PARTIE II : ALGÈBRES DE LIE
SÉANCE DU 24 OCTOBRE

6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines (suite)

Dans le paragraphe 5.3 (séances des 17 et 23 octobre), on a donné la liste des diagrammes de Dynkin, anticipant la fin de la classification des systèmes de racines. Pour terminer cette classification, il reste à voir les points suivants.

(1) Soit R un système de racines. Le diagramme de Dynkin D(R) (ainsi que le graphe de Coxeter $\mathscr{C}(\mathrm{R})$) ne dépend pas de la base de R choisie. Pour cela, on introduit le **groupe de Weyl de** R et l'on montre que toutes les bases de R sont conjuguées par W. Ceci est l'objet de cette section, dans laquelle on montre également que R est déterminé, à isomorphisme près, par son diagramme de Dynkin.

(2) D'autre part, d'après la classification des graphes admissibles obtenue en 5.2, les seuls diagrammes de Dynkin possibles sont ceux listés en 5.3. Il reste donc à montrer que chacun de ces diagrammes est effectivement le diagramme d'un système de racines R (nécessairement unique, d'après (1) ci-dessus).

Plutôt que de construire abstraitement les systèmes de racines, on construira dans la section suivante les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie simples « classiques », dont les systèmes de racines sont A_n, B_n, C_n, D_n, et l'on énoncera l'existence des cinq algèbres exceptionnelles de type $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$, F_4 et G_2.

Pour plus de détails sur les systèmes de racines, on renvoie au livre de Serre [**Se**, Ch. V, § § 10–11 & 16] ou celui de Humphreys [**Hu**, § § 10–12], voir aussi [**BL4-6**, Planches I–IX].

6.1. Groupe de Weyl et conjugaison des bases. — Soit A(R) le groupe des automorphismes de R, c.-à-d.,

$$\mathrm{A}(\mathrm{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}) \mid g\mathrm{R} = \mathrm{R}\}.$$

(0) version du 27/10/06

Comme R engendre V, alors A(R) s'identifie à un sous-groupe du groupe des permutations de R ; c'est donc un groupe **fini**. D'après l'axiome (R2), on a $s_\alpha \in \mathrm{A(R)}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

Définition 6.1. — On appelle **groupe de Weyl de** R et on note W(R) ou simplement W, le sous-groupe de A(R) engendré par les réflexions s_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$.

On fixe une base Δ de R ; on note R^+ l'ensemble des racines qui sont somme d'éléments de Δ, et $\mathrm{R}^- = -\mathrm{R}^+$. Les éléments de Δ sont appelés les *racines simples*, ceux de R^+ et R^- les racines *positives* et *négatives*. Si α est une racine, on écrira $\alpha > 0$ pour dire que $\alpha \in \mathrm{R}^+$, et de même $\alpha < 0$ pour dire que $\alpha \in \mathrm{R}^-$. On pose

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \mathrm{R}^+} \beta.$$

Lemme 6.2. — *Soit* $\alpha \in \Delta$*. Alors :* 1) s_α *laisse stable* $\mathrm{R}^+ \setminus \{\alpha\}$.

2) *On a* $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$*, et donc* $(\rho, \alpha^\vee) = 1$.

Démonstration. — 1) Soit $\gamma \in \mathrm{R}^+ \setminus \{\alpha\}$. On a $\gamma = \sum_{\beta\in\Delta} m_\beta \beta$, avec les $m_\beta \in \mathbb{N}$, et comme $\gamma \neq \alpha$, il existe $\beta \neq \alpha$ tel que $m_\beta \geqslant 1$. Comme

$$s_\alpha(\gamma) = \gamma - (\gamma, \alpha^\vee),$$

le coefficient de β dans $s_\alpha(\gamma)$ est inchangé, donc égal à $m_\beta \geqslant 1$. Donc $s_\alpha(\gamma)$ est une racine positive, distincte de α. Ceci prouve le point 1), et le point 2) en résulte. □

On pose

$$\mathrm{C} = \{y \in \mathrm{V}_{\text{rég}} \mid (y, \alpha) > 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta\}.$$

On l'appelle la *chambre de Weyl* associée à Δ. Pour tout $y \in \mathrm{C}$, on a $\Delta(y) = \Delta$ (notation de 4.8). On rappelle que toute base de R est de la forme $\Delta(y)$, avec $y \in \mathrm{V}_{\text{rég}}$.

***Théorème 6.3* (Les bases de R sont conjugées)**. — (1) *Pour tout* $t \in \mathrm{V}_{\textit{rég}}$*, il existe* $w \in \mathrm{W}$ *tel que* $w(t) \in \mathrm{C}$*. Donc* W *agit transitivement sur l'ensemble des bases de* R.

(2) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$*, il existe* $w \in \mathrm{W}$ *tel que* $w(\alpha) \in \Delta$.

(3) W *est engendré par les réflexions* s_α*,* $\alpha \in \Delta$.

Démonstration. — Soit W′ le sous-groupe de W engendré par les s_α, $\alpha \in \Delta$. Nous allons d'abord démontrer (1)–(2) pour W′, puis en déduire que W′ = W.

Soit $t \in \mathrm{V}_{\text{rég}}$, et soit $w \in \mathrm{W}$ tel que $(w(t), \rho)$ soit maximum (c'est possible puisque W est fini). Alors, pour tout $\alpha \in \Delta$ on a

$$(w(t), \rho) \geqslant (s_\alpha w(t), \rho) = (w(t), s_\alpha \rho) = (w(t), \rho) - (w(t), \alpha).$$

On en déduit que $(w(t), \alpha)$ est $\geqslant 0$, et en fait > 0 puisque $w(t)$ est régulier. Donc $w(t) \in \mathrm{C}$. Alors, $\Delta(w(t)) = \Delta$, et l'on en déduit que

$$\Delta(t) = w^{-1}\Delta = \{w^{-1}(\alpha) \mid \alpha \in \Delta\}.$$

Ceci prouve (1).

Prouvons (2). Soit $\beta \in \mathrm{R}^+$, alors $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$, avec les $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur

$$\sum_\alpha n_\alpha, \qquad \text{appelé la } \textbf{hauteur} \text{ de } \beta,$$

qu'il existe $w \in \mathrm{W}'$ tel que $w'(\beta) \in \Delta$. D'abord, il existe $\alpha_0 \in \Delta$ tel que $(\beta, \alpha_0^\vee) > 0$, car sinon on aurait $(\beta, \beta) \leqslant 0$, impossible. Si $\beta = \alpha_0$, c'est gagné ; sinon

$$s_{\alpha_0}(\beta) = \beta - (\beta, \alpha_0^\vee)\alpha_0$$

est une racine positive de hauteur $<$ à celle de β, et donc par hypothèse de récurrence il existe $w' \in \mathrm{W}'$ tel que $w' s_{\alpha_0}(\beta) \in \Delta$. L'assertion (2) en découle.

(3) Montrons que $\mathrm{W}' = \mathrm{W}$. Par définition, W est engendré par les s_β, pour $\beta \in \mathrm{R}$. Comme $s_\beta = s_{-\beta}$, on peut se limiter à $\beta \in \mathrm{R}^+$. D'après (2), il existe $w \in \mathrm{W}'$ tel que $w(\beta) = \alpha \in \Delta$. Or, pour tout $\sigma \in \mathrm{A(R)}$, on voit facilement que

$$\sigma s_\beta \sigma^{-1} = s_{\sigma(\beta)}.$$

Par conséquent, s_β égale $w^{-1} s_\alpha w$ donc appartient à W'. Il en résulte que $\mathrm{W} = \mathrm{W}'$. Le théorème est démontré. □

Corollaire 6.4. — *Le graphe de Coxeter* $\mathscr{C}(\mathrm{R})$ *et le diagramme de Dynkin* $\mathrm{D(R)}$ *ne dépendent que de* R.

Démonstration. — Soit Δ' une autre base de R. D'après le théorème précédent, il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $\Delta' = w(\Delta)$. Comme w préserve le produit scalaire, on a

$$w(\alpha^\vee) = w(\alpha)^\vee \quad \text{et} \quad (w(\beta), w(\alpha)^\vee) = (\beta, \alpha^\vee), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \Delta.$$

Il en résulte que Δ et Δ' définissent les mêmes graphe de Coxeter et diagramme de Dynkin. □

6.2. Isomorphismes de systèmes de racines. — Dans ce paragraphe, on va montrer qu'un système de racines R est entièremement déterminé par son diagramme de Dynkin. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 6.5. — *Soit* R' *un système de racines dans un espace euclidien* V', *soit* Δ' *une base de* R', *et supposons donnée une bijection* $\phi : \Delta \to \Delta'$ *telle que*

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)^\vee) = (\alpha, \beta^\vee) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \Delta;$$

(*c.-à-d.,* ϕ *est un isomorphisme entre les diagrammes de Dynkin*).

Comme Δ, *resp.* Δ' *est une base de* V, *resp.* V', *alors* ϕ *se prolonge en un isomorphisme linéaire* $\mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}'$, *encore noté* ϕ. *Alors*

$$\phi(\mathrm{R}) = \mathrm{R}'$$

et donc R *et* R' *sont isomorphes.*

Démonstration. — Soient $\alpha, \beta \in \Delta$. Alors

$$(s_{\phi(\alpha)} \circ \phi)(\beta) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - (\phi(\beta), \phi(\alpha)^\vee)\phi(\alpha),$$

et

$$(\phi \circ s_\alpha)(\beta) = \phi(\beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha) = \phi(\beta) - (\beta, \alpha^\vee)\phi(\alpha).$$

Comme $(\phi(\beta), \phi(\alpha)^\vee) = (\beta, \alpha^\vee)$, ces deux expressions sont égales, et comme Δ engendre V on en déduit que

$$s_{\phi(\alpha)} = \phi \circ s_\alpha \circ \phi^{-1}, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta.$$

Comme, d'après 6.3, W (resp. W') est engendré par les s_α (resp. $s_{\phi(\alpha)}$), pour $\alpha \in \Delta$, il en résulte que l'application

$$w \mapsto \phi \circ w \circ \phi^{-1}$$

induit un isomorphisme $\mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}'$. Enfin, comme $\mathrm{R} = \mathrm{W}\Delta$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{W}'\Delta'$, d'après 6.3 à nouveau, on en tire que $\phi(\mathrm{R}) = \mathrm{R}'$. Ceci prouve le théorème. □

6.3. Fin de la classification des systèmes de racines. — Soit R un système de racines. On a vu que le diagramme de Dynkin D(R) est bien défini (c.-à-d., indépendant du choix d'une base) et détermine R. D'autre part, on a la proposition suivante.

Proposition 6.6. — *Soient* R *et* R' *des systèmes de racines dans* V *et* V'. *Alors* $\mathrm{R} \sqcup \mathrm{R}'$ (*réunion disjointe*) *est un système de racine dans la somme directe orthogonale*

$$\mathrm{V} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{V}',$$

et son diagramme de Dynkin est la réunion disjointe de D(R) *et* $\mathrm{D}(\mathrm{R}')$.

Démonstration. — On vérifie facilement que $\mathrm{R} \sqcup \mathrm{R}'$ est un système de racines et que, si Δ, resp. Δ' est une base de R, resp. R′, alors

$$\Delta \sqcup \Delta' \quad \text{est une base de} \quad \mathrm{R} \sqcup \mathrm{R}'.$$

Comme $(\alpha, \beta) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$, $\beta \in \Delta'$, il en résulte que le diagramme de Dynkin de $\mathrm{R} \sqcup \mathrm{R}'$ est la réunion disjointe de $\mathrm{D(R)}$ et $\mathrm{D(R')}$. □

Notation 6.7. — On dit que $\mathrm{R} \sqcup \mathrm{R}'$ est la **somme directe** de R et R′. Pour plus de détails, voir [**BL4-6**, VI.1.2] ou [**Hu**, 10.4 & 11.3].

Par conséquent, pour terminer la classification des systèmes de racines, il suffit de montrer que chacun des diagrammes connexes énumérés en 5.3 est effectivement le diagramme de Dynkin d'un système de racines.

Pour A_n, B_n, C_n, D_n, on va voir cela dans la section suivante. D'autre part, on a déjà vu (séances du 17 et 23 octobre, 4.2) le système de racines G_2 de rang 2. Avec les notations de 4.2, les racines suivantes

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \sqrt{3}\,\exp(i5\pi/6) = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

forment une base de G_2. On a

$$(\beta, \alpha^\vee) = 2(\beta, \alpha) = -3,$$

et donc le diagramme de Dynkin associé est bien celui de type G_2.

Enfin, pour les systèmes de racines de type $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ et F_4, on renvoie à [**BL4-6**, Planches I–IX].

7. Classification des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples

7.1. Le système de racines de $\mathfrak{g}$. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a vu (séances du 16 et 17 octobre, § 3.6) que les poids non nuls de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ forment un système de racines $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dans $\mathfrak{h}^*$.

À isomorphisme près, ce système de racines ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$, d'après la proposition suivante. Soit G le groupe des automorphismes d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$; c'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. On rappelle que toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par G (Thm. 2.26, séances du 9 et 10 octobre).

Proposition 7.1. — $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de* $\mathfrak{h}$. *On dira que c'est le système de racines de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h}'$ une autre sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. D'après le théorème 2.26 (séances du 9 et 10 octobre), il existe un automorphisme g de $\mathfrak{g}$ tel que $g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$.

Soit $\alpha \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et soit $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul. Alors, pour tout $h' = g(h) \in \mathfrak{h}'$ on a :

$$[h', g(x)] = g([h, x]) = \alpha(h) g(x) = (\alpha \circ {}^t g^{-1})(h')\, g(x).$$

Ceci montre que $\alpha \circ {}^t g^{-1}$ est un poids, non nul, de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}$. On montre de même que, pour tout $\alpha' \in \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$, $\alpha' \circ {}^t g$ est un poids non nul de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Il en résulte que l'isomorphisme linéaire

$${}^t g^{-1} : \mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}'^*$$

applique bijectivement $\mathrm{R} := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur $\mathrm{R}' := \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$. Ceci montre que les systèmes de racines R et R′ sont isomorphes (cf. 4.3). □

7.2. Théorème d'existence et d'unicité. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines de $\mathfrak{g}$. Soit

$$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

une base de R. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $e_i \neq 0$ dans $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, et soit h_i l'élément de $\mathfrak{h}$ correspondant à $\alpha_i^\vee$, c.-à-d., l'unique élément $h_i \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\alpha_j(h_i) = (\alpha_j, \alpha_i^\vee), \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Enfin, soit f_i l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tel que $[e_i, f_i] = h_i$ (cf. 3.10). Alors, $(h_1, \ldots, h_n)$ est une base de $\mathfrak{h}$, et l'on a les relations suivantes, pour tout i, j :

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = (\alpha_j, \alpha_i^\vee) e_j, \quad [h_i, f_j] = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) f_j, \tag{1}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i, \tag{2}$$

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-(\alpha_j, \alpha_i^\vee)+1}(e_j) = 0 = (\operatorname{ad} f_i)^{-(\alpha_j, \alpha_i^\vee)+1}(f_j). \tag{3}$$

Théorème 7.2. — 1) $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à la* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie définie par* $3n$ *générateurs* $(h_i, e_i, f_i)_{i=1,\ldots,n}$ *soumis aux relations* (1)–(3) *ci-dessus. Par conséquent,* $\mathfrak{g}$ *est déterminée, à isomorphisme près, par son système de racines* R.

2) *Réciproquement, soient* R *un système de racines arbitraire et* Δ *une base de* R. *Alors la* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *définie par* $3n$ *générateurs* $(h_i, e_i, f_i)_{i=1,\ldots,n}$ *soumis aux relations* (1)–(3) *est semi-simple ; les* h_i *forment une base d'une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$*, et l'on a* $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{R}$.

3) *De plus, les idéaux simples de* $\mathfrak{g}$ *correspondent aux composantes connexes de* D(R). *Par conséquent, les* $\mathbb{C}$*-algèbres de Lie simples sont en bijection avec les diagrammes de Dynkin connexes, à savoir :*

$$\mathrm{A}_n, \quad \mathrm{B}_n, \quad \mathrm{C}_n, \quad \mathrm{D}_n, \quad \mathrm{E}_6, \quad \mathrm{E}_7, \quad \mathrm{E}_8, \quad \mathrm{F}_4, \quad \mathrm{G}_2.$$

Démonstration. — Pour la démonstration, on renvoie à [**Se**, Chap. VI] ou [**Hu**, § 18]. □

On va décrire plus bas les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie simples « classiques », correspondant aux diagrammes de type A–D.

7.3. Type $\mathrm{A}_{n-1} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. — Les matrices

$$\mathrm{E}_{i,j} \quad \text{pour } i \neq j \ \text{ et } \ \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i+1,i+1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1$$

forment une base de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$; les secondes forment une base de $\mathfrak{h}$, la sous-algèbre des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n$. Introduisons aussi $\widehat{\mathfrak{h}}$, l'algèbre des matrices diagonales dans $\mathfrak{gl}_n$. Alors $(\mathrm{E}_{1,1}, \dots, \mathrm{E}_{n,n})$ est une base de $\widehat{\mathfrak{h}}$; soit

$$(\widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n)$$

la base duale, c.-à-d., chaque $\widehat{\varepsilon}_i$ est la forme linéaire qui associe à toute matrice diagonale son i-ème coefficient diagonal. Pour tout $\widehat{h} \in \widehat{\mathfrak{h}}$ et tout $i \neq j$, on a

$$[\widehat{h}, \mathrm{E}_{i,j}] = (\widehat{\varepsilon}_i - \widehat{\varepsilon}_j)(\widehat{h})\, \mathrm{E}_{i,j}.$$

Notons ε_i la restriction de $\widehat{\varepsilon}_i$ à $\mathfrak{h}$. Alors, de la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}\mathrm{E}_{i,j} \tag{1}$$

on déduit que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan et que les racines sont les

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

On munit $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ du produit scalaire pour lequel $(\widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n)$ est une base orthonormale. Alors, pour tout $i \neq j$, la réflexion orthogonale $s_{i,j}$ associée à $\widehat{\varepsilon}_i - \widehat{\varepsilon}_j$ échange $\widehat{\varepsilon}_i$ et $\widehat{\varepsilon}_j$, et vérifie $s_{i,j}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$ pour $k \neq i, j$, et le groupe engendré est le groupe symétrique $\mathrm{W} = \mathrm{S}_n$, agissant par permutation des $\widehat{\varepsilon}_i$.

Alors, $\mathfrak{h}^*$ s'identifie à l'orthogonal de $\widehat{\varepsilon}_1 + \cdots + \widehat{\varepsilon}_n$ (qui est stable par W) et

$$\mathrm{R} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$$

est un système de racines dans $\mathfrak{h}^*$. Posons

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Alors $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ est une base de R, pour laquelle les racines positives sont les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, avec $i < j$. En effet, c'est une base de $\mathfrak{h}^*$, et pour $i < j$ l'on a :

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k.$$

Chaque $\beta \in \mathrm{R}$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à $\beta^\vee$, et pour $i < j$ l'on a

$$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } j = i+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type A_{n-1}.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1)/2$ racines positives, et (1) redonne bien la dimension connue :

$$\dim \mathfrak{g} = n - 1 + 2\,\frac{n(n-1)}{2} = (n-1)(n+1) = n^2 - 1,$$

7.4. Types B **et** D **: groupes orthogonaux.** — Soit ϕ une forme bilinéaire **symétrique** non dégénérée sur $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ et soit J sa matrice dans la base standard $(e_1, \ldots, e_{\mathrm{N}})$. Alors, pour

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i e_i, \qquad \mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i e_i,$$

on a, en notation matricielle,

$$\phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = {}^t\mathrm{X}\mathrm{J}\mathrm{Y} \qquad \text{et} \qquad \phi(\mathrm{AX}, \mathrm{AY}) = {}^t\mathrm{X}\,({}^t\mathrm{AJA})\,\mathrm{Y}$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$. Alors le groupe orthogonal de ϕ, formé des $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ qui préservent ϕ, est égal à :

$$(*) \qquad \mathrm{O}(\phi) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{AJA} = \mathrm{J}\}.$$

Comme dans la séance du 2 octobre, théorème 7.39 (qui était le cas particulier où J = id), on montre que l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}(\phi)$ est

$$(**) \qquad \mathfrak{so}(\phi) = \mathfrak{so}(\mathrm{J}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{AJ} + \mathrm{JA} = 0\}.$$

Comme J est symétrique, ceci équivaut à dire que la matrice JA est antisymétrique, et comme J est inversible on obtient que $\mathfrak{so}(\phi) = \mathrm{J}^{-1}\mathcal{AS}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$, où $\mathcal{AS}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des matrices antisymétriques. Donc

$$(***). \qquad \dim \mathfrak{so}(\phi) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}.$$

De plus, les égalités $\mathrm{A} = -\mathrm{J}^{-1}\,({}^t\mathrm{A})\mathrm{J}$ et $\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})$ entraînent que

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathfrak{so}(\phi), \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0, \quad \text{et donc} \quad \mathfrak{so}(\phi) \subseteq \mathfrak{sl}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C}),$$

ce qui justifie la notation $\mathfrak{so}(\phi)$. Enfin, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, toutes les formes bilinéaires symétriques non dégénérées sont équivalentes. Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(\phi)$ obtenues sont donc toutes isomorphes, et par abus de notation l'on désignera par

$$\mathfrak{so}_{\mathrm{N}} = \mathfrak{so}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$$

l'une quelconque d'entre elles, correspondant à un J arbitrairement choisi.

On pourrait prendre

$$\mathrm{J} = \mathrm{id}, \quad \text{qui correspond à} \quad \phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i \mathrm{Y}_i,$$

c.-à-d., à la forme quadratique $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \phi(\mathrm{X},\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i^2$. Mais il est plus commode de prendre pour J la matrice ayant des 1 sur la 2ème diagonale et des 0 partout ailleurs, c.-à-d.,

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 0 \cdots & 0 & 1 \\ 0 \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 \;\; 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{J}^{-1} = \mathrm{J}$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$, l'on a :

(†) $\mathrm{J}\,{}^t\!\mathrm{A}\,\mathrm{J}$ est la « symétrique de A par rapport à la 2ème diagonale ».

Écrivons $\mathrm{N} = 2n$ ou $2n+1$, selon la parité de N. (Explicitement, n est le plus petit entier $\geqslant (\mathrm{N}-1)/2$.) Il est commode d'introduire la notation suivante. On pose, pour tout entier $i \leqslant n$:

$$\bar{i} = \mathrm{N} + 1 - i.$$

Avec cette notation, la base standard de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ est notée :

$$\begin{array}{ll} (e_1, \dots, e_n, e_{\overline{n}}, \dots, e_{\overline{1}}) & \text{si } \mathrm{N} = 2n; \\ (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{\overline{n}}, \dots, e_{\overline{1}}) & \text{si } \mathrm{N} = 2n+1. \end{array}$$

Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{\mathrm{N}}$ et soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des matrices diagonales dans $\mathfrak{g}$. On déduit de (†) que les matrices :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{\bar{i},\bar{i}}, \qquad i = 1, \dots, n;$$

forment une base de $\mathfrak{h}$. Notons

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

la base duale de $\mathfrak{h}^*$, c.-à-d.,

$$(\star) \qquad \forall\, h = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{H}_i \in \mathfrak{h}, \qquad \varepsilon_i(h) = x_i.$$

De plus, on déduit de (†) que, avec les H_i, les matrices suivantes forment une base de $\mathfrak{g}$:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} := \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\bar{j},\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)} := \mathrm{E}_{j,i} - \mathrm{E}_{\bar{i},\bar{j}}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} := \mathrm{E}_{i,\bar{j}} - \mathrm{E}_{j,\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} := \mathrm{E}_{\bar{j},i} - \mathrm{E}_{\bar{i},j}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n;$$

$$\text{(4)} \qquad \text{et, si } \mathrm{N} = 2n+1, \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i} := \mathrm{E}_{i,n+1} - \mathrm{E}_{n+1,\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-\varepsilon_i} := \mathrm{E}_{n+1,i} - \mathrm{E}_{\bar{i},n+1}, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n.$$

On vérifie que chaque X_α, resp. $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, est de poids α, resp. $-\alpha$, par exemple :

$$[h, \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\bar{j},\bar{i}}] = (x_i - x_j)\mathrm{E}_{i,j} + (x_j - x_i)\mathrm{E}_{\bar{j},\bar{i}} = (x_i - x_j)\left(\mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\bar{j},\bar{i}}\right).$$

Désignant par $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, le sous-espace des matrices $\mathrm{A} \in \mathfrak{g}$ qui sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) avec des 0 sur la diagonale, on obtient que les X_α, resp. les $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, forment une base de $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, et que cette décomposition

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^+ \sqcup \mathrm{R}^-$$

correspond au choix de la base de R suivante.

7.4.1. Cas de $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. — Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n-1; \\ \alpha_n &= \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de R ; les racines positives correspondantes sont les :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i - \varepsilon_j = \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ &\varepsilon_i + \varepsilon_n = \alpha_n + \textstyle\sum_{k=i}^{n-2} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1; \\ &\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_n + \alpha_{n-1} + 2\textstyle\sum_{k=j}^{n-2} \alpha_k + \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n-1. \end{aligned}$$

Comme en type A, chaque $\beta \in \mathrm{R}$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à $\beta^\vee$, et pour $i < j$ l'on a

$$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } j = i+1 \text{ ou si } j = n \text{ et } i = n-2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type D_n.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1)$ racines positives, et la base donnée par (1)–(3) redonne bien la dimension déjà calculée :

$$\dim \mathfrak{g} = n + 2n(n-1) = n(2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2}.$$

7.4.2. Cas de $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. — Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n-1; \\ \alpha_n &= \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de R ; les racines positives correspondantes sont les :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i - \varepsilon_j &= \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ \varepsilon_i &= \textstyle\sum_{k=i}^{n} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j &= \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2\sum_{k=j}^{n} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{aligned}$$

Cette fois, chaque racine $\beta = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à $\beta^\vee$; par contre, pour $\alpha = \varepsilon_i$ on a $\alpha^\vee = 2\alpha$. Il en résulte que l'on a, pour $i < j$:

$$(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = \begin{cases} -2 & \text{si } j = n \text{ et } i = j-1; \\ -1 & \text{si } j < n \text{ et } i = j-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type B_n.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1) + n = n^2$ racines positives, et la base donnée par (1)–(4) redonne bien la dimension déjà calculée :

$$\dim \mathfrak{g} = n + 2n^2 = n(2n+1) = \frac{(2n+1)2n}{2}.$$

7.5. Type C **: groupes symplectiques. —** Soit ϕ une forme bilinéaire **antisymétrique** non dégénérée sur $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$. Alors, nécessairement, $\mathrm{N} = 2n$ et, comme toutes les formes symplectiques sont équivalentes, on peut supposer que la matrice de ϕ dans la base $(e_1, \dots, e_{2n})$ est

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{S} \\ \mathrm{S} & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice ayant des 1 sur la 2ème diagonale et des 0 partout ailleurs. C.-à-d., pour $i = 1, \dots, n$, posant $\overline{i} = 2n + 1 - i$, on a :

$$\phi(e_i, e_{\overline{i}}) = 1 = -\phi(e_{\overline{i}}, e_i)$$

et $\phi(e_i, e_j) = 0$ si $j \neq \overline{i}$. Alors le groupe symplectique, formé des $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ qui préservent ϕ, est égal à :

$$(*) \qquad \mathrm{SP}(2n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\mathrm{AJA} = \mathrm{J}\}.$$

Comme pour les groupes orthogonaux, on montre que son algèbre de Lie est

$$(**) \qquad \mathfrak{sp}_{2n} = \{a \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^ta\mathrm{J} + \mathrm{J}a = 0\}.$$

Comme J est antisymétrique, ceci équivaut à dire que la matrice $\mathrm{J}a$ est symétrique, et comme J est inversible on obtient que $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathrm{J}^{-1}\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{C})$, où $\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des matrices symétriques. Donc

$$(***) \qquad \dim \mathfrak{sp}_{2n} = n(2n+1).$$

De plus, les égalités $a = -\mathrm{J}^{-1}({}^ta)\mathrm{J}$ et $\mathrm{Tr}({}^ta) = \mathrm{Tr}(a)$ entraînent que

$$\forall\, a \in \mathfrak{sp}_{2n}, \quad \mathrm{Tr}(a) = 0, \quad \text{et donc} \quad \mathfrak{sp}_{2n} \subseteq \mathfrak{sl}_{2n},$$

ce qui justifie la notation $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Écrivant $a = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on voit que la condition ${}^ta\mathrm{J} + \mathrm{J}a = 0$ est équivalente aux conditions suivantes :

$$(\ddagger) \qquad \mathrm{D} = -\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{AS}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{S}\,{}^t\mathrm{BS}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{S}\,{}^t\mathrm{CS}.$$

Donc A est arbitraire et, d'après (†) vu dans le cas orthogonal, B et C sont symétriques par rapport à la 2ème diagonale et $-\mathrm{D}$ est le symétrique de A par rapport à la 2ème diagonale.

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des matrices diagonales dans $\mathfrak{sp}_{2n}$. On déduit de (‡) que les matrices :

$$\mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{\bar{i},\bar{i}}, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

forment une base de $\mathfrak{h}$. Notons

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

la base duale de $\mathfrak{h}^*$, c.-à-d.,

$$\forall\, h = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{H}_i \in \mathfrak{h}, \qquad \varepsilon_i(h) = x_i. \tag{$\star$}$$

De plus, on déduit de (‡) que, avec les H_i, les matrices suivantes forment une base de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} & := \mathrm{E}_{i,j} - \mathrm{E}_{\bar{j},\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)} & := \mathrm{E}_{j,i} - \mathrm{E}_{\bar{i},\bar{j}}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n; \tag{2}$$

$$\begin{cases} \mathrm{X}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} & := \mathrm{E}_{i,\bar{j}} + \mathrm{E}_{j,\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} & := \mathrm{E}_{\bar{j},i} + \mathrm{E}_{\bar{i},j}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n; \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mathrm{X}_{2\varepsilon_i} & := \mathrm{E}_{i,\bar{i}}, \\ \mathrm{Y}_{-2\varepsilon_i} & := \mathrm{E}_{\bar{i},i}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

On vérifie que chaque X_α, resp. $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, est de poids α, resp. $-\alpha$. Désignant par $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, le sous-espace des matrices $\mathrm{A} \in \mathfrak{sp}_{2n}$ qui sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) avec des 0 sur la diagonale, on obtient que les X_α, resp. les $\mathrm{Y}_{-\alpha}$, forment une base de $\mathfrak{n}^+$, resp. $\mathfrak{n}^-$, et que cette décomposition

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^+ \sqcup \mathrm{R}^-$$

correspond au choix de la base de R suivante. Posons

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1; \\ \alpha_n &= 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Alors, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est une base de R ; les racines positives correspondantes sont les :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i - \varepsilon_j &= \textstyle\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ 2\varepsilon_i &= \alpha_n + 2\textstyle\sum_{k=i}^{n-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j &= \alpha_n + 2\textstyle\sum_{k=j}^{n-1} \alpha_k + \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k, && \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{aligned}$$

Chaque racine $\beta = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ est de norme $\sqrt{2}$, donc égale à la coracine $\beta^\vee$; par contre, pour $\alpha = 2\varepsilon_i$ on a $\alpha^\vee = \alpha/2$. Il en résulte que l'on a, pour $i < j$:

$$(\alpha_j, \alpha_i^\vee) = \begin{cases} -2 & \text{si } j = n \text{ et } i = j-1; \\ -1 & \text{si } j < n \text{ et } i = j-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que le diagramme de Dynkin associé est de type C_n.

Enfin, à titre de vérification, il y a $n(n-1) + n = n^2$ racines positives, et la base donnée par (1)–(4) redonne bien la dimension déjà calculée :

$$\dim \mathfrak{sp}_{2n} = n + 2n^2 = n(2n+1).$$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.