mathrm{A} \longrightarrow k, \quad \tau : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$$

vérifiant les axiomes ci-dessus. Dans ce cas, Δ s'appelle la comultiplication, ε l'augmentation (ou co-unité), et τ l'antipode.

2) Un **morphisme** d'algèbres de Hopf $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'algèbres qui respecte la comultiplication, l'augmentation et l'antipode, c.-à-d., qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_{\mathrm{B}} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathrm{A}}; \\ \varepsilon_{\mathrm{B}} \circ \phi = \varepsilon_{\mathrm{A}}; \\ \tau_{\mathrm{B}} \circ \phi = \phi \circ \tau_{\mathrm{A}}. \end{cases}$$

Remarque 7.2. — On renvoie à [**Abe**, Chap. 2] ou [**Ho81**, Chap. I] pour la définition d'une k-algèbre de Hopf arbitraire H, c.-à-d., non nécessairement commutative. On prendra garde que dans ce cas l'antipode n'est pas un morphisme d'algèbres, mais un anti-homomorphisme, c.-à-d., on a $\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$ pour tout $a, b \in \mathrm{H}$.

Si G est un groupe algébrique affine, on a vu plus haut que son algèbre de fonctions $k[\mathrm{G}]$ est une algèbre de Hopf commutative. Réciproquement, on a la proposition suivante. On note $m_k : k \otimes k \to k$ la multiplication ; c'est un isomorphisme de k-algèbres. Plus généralement, pour toute k-algèbre B on notera $m_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \otimes \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ la multiplication, et u_{B} l'inclusion $k \to \mathrm{B}$.

***Proposition 7.3* (Le foncteur associé).** — *Soit* A *une k-algèbre de Hopf commutative.*

1) $\chi(\mathrm{A}) := \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(\mathrm{A}, k)$ *est un groupe, pour la loi*

$$\chi \cdot \chi' = m_k \circ (\chi \otimes \chi') \circ \Delta.$$

L'élément neutre est l'augmentation ε, et pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{A})$ son inverse est $\chi^{-1} = \chi \circ \tau$.

2) *Plus généralement, pour toute k-algèbre commutative* B*, l'ensemble* $\mathrm{G}(\mathrm{B}) := \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *est un groupe, pour la loi*

$$\phi \cdot \psi = m_{\mathrm{B}} \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta.$$

L'élément neutre est $u_{\mathrm{B}} \circ \varepsilon$, et pour tout $\phi \in \mathrm{G}(\mathrm{B})$, son inverse est $\phi^{-1} = \phi \circ \tau$.

3) *De plus, si $\theta : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ est un morphisme de k-algèbres, le morphisme*

$$\theta^\sharp : \mathrm{G}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{B}'), \qquad \phi \mapsto \theta \circ \phi,$$

est un morphisme de groupes. Par conséquent, $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *est un foncteur de la catégorie des k-algèbres commutatives vers la catégorie de groupes, et* $\chi(\mathrm{A}) = \mathrm{G}(k)$ *est le* « groupe des k-points » *de* G.

Démonstration. — Démontrons 2), dont 1) est un cas particulier. On observe d'abord que la commutativité de S assure que $\phi \cdot \psi$ est un morphisme de k-algèbres de A vers S. Ce point est laissé au lecteur.

Montrons l'associativité. Soient $\phi, \psi, \eta \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. On vérifie que $(\phi\psi)\eta$ est le morphisme

$$m_{\mathrm{S}} \circ (m_{\mathrm{S}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{S}}) \circ (\phi \otimes \psi \otimes \eta) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta,$$

de A dans S, tandis que $\phi(\psi\eta)$ égale

$$m_{\mathrm{S}} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{S}} \otimes m_{\mathrm{S}}) \circ (\phi \otimes \psi \otimes \eta) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Or $m_{\mathrm{S}}(\mathrm{id}_{\mathrm{S}} \otimes m_{\mathrm{S}}) = m_{\mathrm{S}}(m_{\mathrm{S}} \otimes m_{\mathrm{S}})$, par associativité de m_{S}, et $(\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta$ par coassociativité de Δ. Ceci prouve que $(\phi\psi)\eta = \phi(\psi\eta)$.

Soit $\phi \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. On a

$$(u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon) \cdot \phi = m_{\mathrm{S}} \circ (u_{\mathrm{S}} \otimes \phi) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta,$$

et comme $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta : \mathrm{A} \to k \otimes \mathrm{A} = \mathrm{A}$ est l'identité, on en déduit que $(u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon) \cdot \phi = \phi$. On montre de même que $\phi \cdot (u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon) = \phi$.

De plus, comme $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{S}$ est un morphisme d'algèbres, on a $m_{\mathrm{S}} \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ m_{\mathrm{A}}$, et $\phi \circ u \circ \varepsilon = u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon$. Par conséquent, $(\phi\tau) \cdot \phi$ égale

$$m_{\mathrm{S}}(\phi \otimes \phi)(\tau \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta = \phi m_{\mathrm{A}}(\tau \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta = \phi u\varepsilon = u_{\mathrm{S}}\varepsilon.$$

On montre de même que $\phi \cdot (\phi\tau) = u_{\mathrm{S}}\varepsilon$. Ceci prouve le point 2), et le point 3) est laissé au lecteur intéressé. $\square$

Remarque 7.4. — 1) Notons volte l'endomorphisme k-linéaire de $\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$ défini par $\mathrm{volte}(a_1 \otimes a_2) = a_2 \otimes a_1$, pour tout $a_1, a_2 \in \mathrm{A}$, et notons $\Delta' = \mathrm{volte} \circ \Delta$. On déduit de la proposition précédente l'égalité suivante :

$$(\dagger) \qquad \Delta\tau = (\tau \otimes \tau)\Delta'.$$

En effet, $\Delta\tau$ est l'inverse de Δ dans le groupe $\mathrm{G}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A})$. Donc, pour montrer (†), il suffit de montrer que $\Phi := (\tau \otimes \tau)\Delta'$ est aussi un inverse, disons à gauche, de Δ dans ce groupe. C.-à-d., il suffit de montrer que

$$\Phi \cdot \Delta = ((\tau \otimes \tau)\Delta' \otimes \Delta)\Delta$$

égale l'unité $u\varepsilon$. On laisse ceci comme exercice pour le lecteur.

2) On peut montrer, par un argument similaire, que (†) est valable pour tout algèbre de Hopf H, commutative ou non ; voir [**Ho81**], Notes du Chap. I, ou [**Sw**, Chap. IV, Prop. 4.0.1].

Corollaire 7.5. — *Si* A *est une k-algèbre de Hopf commutative de type fini réduite, alors* $\mathrm{Max}(\mathrm{A}) = \chi(\mathrm{A})$ *est un groupe algébrique affine.*

Démonstration. — On a déjà vu l'égalité $\mathrm{Max}(\mathrm{A}) = \chi(\mathrm{A})$, qui résulte du théorème des zéros de Hilbert. Posons $\mathrm{G} = \chi(\mathrm{A})$.

D'après le point 1) de la proposition 7.3, G est muni d'une structure de groupe, dont la multiplication μ et le passage à l'inverse κ sont donnés par :

$$\mu(\chi \otimes \chi') = (\chi \otimes \chi') \circ \Delta, \qquad \kappa(\chi) = \chi \circ \tau.$$

D'après la proposition 6.21 (voir aussi le paragraphe 6.5), ceci entraîne que μ et κ sont des morphismes de variétés algébriques affines, dont les comorphismes sont $\mu^* = \Delta$ et $\kappa^* = \tau$. Ceci montre que G est un groupe algébrique affine. $\square$

Théorème 7.6. — *Se donner un morphisme de groupes algébriques affines* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *équivaut à se donner un morphisme d'algèbres de Hopf* $k[\mathrm{G}'] \to k[\mathrm{G}]$.

Démonstration. — D'après la proposition 6.21 (voir aussi le paragraphe 6.5), se donner un morphisme de variétés $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ équivaut à se donner le morphisme de k-algèbres $\phi^* : k[\mathrm{G}'] \to k[\mathrm{G}]$. De plus, ϕ est un morphisme de groupes si et seulement si il vérifie

$$\phi \circ \mu_{\mathrm{G}} = \mu_{\mathrm{G}'} \circ (\phi \times \phi), \quad \phi(1_{\mathrm{G}}) = 1_{\mathrm{G}'}, \quad \phi \circ \kappa_{\mathrm{G}} = \kappa_{\mathrm{G}'} \circ \phi,$$

où κ désigne le passage à l'inverse. (En fait, la première condition implique les deux autres). D'après le lemme 6.13, ceci équivaut à ce que ϕ^* vérifie

$$\Delta_{\mathrm{G}} \circ \phi^* = (\phi^* \otimes \phi^*) \circ \Delta_{\mathrm{G}'}, \quad \varepsilon_{\mathrm{G}} \circ \phi^* = \varepsilon_{\mathrm{G}'}, \quad \tau_{\mathrm{G}} \circ \phi^* = \phi^* \circ \tau_{\mathrm{G}'},$$

c.-à-d., soit un morphisme d'algèbres de Hopf. □

7.2. Exemples du point de vue Hopf. — 1) Le groupe additif $\mathbb{G}_a$. On a $k[\mathbb{G}_a] = k[x]$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\tau(x) = -x$, $\varepsilon(x) = 0$.

2) Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On a $k[\mathbb{G}_m] = k[x, x^{-1}]$, $\Delta(x) = x \otimes x$, $\tau(x) = x^{-1}$, $\varepsilon(x) = 1$.

3) Le groupe linéaire GL_n. On a

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[t, x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}]/(t\,\mathrm{dét}(x_{i,j}) - 1).$$

La comultiplication correspond à la règle qui exprime le produit de deux matrices, c.-à-d.,

$$\forall\, i, j, \qquad \Delta(x_{i,j}) = \sum_{r=1}^{n} x_{i,r}\, x_{r,j},$$

et, comme $\mathrm{dét}(\mathrm{AB}) = \mathrm{dét}(\mathrm{A})\,\mathrm{dét}(\mathrm{B})$, l'on a $\Delta(t) = t \otimes t$. L'augmentation ε est le morphisme « évaluation sur la matrice identité », d'où $\varepsilon(x_{i,j}) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j, et $\varepsilon(t) = 1$. Enfin, l'antipode τ se déduit de la règle qui exprime l'inverse de A comme $1/\,\mathrm{dét}(\mathrm{A})$ fois la transposée de la matrice des cofacteurs, c.-à-d., on a

$$\forall\, i, j, \qquad \tau(x_{i,j}) = t\ (-1)^{i+j} \mathrm{dét}(x_{r,s})_{r \neq j,\, s \neq i}.$$

Enfin, comme $t(\mathrm{A}) = \mathrm{dét}(\mathrm{A})^{-1}$, on a $\tau(t)(\mathrm{A}) = \mathrm{dét}(\mathrm{A})$ pour tout A, d'où $\tau(t) = \mathrm{dét}(x_{i,j})$.

7.3. Cogèbres et comodules. —

***Définition 7.7* (Cogèbres).** — Une k-**cogèbre** est un k-espace vectoriel C muni de deux applications k-linéaires $\Delta : \mathrm{C} \to \mathrm{C} \otimes \mathrm{C}$ et $\varepsilon : \mathrm{C} \to k$, vérifiant les deux axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id}_{\mathrm{C}} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}})\Delta$,
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}})\Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{C}} = (\mathrm{id}_{\mathrm{C}} \otimes \varepsilon)\Delta$.

Δ, resp. ε s'appelle la **comultiplication**, resp. l'**augmentation**. L'axiome (1) exprime la *coassociativité* de la comultiplication, et on peut appeler (2) l'axiome de *co-unité*.

Un **morphisme** de k-cogèbres $\phi : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ est une application k-linéaire vérifiant $\Delta_{\mathrm{C}'} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathrm{C}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{C}'} \circ \phi = \varepsilon_{\mathrm{C}}$.

***Définition 7.8* (Comodules).** — Un C-**comodule** (à droite) est un k-espace vectoriel V, muni d'une **coaction** $\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathrm{C}$, c.-à-d., une application k-linéaire vérifiant les axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \varepsilon)\Delta_{\mathrm{V}} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$,
(2) $(\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \Delta)\Delta_{\mathrm{V}} = (\Delta_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}})\Delta_{\mathrm{V}}$.

Un **morphisme** de C-comodules $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est une application k-linéaire qui vérifie $\Delta_{\mathrm{W}} \circ f = (f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}}) \circ \Delta_{\mathrm{V}}$.

Remarque 7.9. — Il est clair que id_{V} est un morphisme, de même que la composée de deux morphismes. On obtient donc une catégorie, la catégorie des C-comodules (à droite).

Définition 7.10. — Soient V un C-comodule et W un sous-espace de V. On dit que W est un **sous-C-comodule** de V si l'on a $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$.

Dans ce cas, on vérifie facilement que V/W est un C-comodule, et que la projection $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un morphisme de C-comodules.

Proposition 7.11. — *Soit* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *un morphisme de* C*-comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$*, resp.* $\mathrm{Im}(f)$*, est un sous-comodule de* V*, resp. de* W*, et l'on a un isomorphisme de comodules* $\mathrm{V}/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Incluons ici le lemme suivant, analogue de la restriction des scalaires pour les modules, c.-à-d., du fait que si $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de k-algèbres et M un B-module, alors M est aussi un A-module.

***Lemme 7.12* (Corestriction des scalaires).** — *Soit* $\phi : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ *un morphisme de* k*-cogèbres. Si* V *est un* C*-comodule, pour la coaction* $\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathrm{C}$*, alors c'est un* C'*-comodule, pour la coaction* $\Delta'_{\mathrm{V}} = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \phi)\Delta_{\mathrm{V}}$.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

***Théorème 7.13* (Propriété de finitude des comodules).** — *Soit* C *une* k*-cogèbre et soit* V *un* C*-comodule arbitraire, c.-à-d., pas nécessairement de dimension finie.*

1) *Tout sous-espace vectoriel* E *de dimension finie est contenu dans un sous-comodule de dimension finie. Par conséquent,* V *est réunion de ses sous-comodules de dimension finie.*

2) *Toute intersection de sous-comodules est un sous-comodule. En particulier, pour tout sous-espace* E *de* V *il existe un plus petit sous-comodule* E' *de* V *contenant* E.

Démonstration. — Soit $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de C. Alors, tout élément de $\mathrm{V}\otimes\mathrm{C}$ s'écrit de façon unique $\sum_\lambda v_\lambda\otimes c_\lambda$, pour des $v_\lambda\in\mathrm{V}$ uniquement déterminés et nuls sauf pour un nombre fini de λ.

1) Soit E un sous-espace de V de dimension finie et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour chaque $i=1,\dots,n$, écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(e_i)=\sum_\lambda v_{i\lambda}\otimes c_\lambda.$$

Soit F le sous-espace de V engendré par les $v_{i\lambda}$, il est de dimension finie. De plus, F contient E puisque pour tout i on a $e_i=(\mathrm{id}_{\mathrm{V}}\otimes\varepsilon)\Delta_{\mathrm{V}}(e_i)=\sum_\lambda v_{i\lambda}\varepsilon(c_\lambda)$. Montrons que $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{F})\subseteq\mathrm{F}\otimes\mathrm{C}$.

Pour tout i et tout λ, écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(v_{i\lambda})=\sum_\mu v_{i\lambda\mu}\otimes c_\mu. \tag{1}$$

Alors on a, d'une part,

$$(\Delta_{\mathrm{V}}\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{C}})\circ\Delta_{\mathrm{V}}(e_i)=\sum_{\lambda,\mu} v_{i\lambda\mu}\otimes c_\mu\otimes c_\lambda. \tag{2}$$

D'autre part, pour tout $\nu\in\Lambda$, écrivons $\Delta(c_\nu)=\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\nu\lambda\mu}(\nu)\,c_\mu\otimes c_\lambda$, où les $\alpha_{\lambda\mu}(\nu)\in k$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Alors, on a, pour tout $i=1,\dots,n$,

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{V}}\otimes\Delta)\circ\Delta_{\mathrm{V}}(e_i)=\sum_{\lambda,\mu}\left(\sum_\nu\alpha_{\lambda\mu}(\nu)v_{i\nu}\right)\otimes c_\mu\otimes c_\lambda. \tag{3}$$

Comme $(\Delta_{\mathrm{V}}\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{C}})\circ\Delta_{\mathrm{V}}=(\mathrm{id}_{\mathrm{V}}\otimes\Delta)\circ\Delta_{\mathrm{V}}$, on en déduit, pour tout λ,μ, que $v_{i\lambda\mu}$ égale $\sum_\nu\alpha_{\lambda\mu}(\nu)v_{i\nu}$ donc appartient à F. D'après (1), ceci montre que $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{F})\subseteq\mathrm{F}\otimes\mathrm{C}$, ce qui prouve le point 1).

2) Soit $(\mathrm{W}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille arbitraire de sous-comodules et soit $x\in\mathrm{W}:=\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{W}_i$. Écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(x)=\sum_\lambda v_\lambda\otimes c_\lambda.$$

Fixons un indice λ. Comme $\Delta_{\mathrm{V}}(x)\in\mathrm{W}_i\otimes\mathrm{C}$, on a $v_\lambda\in\mathrm{W}_i$ pour tout i, d'où $v_\lambda\in\mathrm{W}$. Ceci montre que W est un sous-comodule de V. La dernière assertion en résulte, en prenant E' égal à l'intersection de tous les sous-comodules contenant E. Le théorème est démontré. □

7.4. Représentations rationnelles des groupes algébriques affines. —

Définition 7.14. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Une **représentation rationnelle** de G dans V est la donnée d'un morphisme de groupes algébriques $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

Ceci équivaut à se donner un morphisme de variétés $\mathrm{G} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, $(g, v) \mapsto gv$ qui est une action linéaire, c.-à-d., qui est linéaire en V et vérifie $g(hv) = (gh)v$ et $ev = v$, où e est l'élément neutre de G. (On laisse au lecteur le soin de vérifier l'équivalence de ces deux définitions).

Lemme 7.15. — *Soient $n \geqslant 1$ et $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(k)$ un morphisme de groupes. On note $\mathrm{C}_{ij} \in k[\mathrm{GL}_n(k)]$ les coefficients matriciels. Alors ϕ est un morphisme de variétés si et seulement si $\mathrm{C}_{ij} \circ \phi \in k[\mathrm{G}]$, pour $i, j = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. — La nécessité est claire. Réciproquement, si la condition est satisfaite alors on obtient un morphisme d'algèbres $\varphi : k[\mathrm{M}_n(k)] \to k[\mathrm{G}]$. Désignons par D l'élément $\mathrm{dét}(\mathrm{C}_{i,j})$ de $k[\mathrm{M}_n(k)]$, et observons que $\varphi(\mathrm{D})$ est un élément inversible de $k[\mathrm{G}]$, car $\varphi(\mathrm{D})(g) = \mathrm{dét}(\phi(g))$, d'où $\varphi(\mathrm{D})^{-1}(g) = \mathrm{dét}(\phi(g^{-1}))$. D'après la propriété universelle de la localisation, φ s'étend en un morphisme d'algèbres de $k[\mathrm{M}_n(k)][\mathrm{D}^{-1}] = k[\mathrm{GL}_n(k)]$ vers $k[\mathrm{G}]$. Ceci prouve le lemme. $\square$

Proposition 7.16. — *Soit* V *un $k[\mathrm{G}]$-comodule arbitraire.*

a) V *est muni de l'action linéaire de* G *définie par $gv = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_g)\Delta_{\mathrm{V}}(v)$.*

b) *Un sous-espace vectoriel* W *de* V *est* G*-stable ssi $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$, c.-à-d., ssi* W *est un sous-comodule.*

c) *Si* $\dim \mathrm{V} < \infty$*, alors* V *est un* G*-module rationnel.*

Démonstration. — a) Il faut vérifier que $ev = v$ et $g(hv) = (gh)v$, pour tout $g, h \in \mathrm{G}$, $v \in \mathrm{V}$. Ceci résulte des axiomes de coaction (cf. 7.8) et est laissé au lecteur.

Prouvons b). Il est clair que si $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$ alors W est G-stable. Pour voir la réciproque, soit E un supplémentaire de W dans V. Soit $v \in \mathrm{W}$ arbitraire. Écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(v) = \sum_i w_i \otimes \phi_i + \sum_j e_j \otimes \psi_j,$$

avec $w_i \in \mathrm{W}$, $\phi_i, \psi_j \in k[\mathrm{G}]$, et les e_j linéairement indépendants dans E. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'hypothèse $gv \in \mathrm{W}$ implique $0 = \sum_j \psi_j(g) e_j$ et ceci entraîne que $\psi_j = 0$, pour tout j. On a donc $\Delta_{\mathrm{V}}(v) \in \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$. Ceci prouve b).

c) Supposons maintenant que $\dim \mathrm{V} = n$ et montrons que l'application abstraite $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ obtenue plus haut est un morphisme. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. D'après le lemme 7.15, il suffit de voir que les fonctions $\mathrm{C}_{ij} \circ \rho : \mathrm{G} \to k$ appartiennent à $k[\mathrm{G}]$, pour tout i, j. Mais ceci est clair, car pour tout j l'on a

$$\Delta_{\mathrm{V}}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_{ij},$$

pour certains $c_{ij} \in k[\mathrm{G}]$. Alors, $c_{ij}(g) = \mathrm{C}_{ij}(\rho(g))$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, et donc $c_{ij} = \mathrm{C}_{ij} \circ \rho$. La proposition est démontrée. □

Lemme 7.17. — 1) *Soit* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *une base de* $\mathrm{V} \cong k^n$. *L'application*

$$\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes k[\mathrm{GL}_n(k)], \qquad v_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \mathrm{C}_{ij}$$

munit V *d'une structure de* $k[\mathrm{GL(V)}]$*-comodule.*

2) *De plus, cette application est* canonique *: elle ne dépend pas de la base de* V *choisie. La structure de* GL(V)*-module rationnel sur* V *correspondante est l'action naturelle* $\mathrm{GL(V)} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, *qui correspond au morphisme identité* $\mathrm{GL(V)} \to \mathrm{GL(V)}$.

Démonstration. — 1) Pour $j = 1, \ldots, n$, on a $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_{\mathrm{V}}(v_j) = \sum_i v_i \delta_{i,j} = v_j$ et

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta_{\mathrm{V}}(v_j) = \sum_{i,\ell} v_i \otimes \mathrm{C}_{i\ell} \otimes \mathrm{C}_{\ell j} = (\Delta_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{V}}(v_j).$$

Ceci montre que Δ_{V} est une coaction. On voit facilement que la structure de GL(V)-module rationnel sur V qui résulte du point a), correspond à l'action naturelle $\mathrm{GL(V)} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, et donc au morphisme identité $\mathrm{GL(V)} \to \mathrm{GL(V)}$.

2) Voyons l'indépendance vis-à-vis de la base. Considérons l'application naturelle

$$\gamma : \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End(V)}^* \subset k[\mathrm{End(V)}].$$

Alors $\mathrm{C}_{ij} = \gamma(v_i^* \otimes v_j)$. On en déduit que, pour tout v, on a $\Delta_{\mathrm{V}}(v) = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \gamma)(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* \otimes v)$. L'indépendance cherchée en découle, soit par un calcul direct, soit en observant que via l'isomorphisme

$$\theta : \mathrm{End(V)} \otimes \mathrm{V} \xrightarrow{\cong} \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V},$$

on a $\Delta_{\mathrm{V}}(v) = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \gamma)(\mathrm{I}_{\mathrm{V}} \otimes v)$, où I_{V} désigne l'élément unité de End(V). Le lemme est démontré. □

Corollaire 7.18. — *Soit* V *de dimension finie. Il est équivalent de se donner sur* V *une structure de* $k[\mathrm{G}]$*-comodule ou de* G*-module rationnel.*

Démonstration. — Si V est un $k[\mathrm{G}]$-comodule, on obtient une structure de G-module rationnel sur V, d'après la proposition précédente.

Réciproquement, d'après le lemme précédent, on a une structure de comodule $\Delta_V : V \to V \otimes k[GL(V)]$. Par conséquent, si ρ est un morphisme $G \to GL(V)$, son comorphisme $\rho^* : k[GL(V)] \to k[G]$ est un morphisme d'algèbres de Hopf et donc, d'après le lemme 7.12, $(\mathrm{id}_V \otimes \rho^*)\Delta_V$ fait de V un $k[G]$-comodule.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la composée de ces deux opérations redonne sur V la structure initiale de $k[G]$-comodule, resp. de G-module rationnel. Ceci démontre le corollaire. □

Proposition 7.19. — *Soit* V *un* k*-espace vectoriel arbitraire, c.-à-d., pas nécessairement de dimension finie. Il est équivalent de se donner :*

i) une structure de $k[G]$*-comodule sur* V*, ou :*

ii) une action linéaire **localement finie** *de* G *sur* V *telle que, pour tout sous-espace* G*-stable* W *de dimension finie, l'application induite* $G \to GL(W)$ *soit un morphisme de groupes algébriques.*

On dit que V *est un* G*-module* **rationnel** *s'il est muni de l'une de ces données. Dans ce cas, pour tout sous-espace* W*, on a :*

$$\mathrm{W} \textit{ est un sous-}\mathrm{G}\textit{-module} \Leftrightarrow \mathrm{W} \textit{ est un sous-comodule.}$$

Démonstration. — Supposons que V soit un $k[G]$-comodule et soit W un sous-espace G-stable de dimension finie. L'application induite $\rho : G \to GL(W)$ est évidemment un morphisme de groupes. D'après la proposition 7.16, W est un sous-comodule et ρ est un morphisme de groupes algébriques.

De plus, d'après le résultat de finitude (Proposition 7.13), tout sous-espace E de dimension finie est contenu dans un sous-comodule (de façon équivalente, un G-module) de dimension finie. Ceci est la définition d'une action localement finie. Ceci montre que la condition ii) est vérifiée.

Réciproquement, supposons ii) vérifié. Si W est un sous-espace G-stable de dimension finie, on a un morphisme d'algèbres de Hopf $\pi_W : k[GL(W)] \to k[G]$, et on en déduit que $(\mathrm{id} \otimes \pi_W) \circ \Delta_W : W \to W \otimes k[G]$ est une coaction, notée θ_W. De plus, si $W_1 \subseteq W_2$, on vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\theta_{W_1}} & W_1 \otimes k[G] \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_2 & \xrightarrow{\theta_{W_2}} & W_2 \otimes k[G] \end{array}$$

est commutatif. On en déduit, puisque $\otimes$ commute à la limite inductive, que ceci munit V d'une coaction θ_V, qui prolonge les θ_W. □

***Proposition 7.20* (Construction de modules).** — *Soit* V *un* G*-module rationnel de dimension finie d. Alors, les espaces suivants sont, de façon naturelle, des* G*-modules rationnels :*

1) *Le dual* V^**, pour l'action définie par :*

$$(g \cdot \phi)(v) = \phi(g^{-1}v), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G},\, \phi \in \mathrm{V}^*,\, v \in \mathrm{V}.$$

2) *Les puissances tensorielles, symétriques, ou extérieures :* $\mathrm{V}^{\otimes n}$*,* $\mathrm{S}^n(\mathrm{V})$*,* $\bigwedge^n(\mathrm{V})$*.*

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour $\mathrm{GL(V)} = \mathrm{GL}_d$, le cas général s'obtiendra en composant la représentation $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ avec la représentation de GL(V) dans $\mathrm{GL(V^*)}$, $\mathrm{GL(V^{\otimes n})}$, etc.

Pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_d$, le point 1) est clair, car le morphisme

$$\mathrm{GL}_d = \mathrm{GL(V)} \longrightarrow \mathrm{GL(V^*)} = \mathrm{GL}_d$$

est donné par $\mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}^{-1}$. Pour le point 2), $\mathrm{G} = \mathrm{GL(V)}$ agit par automorphismes d'algèbre sur les algèbres tensorielle, symétrique et extérieure de V :

$$\mathrm{T(V)}, \qquad \mathrm{S(V)} = \mathrm{T(V)/I}, \qquad \textstyle\bigwedge(\mathrm{V}) = \mathrm{T(V)/J},$$

où I (resp. J) est l'idéal homogène engendré par les éléments, de degré 2, $v \otimes w - w \otimes v$ (resp. $v \otimes v$), pour $v, w \in \mathrm{V}$.

Soient $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de V. Alors les

$$\begin{array}{lll} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, & \text{avec} & 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant d \quad ; \\ \text{resp.} \quad e_{i_1} \cdots e_{i_n}, & \text{avec} & 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant d \ ; \\ \text{resp.} \quad e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, & \text{avec} & 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d \quad (\text{et } n \leqslant d); \end{array}$$

forment une base de $\mathrm{V}^{\otimes n}$, resp. $\mathrm{S}^n(\mathrm{V})$, resp. $\bigwedge^n(\mathrm{V})$. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_d$,

$$g(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = g(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes g(e_{i_n})$$

s'exprime, par n-linéarité du produit, comme une combinaison linéaire des vecteurs de base, avec pour coefficients des polynômes homogènes de degré n en les coefficients $g_{i,j}$ de g, et il en est de même dans le cas de l'algèbre symétrique ou extérieure. Ceci démontre la proposition. □

7.5. Linéarité des groupes algébriques affines. — On dit qu'un groupe algébrique G est **linéaire** s'il est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe GL(V). Dans ce cas, G est évidemment un groupe algébrique affine. La réciproque est vraie :

***Théorème 7.21*.** — *Tout groupe algébrique affine est linéaire.*

Démonstration. — Soit G un groupe algébrique affine. Alors la comultiplication $\Delta : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}]$ fait de $k[\mathrm{G}]$ un $k[\mathrm{G}]$-comodule à droite et donc un G-module rationnel pour l'action :

$$(g\phi)(h) = \phi(hg), \qquad \forall\, \phi \in k[\mathrm{G}],\ g, h \in \mathrm{G}.$$

Soient $x_1, \ldots, x_s$ des générateurs de $k[\mathrm{G}]$ comme algèbre, et soit V le sous-G-module (de dimension finie !) qu'ils engendrent. D'après la proposition 7.16, l'on a $\Delta(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V} \otimes k[\mathrm{G}]$ et l'on obtient un morphisme de groupes algébriques $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de V ; il existe des $c_{ij} \in k[\mathrm{G}]$ tels que, pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$(*) \qquad \rho(g) f_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(g) f_i, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Pour montrer que ρ est une immersion fermée, il reste à voir que le comorphisme $\rho^* : k[\mathrm{GL}(\mathrm{V})] \to k[\mathrm{G}]$ est surjectif. Mais ceci résulte de $(*)$. En effet, $c_{ij} = \mathrm{C}_{ij} \circ \rho = \rho^*(\mathrm{C}_{ij})$, et pour $j = 1, \ldots, n$, on a

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad f_j(g) = (\rho(g) f_j)(e) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(g) f_i(e),$$

d'où $f_j = \rho^*(\sum_{i=1}^{n} f_i(e) \mathrm{C}_{ij})$. Comme les f_j engendrent $k[\mathrm{G}]$, ceci prouve que ρ^* est surjective. □

Prenons $k = \mathbb{C}$ et soit G un $\mathbb{C}$-groupe algébrique affine. D'après le théorème précédent, G s'identifie à un sous-groupe d'un certain $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, fermé pour la topologie de Zariski, donc a fortiori pour la topologie usuelle. Donc G est un sous-groupe fermé, pour la topologie usuelle, du groupe de Lie $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ (cf. lemme 2.15). D'après le théorème 2.60 (théorème de von Neumann) on obtient donc le corollaire suivant.

Corollaire 7.22. — *Soit* G *un* $\mathbb{C}$*-groupe algébrique affine. Alors* G *est un groupe de Lie.*

7.6. G-variété affines. — [11] Soit G un groupe algébrique affine.

Définition 7.23. — Soit A une k-algèbre. On dit que G **agit** rationnellemnent **par automorphismes** sur A si l'on s'est donné une structure de G-module rationnel sur A telle que, pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'application $a \mapsto ga$ soit un automorphisme d'algèbre.

Ceci équivaut à dire que la coaction correspondante $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A} \otimes k[\mathrm{G}]$ est **multiplicative**, c.-à-d., est un morphisme de k-algèbres.

[11] Ce paragraphe n'a pas été traité en cours.

***Définition 7.24* (Action sur une variété affine).** — Soit X une variété algébrique affine. Une **action** de G sur X est un morphisme de variétés $\mu_X : G \times X \to X$ vérifiant les axiomes d'une action, c.-à-d.,

(1) $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X) = \mu_X \circ (\mathrm{id}_G \times \mu_X)$,
(2) $\mu_X \circ (e \times \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$,
où μ, resp. e, désigne la multiplication, resp. l'élément neutre, de G.

Notant $\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$ le comorphisme de μ_X (qui est un morphisme de k-algèbres), ceci équivaut à dire que Δ_X est, de plus, une coaction.

Réciproquement, toute coaction $\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$ qui est **multiplicative**, c.-à-d., un morphisme de k-algèbres, induit un morphisme $\mu_X : G \times X \to X$ qui vérifie (1) et (2). Par conséquent, se donner une action de G sur X équivaut à se donner une coaction multiplicative $\Delta_X : k[X] \to k[X] \otimes k[G]$. Dans ce cas, on dira que X est une **G-variété**.

***Définition 7.25* (Morphismes de G-variétés).** — Soient X, Y deux G-variétés algébriques affines. Un **G-morphisme** $\phi : X \to Y$ est un morphisme de variétés qui commute à l'action de G, c.-à-d., tel que :

$$\phi(gx) = g\phi(x), \qquad \forall\, g \in G,\ x \in X.$$

Ceci signifie que $\phi \circ \mu_X = \mu_Y \circ (\mathrm{id}_G \times \phi)$, et ceci équivaut à dire que $\phi^* : k[X] \to k[Y]$ est un morphisme (d'algèbres et) de comodules.

***Théorème 7.26* (Linéarisation des actions affines).** — *Soit* X *une* G*-variété affine. Il existe une immersion fermée* G*-équivariante de* X *dans un* G*-module rationnel de dimension finie.*

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de la linéarité de G. Soit $x_1, \dots, x_s$ des générateurs de $k[X]$ comme algèbre, et soit V le sous-G-module de dimension finie de $k[X]$ qu'ils engendrent.

D'après la propriété universelle de l'algèbre symétrique S(V), on obtient, d'une part, que G agit rationnellement, par automorphismes d'algèbre sur S(V). D'autre part, on obtient un morphisme d'algèbres G-équivariant $\phi : S(V) \to k[X]$. Ce morphisme est surjectif, puisque V engendre $k[X]$. Par conséquent, le morphisme associé $\phi^\sharp : X \to V^*$ est une immersion fermée G-équivariante. □

8. Composantes irréductibles, dimension, morphismes de groupes algébriques

Pour les notions et résultats de géométrie algébrique (resp. d'algèbre commutative) qui sont mentionnés sans démonstration, les références sont les livres [**Die**], [**Pe**] ou [**Ku**] (resp. [**AM**] ou [**Ma1**]).

8.1. Espaces noethériens et composantes irréductibles. —

Proposition 8.1. — *Soient* A *une k-algèbre de type fini réduite et* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ *la variété algébrique affine associée, munie de la topologie de Zariski.*

1) *Toute suite décroissante de fermés* $\mathrm{Z}_0 \supseteq \mathrm{Z}_1 \supseteq \cdots$ *est stationnaire.*

2) X *est irréductible si et seulement si* A *est intègre.*

Démonstration. — 1) Comme $\mathrm{Z}_i = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{Z}_i))$, ceci résulte du fait que la suite croissante d'idéaux $\mathscr{I}(\mathrm{Z}_0) \subseteq \mathscr{I}(\mathrm{Z}_1) \subseteq \cdots$ est stationnaire, puisque A est noethérienne.

On a déjà vu le point 2) : proposition 6.7. □

Remarque 8.2. — On peut montrer que X est *connexe* si et seulement si A ne contient pas d'idempotent autre que 0 et 1.

***Définition 8.3* (Espaces topologiques irréductibles).** — Soit X un espace topologique *non vide.* On dit que X est **irréductible** s'il n'est pas réunion de deux fermés propres de X. Ceci équivaut à dire que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide, ou encore, que tout ouvert non vide est dense.

Ceci implique que tout ouvert non vide de X est également irréductible.

Remarque 8.4. — Il résulte de la définition que tout espace irréductible est connexe. La réciproque est fausse en général.

Lemme 8.5. — 1) *L'image par une application continue d'un espace irréductible* (*resp. connexe*) *est irréductible* (*resp. connexe*).

2) *Soient* Y *un sous-espace de* X *et* $\overline{\mathrm{Y}}$ *son adhérence. Si* Y *est irréductible* (*resp. connexe*), $\overline{\mathrm{Y}}$ *l'est aussi. De plus, si* $\overline{\mathrm{Y}}$ *est irréductible,* Y *l'est aussi.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 8.6. — On dit qu'un espace topologique X est **quasi-compact** si de tout recouvrement ouvert $\mathrm{X} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{U}_i$, où $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ est une partie finie.

Ceci équivaut à dire que si une intersection de fermés $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Z}_i$ est vide, alors déjà une intersection finie $\bigcap_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{Z}_i$ est vide.

***Proposition 8.7* (Espaces topologiques noethériens).** — *Soit* X *un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Toute suite décroissante de fermés, resp. toute suite croissante d'ouverts, est stationnaire.*

2) *Toute famille non vide de fermés, resp. d'ouverts, possède un élément minimal, resp. maximal.*

3) *Tout ouvert de* X *est quasi-compact.*

X *est dit* **noethérien** *s'il vérifie les conditions précédentes. Dans ce cas, tout sous-espace de* X *est aussi noethérien.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 8.8. — Un sous-espace de X qui est irréductible (resp. connexe) et maximal pour cette propriété s'appelle une **composante irréductible** (resp. **connexe**) de X.

D'après 8.5, point 2), une telle composante est une partie **fermée** de X.

Remarque 8.9. — 1) Si Y, Z sont deux parties connexes de X ayant un point en commun, $\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$ est connexe. On en déduit que la relation $x \sim x'$ s'il existe une partie connexe contenant x et x' est une relation d'équivalence sur X, et les composantes connexes sont les classes d'équivalence.

2) Pour un espace topologique arbitraire, l'existence de parties irréductibles maximales résulte du lemme de Zorn, voir [**Die**, (T, 6)]. Toutefois, pour un espace noethérien, on a le théorème suivant.

Théorème 8.10. — *Soit* X *un espace topologique noethérien. Alors les composantes irréductibles de* X *sont en nombre fini et recouvrent* X.

Démonstration. — Considérons l'ensemble $\mathscr{Y}$ des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Si $\mathscr{Y}$ était non vide, alors d'après la propriété de noethérianité il contiendrait un élément minimal Z, nécessairement non-irréductible. Donc Z est réunion de deux fermés propres Z_1 et Z_2. Mais comme Z est un élément minimal de $\mathscr{Y}$, alors Z_1 et Z_2 sont réunions finies de fermés irréductibles, et donc aussi Z. Contradiction ! Donc $\mathscr{Y} = \varnothing$ et X est réunion finie de fermés irréductibles.

Considérons alors une décomposition $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{X}_n$, avec n minimal. Si Y est un sous-espace irréductible de X, l'égalité $\mathrm{Y} = \cup_{i=1}^n (\mathrm{Y} \cap \mathrm{X}_i)$ entraîne que $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}_i$ pour un certain i. Par conséquent, tout sous-espace irréductible maximal de X est égal à l'un des X_i. Comme de plus $\mathrm{X}_i \not\subseteq \mathrm{X}_j$ pour $j \neq i$, puisqu'on a choisi n minimal, on obtient que les X_i sont exactement les composantes irréductibles de X. □

Soient A une k-algèbre de type fini réduite et $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$, muni de la topologie de Zariski. D'après la proposition 8.1, X est un espace topologique **noethérien**, donc est une réunion de composantes irréductibles $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$. Posons $\mathrm{P}_i = \mathscr{I}(\mathrm{X}_i)$; c'est un idéal *premier* de A.

Proposition 8.11. — *Soit* A *une k-algèbre de type fini réduite, et soient* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *les composantes irréductibles de* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$. *Posons* $\mathrm{P}_i = \mathscr{I}(\mathrm{X}_i)$. *Alors, les* P_i *sont exactement les* idéaux premiers minimaux *de* A, *et l'on a*

$$\mathrm{P}_1 \bigcap \cdots \bigcap \mathrm{P}_n = (0).$$

Démonstration. — Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Alors $\mathscr{V}(\mathrm{P})$ est un fermé irréductible de X, donc est contenu dans une composante irréductible X_i, donc P contient P_i. Ceci montre que les idéaux premiers minimaux sont parmi les P_i.

Réciproquement, si $\mathrm{P}_j \supseteq \mathrm{P}_i$, alors $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{X}_j$ donc, par maximalité de X_i, on a $\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_j$ et donc $i = j$ (car $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont deux à deux distinctes). Ceci montre que P_j est un idéal premier minimal. La première assertion en résulte.

Enfin, la deuxième assertion découle des égalités :

$$(0) = \mathscr{I}(\mathrm{X}) = \mathscr{I}(\mathrm{X}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{X}_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i.$$

□

Pour la culture, signalons le résultat algébrique ci-dessous, valable pour tout anneau noethérien A, dont la preuve est essentiellement identique (ou duale, si on préfère) de celle du théorème 8.10.

Théorème 8.12. — *Soient* A *un anneau* **noethérien** *et* I *un idéal propre* **réduit** *de* A. *Il existe un nombre fini d'idéaux premiers* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ *tels que :*

$$(*) \qquad \mathrm{I} = \mathrm{P}_1 \bigcap \cdots \bigcap \mathrm{P}_n \qquad \textit{et} \quad \mathrm{P}_i \not\subseteq \mathrm{P}_j \ \textit{si } i \neq j.$$

Tout idéal premier contenant I *contient l'un des* P_i*, de sorte que les* P_i *sont exactement les éléments minimaux de l'ensemble*

$$\{\mathrm{P} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \mid \mathrm{P} \supseteq \mathrm{I}\};$$

on les appelle les **idéaux premiers minimaux au-dessus de** I.

Démonstration. — Notons $\mathscr{I}$ l'ensemble des idéaux propres réduits de A qui **ne sont pas** intersection finie d'idéaux premiers de A. Il s'agit de montrer que $\mathscr{I} = \varnothing$. Supposons, au contraire, $\mathscr{I} \neq \varnothing$. Alors, comme A est noethérien, $\mathscr{I}$ possède au moins un élément I_0 maximal pour l'inclusion.

Comme $\mathrm{I}_0 \notin \mathscr{I}$, alors I_0 n'est pas premier, donc il existe des idéaux propres J, K contenant *strictement* I_0 et tels que :

$$(\dagger) \qquad \mathrm{JK} \subseteq \mathrm{I}_0 \subseteq \mathrm{J} \cap \mathrm{K}.$$

En effet, prendre $a, b \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{I}_0$ tels que $ab \in \mathrm{I}_0$, et $\mathrm{J} = \mathrm{I}_0 + \mathrm{A}a$, $\mathrm{K} = \mathrm{I}_0 + \mathrm{A}b$; ce sont des idéaux *propres* car si on avait, par exemple, $\mathrm{J} = \mathrm{A}$, on aurait $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{I}_0$ d'où $b \in \mathrm{I}_0$, contradiction.

On vérifie sans difficulté que $\sqrt{\mathrm{JK}} = \sqrt{\mathrm{J}} \cap \sqrt{\mathrm{K}}$; par conséquent, $(\dagger)$ entraîne :

$$\sqrt{\mathrm{J}} \bigcap \sqrt{\mathrm{K}} = \sqrt{\mathrm{I}_0} = \mathrm{I}_0.$$

Alors, $\sqrt{\mathrm{J}}$ et $\sqrt{\mathrm{K}}$ sont réduits et propres (car si on avait $1 \in \sqrt{\mathrm{J}}$, on aurait $1 \in \mathrm{J}$ et $\mathrm{J} = \mathrm{A}$, contradiction), et contiennent strictement I_0, donc aucun d'eux n'appartient à $\mathscr{I}$, par maximalité de I_0. Donc, il existe des idéaux premiers $P_1, \ldots, P_r$ et $Q_1, \ldots, Q_s$ tels que

$$\sqrt{J} = \bigcap_{i=1}^{r} P_i, \qquad \sqrt{K} = \bigcap_{j=1}^{s} Q_j,$$

d'où

$$I_0 = P_1 \bigcap \cdots \bigcap P_r \bigcap Q_1 \bigcap \cdots \bigcap Q_s,$$

contredisant l'hypothèse $I_0 \in \mathscr{I}$. Cette contradiction montre que $\mathscr{I} = \varnothing$, et donc tout idéal propre réduit I de A est une intersection finie d'idéaux premiers. De plus, si l'on a une écriture

$$I = P_1 \bigcap \cdots \bigcap P_N,$$

et s'il existe $i \neq j$ tels que $P_i \subseteq P_j$, on peut supprimer P_j de l'écriture ci-dessus. On se ramène ainsi à une écriture vérifiant la condition $(*)$ du théorème.

Observons que $I = P_1 \cap \cdots \cap P_n$ contient l'idéal produit $P_1 \cdots P_n$. Par conséquent, si un idéal premier P contient I, il contient au moins l'un des P_i. Donc si P est minimal, c'est l'un des P_i, et réciproquement chaque P_i est minimal par l'hypothèse $P_i \not\supseteq P_j$ si $j \neq i$. Le théorème est démontré. □

8.2. Dimension et théorème de Chevalley. —

Définition 8.13 **(Dimension d'un espace topologique noethérien)**

Soit X un espace topologique noethérien.

a) Pour tout $x \in X$, on note $\dim_x X$ le supremum des longueurs des suites strictement décroissantes de fermés irréductibles de X contenant x (la longueur d'une suite $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n$ étant n). C'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

b) On pose $\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$; c'est encore un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Lemme 8.14. — *Soit* X *un espace topologique noethérien.*

1) *Pour tout sous-espace* $Y \subseteq X$, *on a* $\dim Y \leqslant X$. *De plus, si* X *est irréductible de dimension finie* n, *alors* $\dim Y < \dim X$ *pour tout fermé* $Y \neq X$.

2) *Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *les composantes irréductibles de* X. *Alors* $\dim X = \mathrm{Max}\{\dim X_1, \ldots, \dim X_n\}$.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 8.15 **(Dimension d'un anneau noethérien)**. — Soit A un anneau noethérien.

a) Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, on note $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ le supremum des longueurs des suites strictement croissantes d'idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{p}$, où, comme précédemment, la longueur d'une suite $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ est n, c.-à-d., le nombre de signes d'inclusion. On peut montrer que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < +\infty$, voir [**AM**, Chap. 11].

b) On note $\dim \mathrm{A}$ le supremum des $\mathrm{ht}(\mathfrak{m})$, pour $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathrm{A})$; c'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

c) Pour tout idéal I, on a $\dim(\mathrm{A}/\mathrm{I}) \leqslant \dim \mathrm{A}$. De plus, si A est intègre et $\dim \mathrm{A} < \infty$, alors $\dim(\mathrm{A}/\mathrm{I}) < \dim \mathrm{A}$ pour tout idéal $\mathrm{I} \neq 0$.

Remarque 8.16. — 1) Nagata a construit un exemple d'anneau noethérien A tel que $\dim \mathrm{A} = +\infty$, voir [**AM**], Exercice 11.4.

2) Évidemment, la dimension est une notion plus intéressante lorsqu'elle est finie. À cet égard, on les résultats suivants.

Proposition 8.17. — *Soient k un corps et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des indéterminées. On a $\dim k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] = n$ (et donc $\dim k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I} < n$ pour tout idéal non nul* I*).*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Ma1**], § (14.A), Thm. 22. □

Proposition 8.18. — *Soient* A *une k-algèbre de type fini réduite et* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$. *Alors, on a :*

$$\dim \mathrm{X} = \dim(\mathrm{A}) < \infty.$$

Démonstration. — Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$, on a $\dim_{\mathfrak{m}} \mathrm{X} = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$; la preuve de cette égalité est laissée au lecteur. Il en résulte que $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{A} < \infty$. □

Exemple 8.19. — La variété algébrique affine $\mathrm{Max}(\mathbb{C}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]/(\mathrm{XZ}, \mathrm{YZ})) \subset \mathbb{C}^3$ est formée de deux composantes irréductibles : le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\mathrm{Z} = 0$, et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$.

Définition 8.20. — Soit V une variété algébrique affine irréductible. Alors son algèbre de fonctions régulières $k[\mathrm{V}]$ est *intègre*. On note $k(\mathrm{V})$ son corps des fractions ; on l'appelle le **corps des fonctions rationnelles** sur V.

Définition 8.21. — Pour tout corps K extension de type fini de k, on notera $\deg\mathrm{tr}_k \mathrm{K}$ son degré de transcendance sur k ; voir par exemple [**Jac80**, § 8.12] ou [**La**, § X.1] ou [**Po1**], Chap. VII, § 15.9.

On admettra le résultat suivant ; voir, par exemple, [**Hu2**, 3.2, 3.4.A].

Théorème 8.22. — *Soit* X *une variété algébrique affine irréductible. On a :*

$$\forall\, x \in \mathrm{X}, \qquad \dim_x \mathrm{X} = \deg\mathrm{tr}_k\, k(\mathrm{X}) = \dim \mathrm{X}.$$

Définition 8.23. — Soient X, Y deux variétés algébriques *affines* et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme. On dit que f est **dominant** si $f(\mathrm{X})$ est dense dans Y, c.-à-d., si $\overline{f(\mathrm{X})} = \mathrm{Y}$.

On vérifie que ceci équivaut à ce que le comorphisme $f^* : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}]$ soit injectif.

On admet le théorème suivant (voir [**Die**, § 4]), qui est une variante du théorème de constructibilité de Chevalley, voir [**Laf77**, Chap.7, § 3.2] ou [**Ma1**, (6.E)].

***Théorème 8.24* (Chevalley).** — *Soient* X, Y *deux variétés algébriques affines* **irréductibles** *et* $f : X \to Y$ *un morphisme dominant.*

a) *Il existe un ouvert dense* V *de* Y, *contenu dans* $f(X)$, *tel que, pour tout* $v \in V$, *toute composante irréductible de* $f^{-1}(v)$ *soit de dimension* $\dim X - \dim Y \geqslant 0$.

b) *Pour tout* $y \in f(X)$ *et toute composante irréductible* Z *de* $f^{-1}(v)$, *on a* $\dim Z \geqslant \dim X - \dim Y$.

b′) *La fonction* $X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ *est semi-continue supérieurement, c.à.d., pour tout* n, *l'ensemble des* $x \in X$ *tels qu'il existe une composante* Z *de* $f^{-1}(f(x))$ *contenant* x *et de dimension* $\geqslant n$, *est fermé.*

***Corollaire 8.25*.** — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés algébriques affines. Alors* $f(X)$ *contient un ouvert dense de* $\overline{f(X)}$.

Démonstration. — Remplaçant si nécessaire Y par $\overline{f(X)}$, on peut supposer que f est dominant. On se ramène alors au cas irréductible comme suit.

Notons $X_1, \dots, X_n$ les composantes irréductibles de X et posons $Y_i = \overline{f(X_i)}$. Alors, d'une part, $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ égale Y, car c'est un fermé contenant $f(X)$. D'autre part, chaque Y_i est irréductible donc, d'après le théorème précédent, $f(X_i)$ contient un ouvert dense U_i de Y_i. Alors $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ est un ouvert dense de Y contenu dans $f(X)$. □

8.3. Composante neutre. —

***Proposition 8.26*.** — *Soit* G *un groupe algébrique affine.*

(a) *Les composantes connexes de* G *coïncident avec les composantes irréductibles.*

(b) *Soit* G^0 *la composante connexe de l'identité ; c'est un sous-groupe fermé normal d'indice fini. Tout sous-groupe fermé connexe est contenu dans* G^0.

(c) *Tout sous-groupe fermé d'indice fini contient* G^0.

Démonstration. — Soient $X_1, \dots, X_m$ les composantes irréductibles de G contenant e. Notons $Y = X_1 \cdots X_m$ l'image de $X_1 \times \cdots X_m$ par le morphisme $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1 \cdots x_m$. Alors Y est une partie irréductible de G contenant e et est donc contenue dans un certain X_i, disons X_1. Comme chaque X_i est contenu dans Y, il en résulte $m = 1$. Donc e est contenu dans une unique composante irréductible ; notons-la G^0. C'est un fermé de G, stable par multiplication d'après ce qui précède.

Pour tout $g \in \mathrm{G}$, $g^{-1}\mathrm{G}^0$ est une composante irréductible de G, car image de G^0 par un automorphisme de G. De plus, si $g \in \mathrm{G}^0$ alors $g^{-1}\mathrm{G}^0$ contient e et est donc égal à G^0. Ceci prouve que G^0 est un sous-groupe fermé. De même, pour tout $g \in \mathrm{G}$, $g\mathrm{G}^0g^{-1}$ est une composante irréductible de G contenant e, et donc $g\mathrm{G}^0g^{-1} = \mathrm{G}^0$. Par conséquent, G^0 est un sous-groupe normal.

Comme chaque classe $g\mathrm{G}^0$ est une composante irréductible de G, le théorème 8.10 entraîne que $[\mathrm{G} : \mathrm{G}^0] < \infty$. Les classes $g\mathrm{G}^0$, étant en nombre fini, sont aussi ouvertes, et sont donc les composantes connexes de G.

Enfin, si H est un sous-groupe fermé connexe, alors $\mathrm{H} \cap \mathrm{G}^0$ est ouvert et fermé et non-vide (il contient e), donc égal à H, d'où $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}^0$. Ceci prouve (a) et (b).

Prouvons (c). Si H est un sous-groupe fermé d'indice fini, il est aussi ouvert, et est donc une réunion de composantes connexes de G. Comme $e \in \mathrm{H}$, alors H contient G^0. □

Remarque 8.27. — Les groupes algébriques non-connexes se rencontrent naturellement. Par exemple, soient T le sous-groupe des matrices diagonales dans SL_2 et N son *normalisateur* dans SL_2 (c.à.d. $\mathrm{N} = \{g \in \mathrm{SL}_2 \mid g\mathrm{T}g^{-1} = \mathrm{T}\}$). Alors $\mathrm{N}^0 = \mathrm{T}$ et on a une suite exacte $1 \to \mathrm{T} \to \mathrm{N} \to \{\pm 1\} \to 1$; mais N n'est pas un *produit semi-direct* de $\{\pm 1\}$ par T (exercice !).

8.4. Morphismes de groupes algébriques. — On aura besoin des résultats suivants.

Lemme 8.28. — *Soient* G *un groupe algébrique affine,* U *un ouvert et* Γ *une partie dense. Alors* $\mathrm{G} = \mathrm{U}\Gamma = \Gamma\mathrm{U}$.

Démonstration. — Soit $g \in \mathrm{G}$. L'ouvert $g\mathrm{U}$ rencontre Γ, et donc $g \in \Gamma\mathrm{U}$. En considérant $\mathrm{U}g$, on obtient de même que $\mathrm{G} = \mathrm{U}\Gamma$. □

Proposition 8.29. — *Soient* G *un groupe algébrique affine et* H *un sous-groupe abstrait de* G.

(a) $\overline{\mathrm{H}}$ *est un sous-groupe fermé de* G.

(b) *Si* H *contient un ouvert non-vide de* $\overline{\mathrm{H}}$*, alors* $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{H}}$.

Démonstration. — Prouvons (a). Pour $g \in \mathrm{G}$, notons λ_g la translation à gauche $g' \mapsto gg'$ et δ_g la translation à droite $g' \mapsto g'g$. Soit $h \in \mathrm{H}$. L'image inverse du fermé $\overline{\mathrm{H}}$ par l'application continue λ_h est un fermé contenant H et donc $\overline{\mathrm{H}}$. Par conséquent, $\mathrm{H}{\cdot}\overline{\mathrm{H}} \subseteq \overline{\mathrm{H}}$.

Soit maintenant $y \in \overline{\mathrm{H}}$. L'image inverse du fermé $\overline{\mathrm{H}}$ par l'application continue δ_y est un fermé contenant H et donc $\overline{\mathrm{H}}$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{H}}{\cdot}\overline{\mathrm{H}} \subseteq \overline{\mathrm{H}}$. Enfin, notons τ le morphisme $g \mapsto g^{-1}$. Alors le fermé $\tau^{-1}(\overline{\mathrm{H}})$ contient H et donc $\overline{\mathrm{H}}$, d'où $\tau(\overline{\mathrm{H}}) \subseteq \overline{\mathrm{H}}$. Ceci prouve (a).

Prouvons (b). Soit U un ouvert non-vide de $\overline{\mathrm{H}}$ contenu dans H. Alors H est égal à $\bigcup_{h\in \mathrm{H}} h\mathrm{U}$, et est donc ouvert dans $\overline{\mathrm{H}}$. Il y est aussi dense, et donc d'après le lemme 8.28 on a $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}{\cdot}\mathrm{H} = \mathrm{H}$. □

Soit G un groupe algébrique affine. Comme les composantes connexes de G sont des translatées de G^0, elles ont toutes la même dimension. Par conséquent, $\dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{G}^0$.

Théorème 8.30. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes algébriques affines.*
(a) $\operatorname{Ker}\phi$ *est un sous-groupe fermé de* G.
(b) $\operatorname{Im}\phi$ *est un sous-groupe fermé de* G'.
(c) $\phi(\mathrm{G}^0) = \phi(\mathrm{G})^0$.
(d) *On a* $\dim \phi(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{G} - \dim \operatorname{Ker}\phi$.

Démonstration. — (a) est clair. D'autre part, $\operatorname{Im}\phi$ est un sous-groupe de G' et contient, d'après le corollaire 8.25, un ouvert dense de $\overline{\operatorname{Im}\phi}$. On a donc $\operatorname{Im}\phi = \overline{\operatorname{Im}\phi}$, d'après la proposition 8.29. Ceci prouve (b).

De même, $\phi(\mathrm{G}^0)$ est un sous-groupe fermé de $\phi(\mathrm{G})$. D'une part, il est connexe, donc contenu dans $\phi(\mathrm{G})^0$. D'autre part, comme G/G^0 est fini, $\phi(\mathrm{G}^0)$ est d'indice fini dans $\phi(\mathrm{G})$, donc contient $\phi(\mathrm{G})^0$ d'après le point (c) de la proposition 8.26. Donc $\phi(\mathrm{G}^0) = \phi(\mathrm{G})^0$, ce qui prouve (c).

Enfin, appliquons l'assertion a) du théorème 8.24 au morphisme $\phi : \mathrm{G}^0 \to \phi(\mathrm{G}^0)$. Chaque fibre étant un translaté de $\operatorname{Ker}\phi$, et donc de dimension $\dim \operatorname{Ker}\phi$, on obtient (d). □

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.
[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.
[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.
[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.
[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.
[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.
[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.
[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.
[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.
[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.
[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.
[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.
[Dold] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer Classics in Mathematics, 1995.
[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.
[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.
[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.
[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.
[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.
[Po1] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2007/08 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo
[Po2] P. Polo, Introduction aux groupes et algèbres de Lie, cours de M2 2006/07 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo
[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.
[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.
[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.
[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.
[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
[Spi] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish, 1970, 3rd edition 2005.
[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.
[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.
[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.
[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.
[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.
[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.