II. GROUPES ALGÉBRIQUES SUR $\mathbb{C}$
SÉANCES DU 12 ET 13/12/07

9. Variétés algébriques non nécessairement affines

9.1. Motivation. — [12] Soient G un groupe algébrique affine sur $\mathbb{C}$ et H un sous-groupe fermé. On voudrait munir le quotient G/H d'une structure de variété algébrique.

Considérons l'exemple suivant : $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ opère de façon naturelle sur $\mathbb{C}^2$ et l'opération est transitive sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et sur l'ensemble des *droites* de $\mathbb{C}^2$, noté $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou simplement $\mathbb{P}^1$, et appelé l'espace projectif de dimension 1. Notons (e_1, e_2) la base canonique ; le stabilisateur de la droite $\mathbb{C}e_1$ est le sous-groupe

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

Par conséquent, le quotient G/B est l'espace projectif $\mathbb{P}^1$. On verra que celui-ci est muni naturellement d'une structure de *variété algébrique* **non-affine**. Pour cela, il faut commencer par définir la notion de variété algébrique en général.

9.2. Variétés algébriques quasi-affines. — Soit A une k-algèbre réduite et soit $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$, muni de la topologie de Zariski.

On note k^{X} la k-algèbre de *toutes* les fonctions $\mathrm{X} \to k$. Tout élément $f \in \mathrm{A}$ définit la fonction $x \mapsto f(x)$ sur X, et d'après le lemme ci-dessous f est déterminée par cette fonction. Donc, on peut identifier les éléments de A aux fonctions qu'ils définissent sur X.

Lemme 9.1. — *Le morphisme d'algèbres* $\mathrm{A} \to k^{\mathrm{X}}$ *est injectif.*

Démonstration. — Soit f dans le noyau de ce morphisme. Comme f s'annule sur $\mathrm{X} = \mathscr{V}(0)$ alors, d'après le théorème des zéros de Hilbert, $f \in \sqrt{0}$, d'où $f = 0$ puisque A est réduite. □

[12] version du 12/12/07.

Soit U un ouvert de Zariski de X. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$ le fermé complémentaire et soit $\mathrm{I} = \mathscr{I}(\mathrm{F})$ son idéal dans A. Comme A est noethérienne, I est engendré par un nombre fini d'éléments $f_1, \dots, f_r$. On notera $\mathrm{D}(f_i)$ l'ouvert affine principal :

$$\mathrm{D}(f_i) = \{x \in \mathrm{X} \mid f_i(x) \neq 0\} = \{x \in \mathrm{X} \mid f_i \notin \mathfrak{m}_x\}$$

(noté auparavant U_{f_i}). Comme $\mathrm{F} = \mathscr{V}(\mathrm{I}) = \bigcap_{i=1}^r \mathscr{V}(f_i)$, on obtient que

$$\mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{D}(f_i). \tag{1}$$

Par conséquent, U est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $\mathrm{D}(f_i) \cong \mathrm{Max}(\mathrm{A}_{f_i})$.

Cette donnée, c.-à-d., le recouvrement (1) + **les algèbres** A_{f_i}, munit U d'une structure de *variété algébrique quasi-affine* au sens ci-dessous.

***Définition 9.2* (La catégorie des variétés quasi-affines)**. — 1) Une variété algébrique quasi-affine est un ouvert de Zariski U d'une variété algébrique affine X.

2) Soient $\mathrm{U} \subset \mathrm{Max}(\mathrm{B})$, $\mathrm{U}' \subset \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ deux variétés algébriques quasi-affines. Un **morphisme** $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ est une application continue qui vérifie la condition suivante :

($*$) il existe un recouvrement $\mathrm{U}' = \mathrm{D}(g_1) \cup \cdots \cup \mathrm{D}(g_n)$ et des recouvrements

$$\phi^{-1}(\mathrm{D}(g_j)) = \mathrm{D}(f_{j,1}) \bigcup \cdots \bigcup \mathrm{D}(f_{j,n_j})$$

de chaque $\phi^{-1}(\mathrm{D}(g_j))$, tels que pour toute fonction régulière $\psi \in k[\mathrm{D}(g_j)] = \mathrm{A}_{g_j}$, la restriction de $\psi \circ \phi$ à chaque $\mathrm{D}(f_{j,i})$ appartienne à $k[\mathrm{D}(f_{j,i})] = \mathrm{B}_{f_{j,i}}$.

On vérifie que la composée de deux morphismes $\mathrm{U} \to \mathrm{U}' \to \mathrm{U}''$ est un morphisme.

3) On appelle « fonction régulière sur U » tout morphisme $\phi : \mathrm{U} \to k$. Comme les applications $k \times k \to k$, $(x, y) \mapsto x - y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont des morphismes, les fonctions régulières sur U forment une algèbre, notée $k[\mathrm{U}]$.

4) Un morphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ est un **isomorphisme** s'il existe un morphisme $\psi : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{U}'}$.

Lemme 9.3. — *Si* U *est un ouvert de Zariski de la variété algébrique affine* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$*, l'inclusion* $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *est un morphisme au sens de la définition* 9.2.

Démonstration. — L'inclusion $\tau : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est continue, puisque U est muni de la topologie induite. Considérons les recouvrements $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ et

$$\tau^{-1}(\mathrm{X}) = \mathrm{U} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{D}(f_i). \tag{1}$$

Alors, pour tout $\psi \in k[\mathrm{X}] = \mathrm{A}$, la restriction de $\psi \circ \tau$ à $\mathrm{D}(f_i)$ n'est autre que la restriction de ψ à $\mathrm{D}(f_i)$, c.-à-d., l'image de $\psi \in \mathrm{A}$ dans A_{f_i}. Ceci montre que τ est un morphisme. □

Lemme 9.4. — *Soient* A, B *deux k-algèbres de type fini réduites,* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{B})$ *et* $\mathrm{Y} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$*, et soit* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés algébriques affines au sens de la définition 6.8, c.-à-d., le comorphisme*

$$\phi^* : f \mapsto f \circ \phi$$

envoie A *dans* B*. Alors ϕ est un morphisme de variétés algébriques quasi-affines au sens de la définition* 9.2*.*

Démonstration. — D'abord, ϕ est **continu**. En effet, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathrm{A} = k[\mathrm{Y}]$. Alors

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\mathscr{V}(\mathfrak{a})) &= \{x \in \mathrm{X} \mid f(\phi(x)) = 0, \quad \forall f \in \mathfrak{a}\}\\ &= \{x \in \mathrm{X} \mid \phi^*(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{m}_x\} = \mathscr{V}(\phi^*(\mathfrak{a})).\end{aligned}$$

Ensuite, la condition $(*)$ pour les recouvrements triviaux $\mathrm{U}' = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ et $\phi^{-1}(\mathrm{U}') = \mathrm{Max}(\mathrm{B})$ est précisément la condition que $f \circ \phi = \phi^*(f) \in \mathrm{B}$, pour tout $f \in \mathrm{A}$. Ceci prouve le lemme. □

Remarque 9.5. — Soit B une k-algèbre de type fini réduite. Pour tout $f \in \mathrm{B}$, l'application $x \mapsto f(x)$ est un morphisme $\mathrm{Max}(\mathrm{B}) \to k = \mathbb{A}^1$, car $k[\mathbb{A}^1] = k[\mathrm{T}]$ est engendré par T et $\mathrm{T} \circ f = f \in \mathrm{B}$, d'où $\mathrm{P} \circ f = \mathrm{P}(f) \in \mathrm{B}$ pour tout $\mathrm{P} \in k[\mathrm{T}]$. Donc les éléments de B, c.-à-d., les « fonctions régulières sur $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{B})$ » au sens des définitions 6.5 ou 6.26, sont des fonctions régulières sur la variété quasi-affine X au sens de la définition 9.2. Il n'est pas immédiatement évident que la réciproque soit vraie ; ceci est le contenu du théorème qui suit.

La définition d'application régulière $\mathrm{X} \to k$ (et de morphisme) donnée en 9.2 est une définition « *locale* ». Dans le cas où $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ est affine, elle coïncide avec la définition « *globale* » $k[\mathrm{X}] = \mathrm{A}$, d'après le théorème suivant.

Théorème 9.6 **(Morphismes $\mathrm{Max}(\mathrm{A}) \to k$)**. — *Soient* A *une k-algèbre de type fini réduite et* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$*. Supposons donné un recouvrement*

$$\mathrm{X} = \mathrm{D}(g_1) \bigcup \cdots \bigcup \mathrm{D}(g_n)$$

et une fonction $\phi : \mathrm{X} \to k$ telle que chaque $g_i\phi$ coïncide sur $\mathrm{D}(g_i)$ *avec la fonction $x \mapsto a_i(x)$, pour un certain $a_i \in \mathrm{A}$. Alors $\phi \in \mathrm{A}$.*

Démonstration. — Pour tout i, la fonction $(g_i\phi - a_i)g_i$ est nulle sur $\mathrm{D}(g_i)$ et sur $\mathscr{V}(g_i)$, donc sur X tout entier. Donc $g_i^2\phi$ coïncide sur X avec a_ig_i. D'autre part, comme $\mathrm{X} = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{D}(g_i)$ et $\mathrm{D}(g_i^2) = \mathrm{D}(g_i)$, on a

$$\mathscr{V}(\sum_i \mathrm{A}g_i^2) = \bigcap_{i=1} \mathscr{V}(\mathrm{A}g_i^2) = \varnothing.$$

Donc, d'après le théorème des zéros de Hilbert, il existe $b_1, \dots, b_n \in \mathrm{A}$ tels que $1 = \sum_i b_i g_i^2$. Posons $a = \sum_i b_i a_i g_i$. Alors,

$$\phi = \sum_i b_i g_i^2 \phi = \sum_i b_i a_i g_i = a,$$

(égalité de fonctions sur X), d'où $\phi = a$ d'après le lemme 9.1. □

Remarque 9.7. — Tout ce qui précède peut se formuler en définissant le *faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ des fonctions régulières* sur $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$. (Voir n'importe quel livre de géométrie algébrique, par exemple, [**Die**], [**Ha**], [**Ke**], [**Ku**, Chap. III], ou [**Pe**]).

9.3. Variétés algébriques « abstraites ». — On peut maintenant définir les variétés algébriques. On s'écarte ici de la présentation orale lors du cours, en adoptant la terminologie courante « variétés/variétés séparées » plutôt que la terminologie ancienne « prévariétés/variétés » utilisée en cours. Plus loin, on précisera que l'on ne considèrera que des variétés algébriques *séparées*.

***Définition 9.8* (Variétés algébriques)**. — 1) Une structure de variété algébrique sur un ensemble X est la donnée d'un nombre fini de sous-ensembles $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n$ de X tels que $\mathrm{X} = \bigcup \mathrm{U}_i$, et, pour chaque i, d'une bijection ϕ_i de U_i sur une variété algébrique affine V_i, de façon à ce que soient satisfaites les conditions suivantes : pour tout $i \neq j$, $\mathrm{V}_{i,j} := \phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)$ est un ouvert de Zariski de V_i et

$$(*) \qquad \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathrm{V}_{ij} \longrightarrow \mathrm{V}_{ji}$$

est un isomorphisme de variétés quasi-affines.

Dans ce cas, on définit une topologie sur X en déclarant qu'une partie U est ouverte si et seulement si chaque $\phi_i(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_i)$ est ouvert dans V_i. (On vérifie que ceci est bien une topologie).

Puis, à tout ouvert U de X, on associe son algèbre des fonctions régulières $k[\mathrm{U}]$ en disant qu'une fonction $\psi : \mathrm{U} \to k$ appartient à $k[\mathrm{U}]$ si, pour tout i, la restriction de $\psi \circ \phi_i^{-1}$ à $\phi_i(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_i)$ est une fonction régulière sur l'ouvert quasi-affine $\phi_i(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_i)$. En particulier, il résulte de l'hypothèse $(*)$ que

$$k[\mathrm{U}_i] = \{\psi \circ \phi_i : \mathrm{U}_i \longrightarrow k \mid \psi \in k[\mathrm{V}_i]\}.$$

2) Si Y est une seconde variété, définie par des couples (U'_j, η_j), pour $j = 1, \dots, m$, un **morphisme** $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une application continue $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ telle que, pour tout $\psi \in k[\mathrm{U}'_j]$, on ait $\psi \circ \phi \in k[\phi^{-1}(\mathrm{U}'_j)]$.

Lemme 9.9. — *Toute variété algébrique est un espace topologique noethérien* (*cf.* § 8.1)*. Par conséquent, on peut parler de composantes irréductibles, et de variétés algébriques irréductibles.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

D'après la proposition 6.14, si $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Max}(\mathrm{B})$ sont des variétés algébriques affines, alors $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est réduite et $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ s'identifie à $\mathrm{Max}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})$, muni de la topologie de Zariski correspondante. Le produit de deux variétés algébriques arbitraires est défini de la façon suivante (voir [**Die**, § 2.4]).

Proposition 9.10. — *Soient* X *et* Y *deux variétés algébriques, définies respectivement par les cartes* $(\phi_i : \mathrm{U}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *et* $(\psi_j : \mathrm{U}'_j \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$

(a) *Il existe sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *une unique structure de variété algébrique, donnée par les cartes*

$$\phi_i \times \psi_j : \mathrm{U}_i \times \mathrm{U}'_j \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}_i \times \mathrm{W}_j,$$

où $\mathrm{V}_i \times \mathrm{W}_j$ *est le produit des variétés algébriques affines* V_i *et* W_j.

(b) *Les projections* $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ *sont des morphismes, et* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *est le* produit de X et Y dans la catégorie des variétés algébriques*, c.-à-d., pour toute variété algébrique* Z*, on a :*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{X}) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}),$$

c.-à-d., étant donnés des morphismes $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$*, l'application* $\phi : z \mapsto (f(z), g(z))$ *est un morphisme, et c'est l'unique morphisme* $\phi : \mathrm{Z} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *tel que* $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} \circ \phi = f$ *et* $\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} \circ \phi = g$.

(c) *Pour tout* $x_0 \in \mathrm{X}$, $\{x_0\} \times \mathrm{Y}$ *est un fermé de* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$*, isomorphe à* Y*, et de même pour* $\mathrm{X} \times \{y_0\}$*, pour* $y_0 \in \mathrm{Y}$.

Proposition 9.11. — *Soient* X, Y *des variétés algébriques. Si* X *et* Y *sont irréductibles, alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *l'est aussi.*

Démonstration. — D'après le point (c) ci-dessus, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$, les applications $\tau_x : \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}, z \mapsto (x, z)$ et $\tau_y : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, $u \mapsto (u, y)$ sont continues. Supposons $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$. Alors, pour chaque $y \in \mathrm{Y}$ on a $\mathrm{X} = \tau_y^{-1}(\mathrm{F}_1)$ ou $\mathrm{X} = \tau_y^{-1}(\mathrm{F}_2)$. Par conséquent, $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$, où $\mathrm{Y}_i = \{y \in \mathrm{Y} \mid \tau_y(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_i\}$. Mais $\mathrm{Y}_i = \bigcap_{x \in \mathrm{X}} \tau_x^{-1}(\mathrm{F}_i)$ et donc Y_1, Y_2 sont fermés. Ceci implique que, disons, $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1$ et donc $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \mathrm{F}_1$. □

***Définition 9.12* (Variétés algébriques séparées)**. — Soit X une variété algébrique. On dit que X est une variété algébrique **séparée** si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) La diagonale Δ_{X} est fermée dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ (muni de la topologie de Zariski).

(ii) pour tout couple (f, g) de morphismes d'une variété Y dans X, l'ensemble des y tels que $f(y) = g(y)$ est fermé.

Remarque 9.13. — (i) résulte de (ii) appliqué aux deux projections de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ sur X. Réciproquement, si f, g sont des morphismes $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, leur lieu de coïncidence est l'image inverse de Δ_{X} par le morphisme $\phi = (f, g)$. Ceci prouve l'équivalence des deux conditions.

Exemple 9.14. — Voici un exemple de variété algébrique non séparée. On prend X = la réunion disjointe de l'espace affine k^n et d'un point $0'$, et l'on prend le recouvrement $\mathrm{X} = \mathrm{U} \cup \mathrm{U}'$, où $\mathrm{U} = k^n$ et

$$\mathrm{U}' = (k^n \setminus \{0\}) \cup \{0'\},$$

qu'on identifie à une seconde copie de k^n de façon évidente. Cette variété n'est pas séparée, car on a deux morphismes distincts $f, g : k^n \to \mathrm{X}$ qui coïncident sur $k^n \setminus \{0\}$ mais diffèrent en 0 : $f(0) = 0$ tandis que $g(0) = 0'$.

Théorème 9.15. — *Chaque espace affine $\mathbb{A}^n$ est séparé, ainsi que toute variété algébrique quasi-affine.*

Démonstration. — $k[\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n] = k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$ et la diagonale $\Delta_{\mathbb{A}^n}$ est définie par les équations $\mathrm{X}_i - \mathrm{Y}_i = 0$, donc est une sous-variété algébrique fermée. Ceci montre que $\mathbb{A}^n$ est une variété algébrique séparée.

Soit U un ouvert de Zariski d'une variété algébrique affine $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, et soient Y une variété algébrique arbitraire et f, g deux morphismes $\mathrm{Y} \to \mathrm{U}$. Montrons que le lieu de coïncidence

$$\mathrm{Z} = \{y \in \mathrm{Y} \mid f(y) = g(y)\}$$

est fermé dans Y. D'après les lemmes 9.3 et 9.4, les inclusions $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ sont des morphismes et donc f, g peuvent être considérés comme des morphismes $\mathrm{Y} \to \mathbb{A}^n$. Comme $\mathbb{A}^n$ est séparé, on obtient que Z est fermé dans Y. Ceci montre que U est séparé. □

Proposition 9.16. — *L'espace projectif $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$ est une variété algébrique irréductible et séparée.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{V} = k^{n+1}$ et $\mathrm{X} = k^{n+1} \setminus \{0\}$; c'est un ouvert de Zariski de k^{n+1}. Soit $(e_0, \ldots, e_n)$ une base *arbitraire* de V, d'où des coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ sur V. (On peut bien sûr prendre la base canonique, mais il est utile de considérer une base arbitraire, voir plus bas).

Comme ensemble, $\mathbb{P}^n$ est le quotient de X par k^*, c.-à-d., c'est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence :

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (tx_0, \ldots, tx_n), \qquad \forall\, (x_0, \ldots, x_n) \in \mathrm{X}, \quad t \in k^*.$$

On note $[x_0, \ldots, x_n]$ l'image de $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{P}^n$; on dit que $[x_0, \ldots, x_n]$ sont les « *coordonnées homogènes* » du point de $\mathbb{P}^n$ correspondant.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on pose

$$\mathrm{U}_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Fixons deux indices i et j, avec $i \neq j$. Alors l'application $\phi_i : [x_0, \dots, x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i} = 1, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ est une bijection de U_i sur la variété algébrique affine

$$\mathrm{V}_i = \{(y_0, \dots, y_n) \in k^{n+1} \mid y_i = 1\},$$

d'où $k[\mathrm{V}_i] = k[\mathrm{Y}_0, \dots, \mathrm{Y}_n]/(\mathrm{Y}_i - 1)$ (isomorphe à un anneau de polynômes en n variables). De même, ϕ_j est une bijection de U_j sur

$$\mathrm{V}_j = \{(z_0, \dots, z_n) \in k^{n+1} \mid z_j = 1\}.$$

Alors $\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)$ est l'ouvert affine principal $\mathrm{D}(y_j)$ de V_i, c.-à-d.,

$$\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j) = \{(y_0, \dots, y_n) \in k^{n+1} \mid y_i = 1, \quad y_j \neq 0\},$$

et de même $\phi_j(\mathrm{U}_j \cap \mathrm{U}_i)$ est l'ouvert affine principal $\mathrm{D}(z_i)$ de V_j, c.-à-d.,

$$\phi_j(\mathrm{U}_j \cap \mathrm{U}_i) = \{(z_0, \dots, z_n) \in k^{n+1} \mid z_j = 1, \quad z_i \neq 0\}.$$

Pour $[x] \in \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$, on a $\phi_i([x]) = y$ et $\phi_j([x]) = z$, avec

$$y_\ell = \frac{x_\ell}{x_i}, \qquad z_\ell = \frac{x_\ell}{x_j},$$

et $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathrm{D}(y_j) \to \mathrm{D}(z_i)$ est donné par $y_\ell \mapsto z_\ell = y_\ell y_j^{-1}$, qui est bien un morphisme de $\mathrm{D}(y_j)$ dans $\mathrm{D}(z_i)$, puisque ses « coordonnées » y_ℓ/y_j sont des fonctions régulières sur $\mathrm{D}(y_j)$. De plus, c'est un isomorphisme, son inverse étant le morphisme $z_\ell \mapsto y_\ell = z_\ell z_i^{-1}$.

Ceci montre que $\mathbb{P}^n$ est une variété algébrique. On voit facilement que l'application $\mathrm{X} \to \mathbb{P}^n$, $x \mapsto [x]$ est un morphisme surjectif. Comme X est irréductible (étant un ouvert de k^{n+1}, qui est irréductible), il en résulte que $\mathbb{P}^n$ est irréductible.

Pour montrer que $\mathbb{P}^n$ est séparé, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 9.17. — *Tout ensemble fini de points $p_1, \dots, p_r$ est contenu dans un ouvert affine* U_0.

Démonstration. — Soient $\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_r$ les droites de V correspondant aux points p_i, et soient $\mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_r$ les hyperplans correspondant de l'espace dual V^*. Comme $\mathrm{V}^* = k^{n+1}$ est irréductible, la réunion des H_i est propre, donc il existe une forme linéaire $\phi_0 \in \mathrm{V}^*$ telle que $\phi_0(\mathrm{D}_i) \neq 0$, pour $i = 1, \dots, r$. Complétant ϕ_0 en une base $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ de V^* et notant $(e_0, \dots, e_n)$ la base duale de V, on obtient ainsi que les points $p_1, \dots, p_r$ appartiennent tous à l'ouvert affine principal U_0. □

On peut maintenant montrer que $\mathbb{P}^n$ est séparé. Soient $p \neq q$ deux points distincts de $\mathbb{P}^n$. D'après ce qui précède, ils sont contenus dans un ouvert affine principal $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0$.

Comme U est séparé, d'après le théorème 9.15, il existe un voisinage ouvert V de (p,q) dans $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$ ne rencontrant pas Δ_{U}. Comme $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$ est ouvert dans $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$, alors V est un voisinage ouvert de (p,q) dans $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$, et l'on a
$$\mathrm{V}\cap\Delta^n_{\mathbb{P}}\subseteq\mathrm{V}\cap\Delta_{\mathrm{U}}=\varnothing.$$
Ceci montre que $\Delta^n_{\mathbb{P}}$ est fermée dans $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$, donc $\mathbb{P}^n$ est séparé. □

Remarque 9.18. — Reprenons les notations de la preuve de la proposition. Il est commode d'introduire des indéterminées $\mathrm{X}_0,\dots,\mathrm{X}_n$ et d'identifier chaque $k[\mathrm{V}_i]$ au sous-anneau de $k[\mathrm{X}_0,\dots,\mathrm{X}_n,1/\mathrm{X}_0\cdots\mathrm{X}_n]$ suivant :
$$k[\mathrm{V}_i]=k[\frac{\mathrm{X}_\ell}{\mathrm{X}_i}\mid\ell=0,\dots,n].$$
Alors $k[\mathrm{V}_{ij}]$ et $k[\mathrm{V}_{ji}]$ s'identifient au même sous-anneau
$$k[\frac{\mathrm{X}_0}{\mathrm{X}_i},\dots,\frac{\mathrm{X}_n}{\mathrm{X}_i},\frac{\mathrm{X}_i}{\mathrm{X}_j}]=k[\frac{\mathrm{X}_0}{\mathrm{X}_j},\dots,\frac{\mathrm{X}_n}{\mathrm{X}_j},\frac{\mathrm{X}_j}{\mathrm{X}_i}],$$
et le « changement de cartes » $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ est donné par l'automorphisme
$$\frac{\mathrm{X}_\ell}{\mathrm{X}_i}\mapsto\frac{\mathrm{X}_\ell}{\mathrm{X}_j}=\frac{\mathrm{X}_\ell}{\mathrm{X}_i}\frac{\mathrm{X}_i}{\mathrm{X}_j}$$
de cet anneau.

9.4. Compléments sur les variétés algébriques. — [13]

Proposition 9.19. — *Soit* X *une variété algébrique et* Y *une partie fermée de* X. *Alors* Y *est muni de façon naturelle d'une structure de variété, et l'inclusion* $\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathrm{X}$ *est un morphisme de variétés algébriques.*

Démonstration. — Soient $\phi_i:\mathrm{U}_i\xrightarrow{\sim}\mathrm{V}_i$ $(i=1,\dots,n)$ des cartes définissant la structure de variété sur X. Comme chaque ϕ_i est un homéomorphisme de U_i sur V_i, alors $\phi_i(\mathrm{Y}\cap\mathrm{U}_i)$ est un fermé de Zariski de V_i, donc une variété algébrique affine. La restriction de $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ induit alors un isomorphisme de variétés quasi-affines
$$\phi_i(\mathrm{Y}\cap\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j)\xrightarrow{\sim}\phi_j(\mathrm{Y}\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U}_i),$$
donc Y est une variété algébrique. Enfin, l'inclusion $\tau:\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathrm{X}$ est un morphisme de variétés algébriques car elle est continue et, pour tout i, on a un diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} k[\mathrm{U}_i] & \xrightarrow{\tau^*} & k[\mathrm{U}_i\cap\mathrm{Y}] \\ {\scriptstyle\phi_i^*}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle\phi_i^*} \\ k[\mathrm{V}_i] & \xrightarrow{\mathrm{res}} & k[\phi_i(\mathrm{Y}\cap\mathrm{U}_i)] \end{array}$$
(où res désigne l'application de restriction), qui montre que $\psi\circ\tau\in k[\mathrm{U}_i\cap\mathrm{Y}]$ pour tout $\psi\in k[\mathrm{U}_i]$. □

---

[13] Ce paragraphe n'a pas été traité en cours.

Proposition 9.20. — *Soit* X *une variété algébrique et* U *une partie ouverte de* X*. Alors* U *est muni de façon naturelle d'une structure de variété, et l'inclusion* $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *est un morphisme de variétés algébriques.*

Démonstration. — Laissée au lecteur, voir les références données en 9.7. □

On renvoie à la définition 2.3 pour la notion de partie *localement fermée* d'un espace topologique. En combinant les deux propositions précédentes ; on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 9.21. — *Tout sous-espace localement fermé* Y *d'une variété algébrique* X *est muni de façon naturelle d'une structure de variété algébrique. On dira que* Y *est une sous-variété localement fermée* (*resp. ouverte ou fermée, si* Y *est ouvert ou fermé*) *de* X*.*

En particulier, si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *est un morphisme et* W *une sous-variété fermée* (*resp. ouverte*) *de* Z*, alors* $\mathrm{V} = f^{-1}(\mathrm{W})$ *est une sous-variété fermée* (*resp. ouverte*) *de* X*.*

***Définition 9.22* (Ouverts affines).** — Soient X une variété algébrique et U un ouvert de X. On dit que U est un *ouvert affine* si U est isomorphe, comme variété algébrique, à une variété algébrique affine.

***Définition 9.23* (Variétés quasi-projectives).** — 1) On appelle **variété** (algébrique) **projective** toute sous-variété fermée d'un espace projectif $\mathbb{P}^n$.

2) On appelle **variété** (algébrique) **quasi-projective** toute sous-variété ouverte d'une variété projective. En particulier, toute variété affine ou quasi-affine est une variété quasi-projective (puisque $\mathbb{A}^n$ est un ouvert affine principal de $\mathbb{P}^n$).

Remarque 9.24. — Dans la suite, on n'aura à considérer que des variétés algébriques quasi-projectives.

Proposition 9.25. — *Soient* X, Y *deux variétés et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme. Alors* f *induit un morphisme de variétés* $\mathrm{X} \to \overline{f(\mathrm{X})}$*.*

Démonstration. — Laissée au lecteur, voir les références données en 9.7. □

En utilisant le théorème 9.6 (ou sa généralisation au cas des morphismes), on peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 9.26. — *Soit* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés algébriques. Pour tout ouvert* W *de* Y *et tout ouvert* $\mathrm{V} \subseteq \phi^{-1}(\mathrm{W})$*, on a :*

$$\forall\, \psi \in k[\mathrm{W}], \qquad (\psi \circ \phi)|_{\mathrm{V}} \in k[\mathrm{V}].$$

Concernant les variétés séparées, le théorème 9.15 et sa démonstration s'étendent comme suit (en tenant compte de la proposition 9.16).

Théorème 9.27. — *Toute sous-variété localement fermée d'une variété algébrique séparée est séparée. En particulier, toute variété quasi-projective est séparée.*

De même, la démonstration de la proposition 9.16 s'étend au résultat suivant.

Théorème 9.28. — *Soit* X *une variété algébrique. On suppose que pour tout* $x, y \in \mathrm{X}$, *il existe un ouvert affine* U *contenant* x *et* y. *Alors* X *est séparée.*

Démonstration. — Soient $x \neq y$ dans X et soit U un ouvert affine contenant x et y. Comme U est séparé, il existe un voisinage ouvert V de (x, y) dans $\mathrm{U} \times \mathrm{U}$ ne rencontrant pas Δ_{U}. Comme $\mathrm{U} \times \mathrm{U}$ est ouvert dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, alors V est un voisinage ouvert de (x, y) dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, et l'on a

$$\mathrm{V} \cap \Delta_{\mathrm{X}} \subseteq \mathrm{V} \cap \Delta_{\mathrm{U}} = \varnothing.$$

Ceci montre que Δ_{X} est fermée dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, donc X est séparée. □

Proposition 9.29. — (i) *Le produit de deux variétés séparées est une variété séparée.*

(ii) *Soient* X, Y *deux variétés séparées et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme. Alors le graphe de* f *est fermé dans* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Démonstration. — Voir [**Die**, § 2.6, Prop. 9]. □

Notation 9.30. — Dans la suite, on ne considèrera que des variétés algébriques *séparées*, et l'on convient que désormais « variété algébrique » signifie « variété algébrique séparée ».

9.5. Corps des fonctions rationnelles et théorème de Chevalley. — Soit X une variété algébrique irréductible. Si U, V sont des ouverts non-vides, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est un ouvert non-vide et l'application de restriction $k[\mathrm{U}] \to k[\mathrm{U} \cap \mathrm{V}]$ est injective (car $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est dense).

Définition 9.31. — Soit X une variété algébrique *irréductible*. On note $k(\mathrm{X})$ la limite injective des $k[\mathrm{U}]$, pour U ouvert non-vide. En d'autres termes, $k(\mathrm{X})$ s'identifie à l'ensemble des couples (U, f) où U est un ouvert non-vide et $f \in k[\mathrm{U}]$, modulo la relation d'équivalence : $(\mathrm{U}, f) \sim (\mathrm{V}, g)$ si f et g coïncident sur un ouvert non-vide $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ (dans ce cas, $f = g$ sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$).

C'est un corps, appelé le **corps des fonctions rationnelles** sur X, car si f est non-nulle et appartient à $k[\mathrm{U}]$ alors $1/f$ appartient à $k[\mathrm{U} \cap \mathrm{D}(f)]$, où l'on rappelle que $\mathrm{D}(f)$ désigne l'ouvert : $\{x \in \mathrm{X} \mid f(x) \neq 0\}$.

Proposition 9.32. — *Soit* X *une variété algébrique irréductible. Alors* $k(\mathrm{X}) = \mathrm{Frac}(k[\mathrm{U}])$, *pour tout ouvert affine non vide* U.

Démonstration. — D'abord, il résulte de la définition que $k(\mathrm{X}) = k(\mathrm{U})$ pour tout ouvert non-vide U. Donc il suffit de montrer que si X est affine alors $k(\mathrm{X}) = \mathrm{Frac}(k[\mathrm{X}])$. Il est clair que $k[\mathrm{X}] \subseteq k(\mathrm{X})$. Réciproquement, soit $f \in k(\mathrm{X})$. Alors $f \in k[\mathrm{V}]$ pour un ouvert non-vide V, et il existe $g \in k[\mathrm{X}]$ tel $\mathrm{D}(g) \subseteq k[\mathrm{V}]$. Alors $f \in k[\mathrm{D}(g)] = k[\mathrm{X}]_g \subseteq k(\mathrm{X})$. □

Les théorèmes 8.22 et 8.24 se généralisent aux variétés algébriques non nécessairement affines.

Théorème 9.33. — *Soit* X *irréductible. Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *on a* $\dim_x \mathrm{X} = \deg \mathrm{tr}_k\, k(\mathrm{X})$. *En particulier,* $\dim \mathrm{X} = \deg \mathrm{tr}_k\, k(\mathrm{X})$.

Définition 9.34. — Soient X, Y deux variétés algébriques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme. On dit que f est **dominant** si $f(\mathrm{X})$ est dense dans Y, c.-à-d., si $\overline{f(\mathrm{X})} = \mathrm{Y}$.

Théorème 9.35 **(Théorème de constructibilité de Chevalley)**

Soient X, Y *deux variétés algébriques* irréductibles *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme dominant.*

(a) *Il existe un ouvert dense* V *de* Y, *contenu dans* $f(\mathrm{X})$, *tel que, pour tout* $v \in \mathrm{V}$, *toute composante irréductible de* $f^{-1}(v)$ *soit de dimension* $\dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Y} \geqslant 0$.

(b) *Pour tout* $y \in f(\mathrm{X})$ *et toute composante irréductible* Z *de* $f^{-1}(v)$, *on a* $\dim \mathrm{Z} \geqslant \dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Y}$.

(b′) *La fonction* $\mathrm{X} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ *est semi-continue supérieurement, c.à.d., pour tout* n, *l'ensemble des* $x \in \mathrm{X}$ *tels qu'il existe une composante* Z *de* $f^{-1}(f(x))$ *contenant* x *et de dimension* $\geqslant n$, *est fermé.*

Corollaire 9.36. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés algébriques non nécessairement irréductibles. Alors* $f(\mathrm{X})$ *contient un ouvert dense de* $\overline{f(\mathrm{X})}$.

Démonstration. — Remplaçant si nécessaire Y par $\overline{f(\mathrm{X})}$, on peut supposer que f est dominant. On se ramène alors au cas irréductible comme suit.

Notons $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ les composantes irréductibles de X et posons $\mathrm{Y}_i = \overline{f(\mathrm{X}_i)}$. Alors, d'une part, $\mathrm{Y}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Y}_n$ égale Y, car c'est un fermé contenant $f(\mathrm{X})$. D'autre part, chaque Y_i est irréductible donc, d'après le théorème précédent, $f(\mathrm{X}_i)$ contient un ouvert dense U_i de Y_i. Alors $\mathrm{U}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{U}_n$ est un ouvert dense de Y contenu dans $f(\mathrm{X})$. □

10. Action sur une variété, variétés homogènes

10.1. Action sur une variété, stabilisateurs et orbites. —

Définition 10.1 **(G-variétés)**. — Soient G un groupe algébrique affine et X une variété algébrique. On dit que X est une G-variété si l'on s'est donné un morphisme de variétés $\mu_{\mathrm{X}} : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ vérifiant les axiomes d'une action, c.-à-d.,

(1) $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}) = \mu_{\mathrm{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \mu_{\mathrm{X}})$,

(2) $\mu_{\mathrm{X}} \circ (e \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$,

où μ, resp. e, désigne la multiplication, resp. l'élément neutre, de G.

Si X, Y sont deux G-variétés algébriques, un G-**morphisme** $\phi : X \to Y$ est un morphisme de variétés qui commute à l'action de G, c.-à-d., tel que :

$$\phi(gx) = g\phi(x), \qquad \forall\, g \in G,\, x \in X.$$

Dans ce cas, on dit aussi que ϕ est un morphisme **équivariant** (ou G-équivariant).

Soient G un groupe algébrique et X une G-variété. Pour des parties Y, Z de X, on pose

$$\mathrm{Trans}_G(Y, Z) = \{g \in G \mid gY \subseteq Z\}, \quad \mathrm{Stab}_G(Y) = \mathrm{Trans}_G(Y, Y).$$

Si Y est un singleton $\{x\}$, on note $\mathrm{Stab}_G(\{x\}) = G_x$.

Lemme 10.2. — (a) *Si* Z *est un fermé de* X*, alors* $\mathrm{Trans}_G(Y, Z)$ *est un fermé de* G*. Par conséquent, pour tout* $x \in X$*,* G_x *est un sous-groupe fermé.*

(b) *Si* Y *est localement fermé, alors* $\mathrm{Stab}_G(Y)$ *égale* $\{g \in G \mid gY = Y\}$*, et est un sous-groupe fermé.*

Démonstration. — Pour $x \in X$, notons μ_x l'application $g \mapsto gx$. C'est un morphisme de variétés.

(a) Pour tout $y \in Y$, $\mathrm{Trans}_G(\{y\}, Z) = \mu_y^{-1}(Z)$ est un fermé de G. Il en est donc de même de $\mathrm{Trans}_G(Y, Z) = \bigcap_{y\in Y} \mathrm{Trans}_G(\{y\}, Z)$. L'assertion (a) en découle.

(b) Soit $g \in \mathrm{Stab}_G(Y)$. Notons d'abord que $g\overline{Y} \subseteq \overline{Y}$. Par conséquent, on a une suite décroissante de fermés $\overline{Y} \supseteq g\overline{Y} \supseteq g^2\overline{Y} \supseteq \cdots$. Cette suite étant stationnaire, on en déduit que $\overline{Y} = g\overline{Y}$. Donc $\overline{Y}$ est stable par g et g^{-1}. Comme Y est ouvert dans $\overline{Y}$, la suite $Y \subseteq g^{-1}Y \subseteq g^{-2}Y \subseteq \cdots$ est une suite croissante d'ouverts de $\overline{Y}$ et est donc stationnaire. On en déduit que $Y = g^{-1}Y$, d'où $gY = Y$. Ceci prouve que $\mathrm{Stab}_G(Y)$ est un sous-groupe. De plus, on déduit de ce qui précède que $\mathrm{Stab}_G(Y)$ égale

$$\big\{g \in G \mid g\overline{Y} = \overline{Y} \text{ et } g(\overline{Y} \setminus Y) = \overline{Y} \setminus Y\,\big\} = \mathrm{Stab}_G(\overline{Y}) \cap \mathrm{Stab}_G(\overline{Y} \setminus Y).$$

D'après le point (a), on conclut que $\mathrm{Stab}_G(Y)$ est un sous-groupe fermé de G. □

Théorème 10.3. — *Soit* X *une* G*-variété algébrique. Pour tout* $x \in X$*, l'orbite* Gx *est ouverte et dense dans* $\overline{Gx}$*. En particulier,* Gx *est une sous-variété localement fermée de* X*.*

Démonstration. — Gx est l'image du morphisme μ_x donc contient, d'après le corollaire 9.36, un ouvert dense U de $\overline{Gx}$. Mais alors Gx est la réunion des ouverts gU et est donc ouvert (et dense) dans $\overline{Gx}$. □

***Corollaire 10.4* (Lemme de l'orbite fermée)**. — *Tout fermé* G*-stable* $F \subseteq X$ *contient au moins une orbite fermée.*

Démonstration. — L'ensemble des fermés non-vides et G-stables de F est non-vide (il contient F) donc admet au moins un élément minimal Z. Soit $z \in \mathrm{Z}$. Par minimalité, on a $\mathrm{Z} = \overline{\mathrm{G}z}$. Alors, d'après le théorème 10.3, $\mathrm{Z} \setminus \mathrm{G}z$ est un fermé G-stable strictement contenu dans Z et est donc vide. Donc $\mathrm{G}z = \mathrm{Z}$ est une orbite fermée. □

10.2. Morphismes séparables et morphismes birationnels. — Soit $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme dominant de variétés algébriques irréductibles. D'après le théorème de Chevalley 9.35, $f(\mathrm{X})$ contient un ouvert dense $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{Y}$. Alors, le comorphisme $\phi^* : k[\mathrm{V}] \to k[\phi^{-1}(\mathrm{U})]$ est injectif et induit, d'après la proposition 9.32, un morphisme injectif de corps $k(\mathrm{Y}) \hookrightarrow k(\mathrm{X})$, encore noté ϕ^* :

Définition 10.5. — Soit L/K une extension de type fini. Elle est dite **séparablement engendrée** s'il existe une base de transcendance B de L sur K telle que l'extension algébrique L/K(B) soit séparable. Dans ce cas, on dit que B est une base de transcendance **séparante**.

En particulier, une extension transcendante pure ou bien algébrique séparable est séparablement engendrée.

Remarque 10.6. — Si $\mathrm{car}(\mathrm{K}) = 0$, toute extension de type fini L/K est séparablement engendrée.

Définition 10.7. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés irréductibles.

1) On dit que f est **séparable** s'il est dominant et si l'extension $k(\mathrm{Y}) \subseteq k(\mathrm{X})$ est séparablement engendré (cf. 10.5).

2) On dit que ϕ est **birationnel** s'il est dominant et si ϕ^* induit un isomorphisme $k(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} k(\mathrm{X})$.

Proposition 10.8. — *Soit* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme entre variétés algébriques irréductibles. Alors* ϕ *est birationnel si, et seulement si, il existe un ouvert non-vide* W *de* Y *tel que* ϕ *induise un isomorphisme de* $\phi^{-1}(\mathrm{W})$ *sur* W.

Démonstration. — La condition est suffisante, d'après la proposition 9.32. Réciproquement, supposons ϕ birationnel ; en particulier, ϕ est dominant. Soit V un ouvert affine de Y contenu dans $\phi(\mathrm{X})$, et soit U un ouvert affine non vide contenu dans $\phi^{-1}(\mathrm{V})$. Alors $\phi(\mathrm{U})$ est dense dans V et donc $\phi^* : k[\mathrm{V}] \to k[\mathrm{U}]$ est injectif. Comme $k[\mathrm{U}]$ est une k-algèbre de type fini, il existe $f_1, \ldots, f_n \in k[\mathrm{U}]$ tels que $k[\mathrm{U}] = k[\mathrm{V}][f_1, \ldots, f_n]$. Or, d'après l'hypothèse, on a $\mathrm{Frac}(k[\mathrm{V}]) = \mathrm{Frac}(k[\mathrm{U}])$. Par conséquent, il existe $g \in k[\mathrm{V}]$ tel que $gf_i \in k[\mathrm{V}]$ pour tout i. Alors, $k[\mathrm{V}]_g = k[\mathrm{U}]_g$ et, par conséquent, ϕ induit un isomorphisme entre les ouverts affines $\mathrm{D}(\phi^*(g)) \subseteq \mathrm{U}$ et $\mathrm{D}(g) \subseteq \mathrm{V}$. La proposition est démontrée. □

Remarque 10.9. — Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, le morphisme $k \to k$, $x \mapsto x^p$ est bijectif mais pas birationnel. Il n'est pas séparable non plus, car l'extension correspondante $k(\mathrm{T}^p) \subset k(\mathrm{T})$ est algébrique non séparable.

L'intérêt de la notion de séparabilité apparaît, par exemple, dans le théorème suivant (cf. [**Spr**, Thm. 5.1.6]).

Théorème 10.10. — *Soient* X, Y *des variétés affines irréductibles* de même dimension *et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* séparable. *Alors il existe un ouvert* W *de* Y *contenu dans* $\phi(\mathrm{X})$ *tel que, pour tout* $v \in \mathrm{V}$, *l'ensemble* $\phi^{-1}(v)$ *est fini, de cardinal* $[k(\mathrm{Y}) : k(\mathrm{X})]$. *En particulier, si* ϕ *est injectif, il est birationnel.*

Démonstration. — [14] Posons $\mathrm{K} = k(\mathrm{Y})$ et $\mathrm{L} = k(\mathrm{X})$. Alors

$$\deg \mathrm{tr}_k \mathrm{K} = \dim \mathrm{Y} = \dim \mathrm{X} = \deg \mathrm{tr}_k \mathrm{L}$$

et donc l'extension L/K est algébrique, et de type fini (car L/k l'est déjà), donc de degré fini. Alors $\mathrm{K} \cdot k[\mathrm{X}]$, étant une sous-K-algèbre de L, est intègre et de dimension finie sur K, donc est un corps, donc égale L. Par conséquent, tout $x \in \mathrm{L}$ s'écrit $x = b/s$, avec $b \in k[\mathrm{X}]$ et $s \in k[\mathrm{Y}]$.

De plus, on a supposé l'extension L/K séparable. Donc, d'après le théorème de l'élément primitif, l'extension L/K est monogène, c.-à-d., il existe $f \in \mathrm{L}$ tel que $\mathrm{L} = \mathrm{K}[f]$. D'après ce qui précède, on peut supposer $f \in k[\mathrm{X}]$.

Soient $x_1, \dots, x_n$ des générateurs de la k-algèbre de type fini $k[\mathrm{X}]$; d'après ce qui précède, chaque x_i s'écrit comme un polynôme P_i en f, à coefficients dans $k(\mathrm{Y})$. Soit $a \in k[\mathrm{Y}]$ tel que les coefficients de tous les P_i appartiennent à $k[\mathrm{Y}]_a$. Alors l'image inverse par ϕ de l'ouvert affine $\mathrm{V} = \mathrm{D}(a)$ de Y est l'ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{D}(a \circ \phi)$ de X, et le comorphisme ϕ^* induit un isomorphisme

$$k[\mathrm{U}] \xrightarrow{\sim} (k[\mathrm{V}])[f],$$

car les x_i appartiennent à $(k[\mathrm{V}])[f]$. Soit T une indéterminée ; on a donc un morphisme surjectif (de $k[\mathrm{V}]$-algèbres) $(k[\mathrm{V}])[\mathrm{T}] \twoheadrightarrow k[\mathrm{U}]$. Son noyau n'est pas nécessairement un idéal principal de $(k[\mathrm{V}])[\mathrm{T}]$, mais on s'y ramène de la façon suivante.

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{T}^d + a_1\mathrm{T}^{d-1} + \cdots + a_d$ le polynôme minimal de f sur $\mathrm{K} = k(\mathrm{V})$, soit $b \in k[\mathrm{V}]$ tel que les coefficients a_i de P appartiennent à $k[\mathrm{V}]_b$, et soit $g = ab$. Alors, l'image inverse par ϕ de l'ouvert affine $\mathrm{V}' = \mathrm{D}(g)$ de V est l'ouvert affine $\mathrm{U}' = \mathrm{D}(g \circ \phi)$ de U, on a $\mathrm{P} \in (k[\mathrm{V}'])[\mathrm{T}]$ et ϕ^* induit un isomorphisme

$$(*) \qquad \varepsilon : k[\mathrm{U}'] \xrightarrow{\sim} (k[\mathrm{V}'])[\mathrm{T}]/(\mathrm{P}).$$

En effet, posons $\mathrm{A} = k[\mathrm{V}']$ et soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}]$ tel que $\mathrm{Q}(f) = 0$. Comme P est unitaire, on peut faire la division euclidienne de Q par P ; alors le reste R vérifie $\mathrm{R}(f) = 0$ et est nul ou bien de degré $< \deg \mathrm{P}$. Comme P est le polynôme minimal de f dans $\mathrm{K}[\mathrm{T}]$, la seconde possibilité est exclue, donc $\mathrm{R} = 0$ et P divise Q dans $\mathrm{A}[\mathrm{T}]$. Ceci prouve $(*)$.

[14] Pas faite en cours.

Alors, le morphisme $\tau : \mathrm{U}' \to \mathrm{V}' \times k$, $x \mapsto (\phi(x), f(x))$ est une immersion fermée, car son comorphisme n'est autre que ε. Il en résulte qu'on peut identifier U' à la sous-variété fermée de $\mathrm{V}' \times k$ suivante :

$$\mathrm{U}' = \{(y,t) \in \mathrm{V}' \times k \mid \mathrm{P}_y(t) = 0\},$$

où $\mathrm{P}_y = \mathrm{T}^d + a_1(y)\mathrm{T}^{d-1} + \cdots + a_d(y)$ désigne le polynôme P dans lequel on a spécialisé les coefficients en y. Donc, en chaque $y \in \mathrm{V}'$, la fibre $\phi^{-1}(y)$ s'identifie à l'ensemble des racines (dans k !) du polynôme spécialisé P_y.

Il reste à voir qu'il existe un ouvert non vide W de V' tel que P_y ait d racines distinctes pour tout $y \in \mathrm{W}$. Ceci découle de l'existence du polynôme discriminant, comme suit.

Soient $f_1, f_2, \dots, f_d$ (où $d = \deg \mathrm{P}$ et $f = f_1$) les racines de P dans une clôture algébrique $\overline{\mathrm{L}}$ de L. Comme f est séparable (car L/K l'est), les f_i sont deux à deux distincts, et donc le discriminant de P :

$$\mathrm{disc}(\mathrm{P}) = \prod_{i<j} (f_i - f_j)^2$$

est un élément non nul de $\overline{\mathrm{L}}$. En fait, comme c'est un polynôme symétrique en les f_i, c'est un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires des f_i, qui sont les coefficients de P, donc des éléments de $k[\mathrm{V}']$. Donc disc(P) est un élément non nul δ de $k[\mathrm{V}']$.

Soit W l'ouvert affine $\mathrm{D}(\delta)$ de V'. Pour tout $y \in \mathrm{W}$, le discriminant de P_y égale $\delta(y)$, qui est non nul, donc P_y a d racines distinctes. Le théorème est démontré. □

Corollaire 10.11. — *Soient* X, Y *des variétés algébriques irréductibles et* ϕ : X → Y *un morphisme* **bijectif et séparable**. *Alors* ϕ *est birationnel.*

Démonstration. — Comme ϕ est bijectif, $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{Y}$, d'après le théorème de Chevalley 9.35. Soit V un ouvert affine non vide de Y et soit U un ouvert affine non vide de X contenu dans $\phi^{-1}(\mathrm{U})$. Alors la restriction de ϕ à U est un morphisme U → V séparable et injectif. D'après la proposition précédente, ϕ induit un isomorphisme $k(\mathrm{V}) \xrightarrow{\sim} k(\mathrm{U})$, et donc ϕ est birationnel. □

En particulier, comme en caractéristique nulle toute extension de corps est séparable, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 10.12. — *Supposons* $k = \mathbb{C}$. *Soit* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* **bijectif** *entre variétés algébriques irréductibles. Alors* ϕ *est birationnel.*

10.3. Variétés homogènes : définition et premiers résultats. —

Définition 10.13. — Soient G un groupe algébrique affine et X une G-variété. On dit que X est une G-variété **homogène** si l'action de G est **transitive** (c.à.d., si l'on a $\mathrm{X} = \mathrm{G}x$ pour un, et donc tout, $x \in \mathrm{X}$).

Lemme 10.14. — *Soit* X *une* G*-variété homogène.*

(a) *Les composantes irréductibles de* X *coïncident avec les composantes connexes, et chacune est une variété homogène sous* G^0*. Elles sont translatées l'une de l'autre, et sont toutes de dimension* $\dim G - \dim G_x$ *(pour* x *arbitraire).*

(b) *Si* X *et* G_x *sont irréductibles, alors* G *aussi. En particulier, si l'on a une suite exacte de groupes algébriques affines :*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

avec H, K *connexes, alors* G *est connexe.*

Démonstration. — Soient $e = g_1, \dots, g_n$ un système de représentants de G/G^0, et $x \in X$. Alors $G = G^0 g_1 \sqcup \cdots \sqcup G^0 g_n$ et, comme les $G^0 g_i x$ sont deux à deux disjoints ou égaux, on peut supposer que $X = G^0 x \sqcup \cdots \sqcup G^0 g_m x$, pour un $m \leqslant n$. L'une au moins de ces G^0-orbites est fermée, d'après le corollaire 10.4. Or, pour $i, j = 1, \dots, m$, on a $G^0 g_j x = g_j g_i^{-1} G^0 g_i x$. Il en résulte que les $G^0 g_i x$, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont toutes fermées et ouvertes. Ce sont donc les composantes connexes de X. Enfin, notons ϕ le morphisme $G \to X$, $g \mapsto gx$. Pour tout g, on a $\phi^{-1}(gx) = gG_x$. D'après le théorème 8.24, on en déduit que chaque composante de X est de dimension $\dim G - \dim G_x$. Ceci prouve (a).

Voyons (b). D'après (a), on a $X = G^0 x$. Soit $g \in G$. Alors, $gx = hx$ pour un $h \in G^0$, et donc $h^{-1} g \in G_x$. Or $G_x \subseteq G^0$, puisque G_x est connexe, et donc $g \in G^0$. Ceci prouve le lemme. □

Remarque 10.15. — On peut avoir G et X irréductibles sans que G_x le soit. Par exemple, considérons l'action adjointe de $G = SL_2$ dans $\mathfrak{sl}_2$. Soit $x = E_{11}$. Alors G et Gx sont irréductibles, mais pas G_x.

On obtient alors la proposition suivante, qui fournit un critère d'isomorphisme suffisant pour certaines applications.

Proposition 10.16. — *Soient* G *un groupe algébrique,* X, Y *deux* G*-variétés homogènes irréductibles, et* $\phi : X \to Y$ *un morphisme* G-équivariant birationnel. *Alors* ϕ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition 10.8, il existe un ouvert non vide V de Y tel que ϕ induise un isomorphisme de $\phi^{-1}(V)$ sur V. Alors, pour tout $g \in G$, ϕ induit un isomorphisme de $\phi^{-1}(gV)$ sur gV, et la proposition en résulte. □

***Corollaire 10.17* (Isomorphisme de $\mathbb{C}$-variétés homogènes)**

Supposons $k = \mathbb{C}$*. Soient* X, Y *des variétés et* $\phi : X \to Y$ *un morphisme* G-équivariant bijectif. *Alors* ϕ *est isomorphisme.*

Démonstration. — En utilisant le lemme 10.14, on se ramène au cas au $\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ sont irréductibles. Alors, d'après le corollaire 10.12, ϕ est birationnel, donc un isomorphisme d'après la proposition précédente. □

10.4. Le théorème des semi-invariants de Chevalley. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Notons π le morphisme $\mathrm{V} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathrm{V})$. Soit $\{e_0, \ldots, e_n\}$ une base de V, d'où des coordonnées homogènes $[x_0, \ldots, x_n]$ sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Dans la démonstration qui suit, on notera D_i l'ouvert affine principal $\{[x] \in \mathbb{P}(\mathrm{V}) \mid x_i \neq 0\}$, pour $i = 0, \ldots, n$.

Proposition 10.18. — *Soit* V *un* G*-module rationnel de dimension finie. Alors* G *agit morphiquement dans* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ est un morphisme, il suffit de traiter le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. Notons θ l'application

$$\mathrm{G} \times \mathbb{P}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{V}), \qquad (g, [x]) \mapsto [gx].$$

Il suffit de vérifier que, pour $\ell = 0, \ldots, n$, $\mathrm{U}_\ell := \theta^{-1}(\mathrm{D}_\ell)$ est un ouvert de $\mathrm{G} \times \mathbb{P}(\mathrm{V})$, et que $\theta_\ell : \mathrm{U}_\ell \to \mathrm{D}_\ell$ est un morphisme. Or

$$\mathrm{U}_\ell = \{(g, [x_0, \ldots, x_n]) \mid \sum_{j=0}^{n} g_{\ell j} x_j \neq 0\},$$

et on vérifie que chaque $\mathrm{U}_{\ell,i} := \mathrm{U}_\ell \cap (\mathrm{G} \times \mathrm{D}_i)$ est un ouvert de $\mathrm{G} \times \mathrm{D}_i$. De plus, pour $m = 0, \ldots, n$, $m \neq \ell$, on a

$$\mathrm{X}_m(gx) = \frac{\sum_j g_{mj} x_j}{\sum_j g_{\ell j} x_j},$$

et ceci est une fonction régulière sur U_ℓ ; en effet, sur chaque $\mathrm{U}_{\ell,i}$ on a $\mathrm{X}_m(gx) = \big(\sum_j g_{mj} x_j / x_i\big) / \big(\sum_j g_{\ell j} x_j / x_i\big)$. La proposition est démontrée. □

Soient G un groupe algébrique affine, H un sous-groupe fermé, et $\mathrm{I} = \mathscr{I}(\mathrm{H})$ l'idéal de H dans $k[\mathrm{G}]$. On considère l'action de G dans $k[\mathrm{G}]$ définie par $(g\phi)(h) = \phi(hg)$.

Lemme 10.19. — *On a* $\mathrm{H} = \{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{I} = \mathrm{I}\}$.

Démonstration. — Facile et laissée au lecteur. □

***Théorème 10.20* (Théorème des semi-invariants de Chevalley)**

Il existe un G*-module rationnel* V *de dimension finie et un sous-espace* V_1 *de dimension* 1, *tels que* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{H}$.

Démonstration. — Soient I l'idéal de H dans $k[\mathrm{G}]$. On considère la représentation rationnelle ρ de G sur $k[\mathrm{G}]$ définie par $(\rho(g)\phi)(g') = \phi(g'g)$, pour $\phi \in k[\mathrm{G}]$, $g, g' \in \mathrm{G}$. Soient $x_1, \ldots, x_s$ des générateurs de l'idéal I, W le sous-$\rho(\mathrm{G})$-module qu'ils engendrent, et $\mathrm{E} = \mathrm{W} \cap \mathrm{I}$. Alors E est stable par $\rho(\mathrm{H})$, et contient les x_i.

Lemme 10.21. — *On a* $\mathrm{H} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$.

Démonstration. — D'après le lemme 10.19, on a $\mathrm{H} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{I})$. Comme W est stable par G, on voit que si $g \in \mathrm{G}$ stabilise I, il stabilise aussi $\mathrm{I} \cap \mathrm{W} = \mathrm{E}$. Donc $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$. L'inclusion réciproque est claire, puisque E engendre I et que G agit par automorphismes d'algèbres. Le lemme est démontré. □

Lemme 10.22. — *Soient* W *un k-espace vectoriel de dimension finie,* E *un sous-espace de dimension d, et* $\mathrm{D} = \Lambda^d \mathrm{E} \subseteq \Lambda^d \mathrm{W}$. *Soient* $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{W})$. *Considérons l'action induite sur* $\Lambda^d(\mathrm{W})$. *Alors* $g\mathrm{D} = \mathrm{D} \Leftrightarrow g\mathrm{E} = \mathrm{E}$.

Démonstration. — Voir par exemple [**Bo**, Lemma 5.1] ou [**Spr**, Lemma 5.5.2] ou [**Hu2**, Lemma 11.1]. □

Revenons à la preuve du théorème. On a obtenu un G-module rationnel W de dimension finie, et un sous-espace E tels que $\mathrm{H} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$. Le théorème en découle, en prenant $\mathrm{V} = \Lambda^d \mathrm{W}$ et $\mathrm{V}_1 = \Lambda^d \mathrm{E}$. □

Définition 10.23. — On munit l'ensemble G/H de la structure de variété algébrique quasi-projective définie par la bijection $\mathrm{G}/\mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \cdot \mathrm{V}_1 \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{V})$. Ceci ne dépend pas du choix de V et V_1, d'après le théorème qui suit.

Désormais, on suppose $k = \mathbb{C}$. Alors le morphisme surjectif $\mathrm{G} \to \mathrm{G} \cdot \mathrm{V}_1$ est automatiquement séparable.

Supposons donnés une G-variété homogène G/H et un morphisme G-équivariant séparable $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$, tels que H soit le stabilisateur de $\pi(1)$.

***Théorème 10.24* (Le quotient G/H)**. — (*On suppose* $k = \mathbb{C}$).

(a) *Pour tout ouvert* U *de* G/H, *on a*

$$\pi^*(k[\mathrm{U}]) = k[\pi^{-1}(\mathrm{U})]^{\mathrm{H}} := \{\phi \in k[\pi^{-1}(\mathrm{U})] \mid \phi \text{ constante sur les classes } g\mathrm{H}\}.$$

Donc, $k[\mathrm{U}] = \{\psi : \mathrm{U} \to k \mid \psi \circ \pi \in k[\pi^{-1}(\mathrm{U})]\}$.

(b) G/H *vérifie la propriété universelle* (*de quotient par* H) *suivante : pour tout morphisme de variétés* $\alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{Z}$ *constant sur les classes* $g\mathrm{H}$, *il existe un unique morphisme* $\beta : \mathrm{G}/\mathrm{H} \to \mathrm{Z}$ *tel que* $\alpha = \beta \circ \pi$. *Par conséquent,* G/H *est unique à isomorphisme près.*

(c) *De plus, si* G *est connexe,* π *induit un isomorphisme* $k(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \cong k(\mathrm{G})^{\mathrm{H}}$.

Démonstration. — Pour la démonstration, qui nécessite une certaine quantité de géométrie algébrique (ou d'algèbre commutative), on renvoie à [**Spr**, § 5.5] et/ou [**Bo**, § II.6]. □

Remarque 10.25. — Pour k algébriquement clos de caractéristique arbitraire, on peut montrer que le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G} \cdot \mathrm{V}_1 \subseteq \mathbb{P}(\mathrm{V})$ fourni par le théorème 10.20 est séparable, et que le théorème 10.24 reste valable ; voir les références ci-dessus.

10.5. Caractères, lemme de Dedekind. —

***Définition 10.26* (Caractères).** — Soit G un groupe algébrique affine. Un **caractère** de G est un morphisme de groupes algébriques $\mathrm{G} \to \mathbb{G}_m$. On note X(G) l'ensemble des caractères. C'est un groupe abélien, la multiplication étant définie par $(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$.

***Définition 10.27* (Espaces de poids).** — Si V est un G-module de dimension 1, alors G agit dans V via un caractère $\chi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}) = \mathbb{G}_m$. Ce G-module de dimension 1 sera noté k_χ. Plus généralement, si V est un G-module, on note, pour tout $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{G})$,

$$\mathrm{V}_\chi = \{v \in \mathrm{V} \mid gv = \chi(g)v, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}\}.$$

***Proposition 10.28* (Lemme de Dedekind).** — *Soit* G *un groupe quelconque.*

a) $\Theta(\mathrm{G}) := \mathrm{Hom}_{gpes}(\mathrm{G}, k^*)$ *est une partie libre de* k^{G} (= *fonctions* $\mathrm{G} \to k$).

b) *pour tout* G*-module* V*, la somme* $\sum_{\chi \in \Theta(\mathrm{G})} \mathrm{V}_\chi$ *est directe.*

Démonstration. — a) Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe une relation de dépendance linéaire $0 = a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n$, avec n minimal et donc les a_i tous non nuls (et $n \geqslant 2$). Soient $g, h \in \mathrm{G}$. Alors

$$\sum_i a_i\chi_i(g)\chi_i(h) = \sum_i a_i\chi_i(gh) = 0 = \chi_1(g)\sum_i a_i\chi_i(h).$$

Soustrayant le dernier terme du premier, on obtient une relation de dépendance ayant au plus $n-1$ termes : $\sum_{i=2}^n a_i(\chi_i(g) - \chi_1(g))\chi_i = 0$. De plus, comme $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$ et donc cette relation est non triviale. Ceci contredit la minimalité de n.

b) Sinon, il existerait une relation de dépendance non triviale $0 = v_{\chi_1} + \cdots + v_{\chi_n}$ avec n minimal et chaque v_{χ_i} dans $\mathrm{V}_{\chi_i} \setminus \{0\}$. Alors, pour tout g,

$$\sum_i \chi_i(g)v_{\chi_i} = g(\sum_i v_{\chi_i}) = 0 = \chi_1(g)(\sum_i v_{\chi_i}).$$

Soit g tel que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. On obtient une relation non triviale $0 = \sum_{i=2}^n (\chi_i(g) - \chi_1(g))v_{\chi_i}$, ce qui contredit la minimalité de n. La proposition est démontrée. □

Corollaire 10.29. — $\mathrm{X(G)}$ *est une partie libre de* $k[\mathrm{G}]$.

Le lemme suivant sera utile plus tard. Soit H un second groupe algébrique affine.

Lemme 10.30. — a) *On a un isomorphisme de groupes :*

$$\mathrm{X(G \times H) \cong X(G) \times X(H)}, \qquad \chi \mapsto (\chi_{|\mathrm{G}}, \chi_{|\mathrm{H}}).$$

b) *Si* G *est connexe, alors* $\mathrm{X(G)}$ *est sans torsion.*

Démonstration. — a) Un inverse est donné par $(\chi_1, \chi_2) \mapsto \chi_1\chi_2$ (le vérifier).

b) Si $\chi^n = 1$ alors $\chi(\mathrm{G})$ est contenu dans le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité. Or μ_n est fini, et comme G est supposé connexe ceci entraîne $\chi(\mathrm{G}) = \{1\}$, d'où $\chi = 1$. □

10.6. Quotient par un sous-groupe fermé normal. —

Théorème 10.31. — *Soit* H *un sous-groupe fermé normal de* G. *Alors la variété* G/H *est un groupe algébrique* affine.

Démonstration. — (Pour $k = \mathbb{C}$). On va construire un morphisme de groupes algébriques affines $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ tel que $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{H}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi = \mathfrak{h}$. (On peut montrer que cette dernière condition entraîne, pour k de caractéristique arbitraire, que ϕ est *séparable*, cf. [**Bo**] ou [**Spr**].)

Ceci prouvera le théorème, car on aura $\mathrm{G/H} \cong \phi(\mathrm{G})$ comme groupes abstraits, $\phi(\mathrm{G})$ sera un sous-groupe fermé de G', et ϕ induira un isomorphisme de variétés $\mathrm{G/H} \cong \phi(\mathrm{G})$, d'après le théorème 10.24.

Soient V, V_1 comme dans le théorème 10.20. Alors H agit sur V_1 par un caractère $\chi_1 \in \mathrm{X(H)}$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Comme H est normal dans G, alors

$$h \mapsto \chi_1(ghg^{-1}) \quad \text{est un caractère de H, noté } g\chi_1,$$

et pour tout $v \in \mathrm{V}_1$ et $h \in \mathrm{H}$, l'on a

$$h \cdot gv = g\,(g^{-1}hg)v = (g\chi_1)(h)\,gv.$$

Ceci montre que $g(\mathrm{V}_{\chi_1}) \subseteq \mathrm{V}_{g\chi_1}$, et l'on obtient de même que

$$g'(\mathrm{V}_{g\chi_1}) \subseteq \mathrm{V}_{g'g\chi_1}, \qquad \forall\, g, g' \in \mathrm{G}.$$

Par conséquent, la somme E des $\mathrm{V}_{g\chi_1}$ est G-stable. Or cette somme est directe, d'après la proposition 10.28, donc il existe $\chi_2, \dots, \chi_n \in \mathrm{X(H)}$ tels que $\mathrm{E} = \mathrm{V}_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{\chi_n}$. Notons $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(E)}$ la représentation de G dans E. Alors $\psi := \mathrm{Ad}_{\mathrm{GL(E)}} \circ \rho$ est une représentation de G dans End(E), c.-à-d., pour $u \in \mathrm{End(E)}$, $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\psi(g)u = \rho(g) \circ u \circ \rho(g^{-1}).$$

Soit $\mathrm{A} = \bigoplus_i \mathrm{End}(\mathrm{V}_{\chi_i})$ la sous-algèbre de End(E) formée des endomorphismes qui préservent chaque V_{χ_i}. Comme $\rho(\mathrm{G})$ permute les V_{χ_i}, alors A est stable par $\psi(\mathrm{G})$, et l'on obtient donc une représentation $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{A})$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{H}$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi = \mathfrak{h}$.

Si $h \in \mathrm{H}$, alors $\rho(h)$ agit scalairement sur chaque V_{χ_i} et commute donc à A, d'où $\phi(h) = 1$. Donc $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{Ker}\,\phi$ et par suite $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi$. Réciproquement, soit $g \in \mathrm{Ker}\,\phi$. Alors $\rho(g)$ est central dans A et donc agit scalairement sur chaque V_{χ_i}. En particulier $\rho(g)$ laisse V_1 stable, d'où $g \in \mathrm{H}$.

Enfin, comme ϕ est la restriction à A de $\mathrm{Ad}_{\mathrm{GL(E)}} \circ \rho$ on a, pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathrm{A}$,

$$\mathrm{d}\phi(\mathrm{X})(u) = \mathrm{d}\rho(\mathrm{X})\, u - u\, \mathrm{d}\rho(\mathrm{X}).$$

Par conséquent, si $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi$ alors $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$ est central dans A et on obtient comme plus haut que $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})(\mathrm{V}_1) \subseteq \mathrm{V}_1$, d'où $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$. Le théorème est démontré. □

Proposition 10.32. — *Soient* G *un groupe algébrique affine, et* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{K}$ *des sous-groupes fermés de* G*, avec* H *normal dans* G*. Alors, on a un isomorphisme de* G*-variétés* (*et de groupes algébriques affines, si* K *est normal dans* G) *:*

$$(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{K}/\mathrm{H}) \cong \mathrm{G}/\mathrm{K}.$$

Démonstration. — Voir [**Bo**, II.6.10]. □

TABLE DES MATIÈRES

II. Groupes algébriques sur $\mathbb{C}$

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[Dold] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer Classics in Mathematics, 1995.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.
[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.
[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.
[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.
[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.
[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.
[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.
[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.
[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.
[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.
[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.
[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.
[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.
[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.
[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.
[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po1] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2007/08 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Po2] P. Polo, Introduction aux groupes et algèbres de Lie, cours de M2 2006/07 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Spi] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish, 1970, 3rd edition 2005.

[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.