SÉANCE DU 25/9

5. L'algèbre des « fonctions représentatives »

Dans la séance précédente, dirigée vers le théorème de Peter-Weyl, on s'est arrêté au théorème de décomposition spectrale pour les opérateurs compacts auto-adjoints, qui sera un outil-clé d'analyse fonctionnelle pour établir une certaine propriété algébrique des groupes compacts. On va d'abord introduire les résultats algébriques nécessaires, et on reviendra ensuite à l'énoncé et la démonstration du théorème de Peter-Weyl.

Dans cette section, G est un groupe topologique arbitraire (c.-à-d., pas nécessairement compact).

5.1. Coefficients matriciels. — Dans ce paragraphe, on fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie n. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V, et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de V^*.

D'une part, comme V est de dimension finie, toute forme linéaire $\phi : V \to \mathbb{C}$ est continue. D'autre part, si X est un espace topologique, une application $f : X \to V$ est continue si et seulement si chacune des « coordonnées » $f_i = e_i^* \circ f$ est continue.

***Définition 5.1* (Représentation duale).** — (ou contragrédiente). Soit ρ une représentation de G dans V. On obtient une représentation de G dans V^*, notée ρ^*, définie par

$$(\rho^*(g)\phi)(v) = \phi(g^{-1} \cdot v).$$

Pour vérifier sa continuité, il suffit de voir que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'application

$$(g, \phi) \mapsto \langle e_i, \rho^*(g)\phi \rangle = \phi(g^{-1} e_i)$$

est continue, ce qui est bien le cas.

[0] version du 25/9/06

***Définition 5.2* (Produit tensoriel de représentations)**. — Soient G et G' deux groupes topologiques et ρ, resp. ρ', une représentation continue de G, resp. G', dans un espace de dimension finie V, resp. V'. Alors on a une représentation de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}'$ dans $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}'$, notée $\rho \otimes \rho'$, définie par

$$(\rho(g) \otimes \rho'(g'))(v \otimes v') = \rho(g)v \otimes \rho'(g')v'.$$

On vérifie facilement que $\rho \otimes \rho'$ est continue, en prenant des bases de V et V'.

En particulier, si $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$ alors $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}'$ est aussi un G-module continu via le plongement diagonal de G dans $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$; c.-à-d., on a une représentation continue $\rho \otimes \rho'$ de G dans $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}'$ définie par

$$g \cdot (v \otimes v') = gv \otimes gv'.$$

Définition 5.3. — Soit ρ une représentation continue de G dans V. Alors, pour tout $v \in \mathrm{V}$, $\phi \in \mathrm{V}^*$, la fonction

$$c_{\phi,v} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g \mapsto \phi(g \cdot v)$$

est continue. Une telle fonction s'appelle un **coefficient matriciel** de G, relativement à la représentation V.

Cette terminologie s'explique comme suit. Le choix de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de V, et de la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, fournit une identification $\mathrm{GL}(\mathrm{V}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et, via cette identification, chaque $\rho(g)$ est représenté par une matrice

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(g) & \cdots & a_{1,n}(g) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(g) & \cdots & a_{n,n}(g) \end{pmatrix};$$

alors chaque $c_{e_i^*,e_j}(g)$ n'est autre que le coefficient matriciel $a_{i,j}(g)$ (= coefficient sur e_i de $g \cdot e_j$). D'autre part, tout $\phi \in \mathrm{V}^*$ (resp. $v \in \mathrm{V}$) est une combinaison linéaire des e_i^* (resp. des e_j), donc $c_{\phi,v}$ est une combinaison linéaire des $c_{e_i^*,e_j} = a_{i,j}$.

On note $c(\mathrm{V})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}(\mathrm{G})$ engendré par les coefficients matriciels de V. C'est l'image du morphisme de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$-modules

$$\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{G}), \qquad \phi \otimes v \mapsto c_{\phi,v},$$

où la représentation de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans $\mathrm{C}(\mathrm{G})$ est donnée par

$$((g, g')\phi)(h) = \phi(g^{-1}hg'),$$

c.-à-d., $(g, g') \cdot \phi = \mathrm{L}(g)\mathrm{R}(g')\phi$.

Lemme 5.4. — 1) *Si* $\mathrm{V} \cong \mathrm{V}'$, *alors* $c(\mathrm{V}) = c(\mathrm{V}')$.

2) *D'autre part,* $c(\mathrm{V}) = c(\mathrm{V}^*)$. (*Mais, en général,* $\mathrm{V}^* \not\cong \mathrm{V}$.)

3) *Si* $\mathrm{E} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{V}'$, *alors* $c(\mathrm{E}) = c(\mathrm{V}) + c(\mathrm{V}')$.

Démonstration. — 1) Notons ρ, resp. ρ', la représentation de G dans V, resp. V'. Soit $\gamma : V \xrightarrow{\sim} V'$ un isomorphisme, c.-à-d., un isomorphisme linéaire tel que $\gamma \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \gamma$ pour tout $g \in G$. Soit (e_i) une base de V et soit (e'_i) son image par γ. Alors les matrices de ρ dans (e_i) et de ρ' dans (e'_i) sont égales, donc on obtient les mêmes coefficients matriciels.

2) Si on note $\tau : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ l'isomorphisme canonique, on a, pour tout $\phi \in V^*$ et $v \in V$:

$$c_{\phi,v} = c_{\tau(v),\phi}.$$

En termes plus simples, si (e_i) est une base de V et (e_i^*) la base duale de V^*, la matrice de $\rho^*(g)$ dans (e_i^*) est la transposée de celle de $\rho(g^{-1})$ dans (e_i), donc on obtient le même espace de coefficients matriciels.

3) Soit $\mathscr{B}$, resp. $\mathscr{B}'$, une base de V, resp. V'. Alors $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de E et, comme V et V' sont stables par G, la matrice dans cette base de chaque g est diagonale par blocs, c.-à-d., les seuls coefficients matriciels non nuls sont ceux de $c(V)$ ou $c(V')$.

Théorème 5.5. — *Le sous-espace* $\mathscr{R}(G)$ *des coefficients matriciels est une sous-algèbre de* $C(G)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que si $a_{i,j}$, resp. $b_{k,\ell}$ est un coefficient matriciel de G dans un espace V, resp. W, alors $a_{i,j}b_{k,\ell}$ est aussi un coefficient matriciel.

Soient (e_i), resp. (f_k) une base de V, resp. W, et (e_i^*), resp. (f_k^*), la base duale de V^*, resp. de W^*, de sorte que

$$a_{i,j} = c_{e_i^*,e_j}, \qquad b_{k,\ell} = c_{e_k^*,e_\ell}.$$

Alors $(e_i \otimes f_j)$ est une base de $V \otimes W$, et $(e_i^* \otimes f_k^*)$ est la base duale de $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$. On vérifie alors que, pour tout $g \in G$,

$$\langle e_i^* \otimes f_k^*, g \cdot (e_j \otimes f_\ell)\rangle = a_{i,j}(g)b_{k,\ell}(g).$$

Ceci montre que le produit $a_{i,j}b_{k,\ell}$ est le coefficient matriciel $c_{e_i^*\otimes f_k^*, e_j \otimes f_\ell}$ de $V \otimes W$.

5.2. Fonctions représentatives. — Soit $f \in C(G)$. Par abus de notation, on désigne par $L(G)f$ le sous-espace vectoriel de $C(G)$ engendré par les translatés à gauche $L(g)f$, pour $g \in G$. C'est donc le sous-$L(G)$-module de $C(G)$ engendré par f. On définit de même $R(G)f$.

Théorème 5.6. — *Soit* $f \in C(G)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $L(G)f$ *est de dimension finie ;*

(ii) $R(G)f$ *est de dimension finie ;*

(iii) $f \in \mathscr{R}(G)$.

On obtient ainsi la sous-algèbre des fonctions représentatives. C'est un sous-$\mathrm{G}\times\mathrm{G}$*-module* localement fini *de* $\mathrm{C}(\mathrm{G})$*, c.-à-d., pour tout* $f\in\mathscr{R}(\mathrm{G})$*, le sous-*$\mathrm{G}\times\mathrm{G}$*-module engendré par* f *est de dimension finie.*

Démonstration. — Comme $c(\mathrm{V})$ est un sous-$\mathrm{G}\times\mathrm{G}$-module de dimension finie, puisque image du module de dimension finie $\mathrm{V}^*\otimes\mathrm{V}$, il est clair que (iii) implique (i) et (ii).

On va montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Posons $\mathrm{V}=\mathrm{R}(\mathrm{G})f$; par hypothèse, $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{V}<\infty$. On va montrer que $f\in c(\mathrm{V})$. En effet, soient $(f_1,\dots,f_n)$ une base de V, et $(f_1^*,\dots,f_n^*)$ la base duale. Alors, pour tout $g\in\mathrm{G}$, on a

$$\mathrm{R}(g)f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g)f_i,\quad \text{et}\quad \alpha_i(g)=c_{f_i^*,f}(\mathrm{R}(g)).$$

Comme $f(g)=(\mathrm{R}(g)f)(1)=\sum_i\alpha_i(g)f_i(1)$, on obtient que

$$f=\sum_{i=1}^{n}f_i(1)c_{f_i^*,f}.$$

Donc $f\in c(\mathrm{V})$ et par conséquent f est aussi L(G)-finie. On montre de même que (i) $\Rightarrow$ (iii).

5.3. Cas des groupes compacts. — Supposons G compact. On a vu (4.1) que toute représentation continue de dimension finie est somme directe de représentations continues irréductibles unitaires. Par conséquent, notant $\widehat{\mathrm{G}}^f$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations continues irréductibles unitaires de G de dimension finie, on a, d'après le point 3) du lemme 5.4 :

$$\mathscr{R}(\mathrm{G})=\sum_{\pi\in\widehat{\mathrm{G}}^f}c(\pi).$$

De plus, il résulte du théorème de Burnside (voir paragraphe suivant), que chaque $\pi^*\otimes\pi$ est un $\mathrm{G}\times\mathrm{G}$-module simple ; par conséquent, le morphisme de $\mathrm{G}\times\mathrm{G}$-modules

$$\pi^*\otimes\pi\longrightarrow c(\pi),\quad \phi\otimes v\mapsto c_{\phi,v},$$

qui est surjectif (par définition), et non nul (car $a_{1,1}(\mathrm{id})=1$), est nécessairement un isomorphisme. De plus, si $\pi\ncong\pi'$, les modules simples $c(\pi)$ et $c(\pi')$ sont non isomorphes (voir plus bas). Comme une somme de modules simples non isomorphes est nécessairement une somme directe (voir plus bas), on obtient le théorème ci-dessous.

Théorème 5.7. — *Pour* G *compact, on a*

$$\mathscr{R}(\mathrm{G})=\bigoplus_{\pi\in\widehat{\mathrm{G}}^f}\pi^*\otimes\pi.$$

Remarque 5.8. — On peut montrer que c'est une somme directe orthogonale pour le produit scalaire

$$(a, b) = \int_{\mathrm{G}} a(g)\overline{b(g)}dg.$$

On n'en a pas besoin pour établir la densité de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{C(G)}$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$; mais c'est mieux de le savoir pour décomposer $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. Pour la démonstration de ces « relations d'orthogonalité », voir [**BtD**, Ch. II, 4.5 & 4.6] ou [**Ro**, Th. 5.6].

5.4. Schur, Burnside et produits tensoriels. —

***Lemme 5.9* (Lemme de Schur)**. — *Soient* A *une* $\mathbb{C}$*-algèbre et* V *un* A*-module simple de dimension finie sur* $\mathbb{C}$*. Alors tout* A*-endomorphisme de* V *est scalaire, c.-à-d.,* $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V}) = \mathbb{C}$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{D} = \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})$. C'est un corps (éventuellement non-commutatif). En effet, soit $\phi \in \mathrm{D} \setminus \{0\}$. Comme V est un A-module simple, on a nécessairement $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ et $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{V}$, donc ϕ est un isomorphisme.

De plus, puisque D est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{D} < \infty$. Donc, $\mathrm{D} = \mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

En effet, soit $\alpha \in \mathrm{D}$ et soit $f : \mathbb{C}[\mathrm{X}] \to \mathrm{D}$ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres défini par $f(\mathrm{X}) = \alpha$; son image est la sous-algèbre $\mathbb{C}[\alpha]$ de D engendrée par α, qui est intègre. Par conséquent $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal premier de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, non nul puisque $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\alpha] < \infty$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{P})$, où P est un polynôme irréductible unitaire. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, P est de degré 1 et donc $\alpha \in \mathbb{C}$. Ceci montre que $\mathrm{D} = \mathbb{C}$. Le lemme est démontré. □

***Théorème 5.10* (Burnside)**. — *Soient* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* A *une sous-algèbre de* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$*. Si* V *est un* A*-module simple, alors* $\mathrm{A} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$.

Une preuve de ce théorème est donnée en appendice, à la fin de cette section. Elle est due à Bourbaki ([**BA8**, § 4]) ; la version qu'on donne provient de [**La**, XVII, § 3]. Pour une autre preuve, voir par exemple [**He**, Ch. 2, § 1].

Corollaire 5.11. — *Soient* G *un groupe topologique et* V *un* G*-module de dimension finie irréductible. Alors* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ *est engendré, comme espace vectoriel, par* $\rho(\mathrm{G})$.

Démonstration. — Comme $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V} < \infty$, alors tout sous-espace vectoriel est fermé, donc V est algébriquement irréductible, c.-à-d., ne contient pas de sous-espace $\neq \mathrm{V}$, non nul et stable par G. Soit A le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ engendré par les $\rho(g)$, pour $g \in \mathrm{G}$. C'est une sous-algèbre, et V est un A-module simple. Donc $\mathrm{A} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$, d'après le théorème de Burnside.

Proposition 5.12. — *Soient* G, H *deux groupes topologiques et* V*, resp.* W*, une représentation irréductible de dimension finie de* G*, resp.* H*. Alors* $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{W}$ *est une représentation irréductible de* $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$.

Démonstration. — Soit (e_i), resp. (f_j), une base de V, resp. W. Soit $x \in \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ non nul et soit E le sous-$\mathrm{G} \times \mathrm{H}$-module engendré par x. On peut écrire

$$x = \sum_i e_i \otimes w_i,$$

avec les w_i non tous nuls, disons $w_1 \neq 0$. Comme E est stable par $\rho(\mathrm{G})$ alors, d'après le corollaire précédent, E contient $e_i \otimes w_1$ pour tout i ; puis comme E est stable par $\rho'(\mathrm{H})$ il contient $e_i \otimes f_j$ pour tout i et j.

5.5. Résultats sur les modules semi-simples. — On rassemble dans ce paragraphe quelques résultats dont on a besoin pour démontrer le théorème 5.7, ainsi que le théorème de Burnside 5.10. Pour plus de résultats sur les modules semi-simples, le lecteur intéressé pourra consulter [**He**, Ch. 1 & 2] ou [**Bl**, Ch. II] (deux références très agréables à lire).

Soit A un anneau. Un A-module est dit semi-simple s'il est somme directe de sous-modules simples.

Lemme 5.13. — *Soit* $\mathrm{E} = \mathrm{S}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{S}_n$*, où chaque* S_i *est un* A*-module simple.*

1) *Soit* F *un sous-module de* E*. Il existe* $\mathrm{J} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *tel que*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \bigoplus \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{S}_j.$$

2) *Soit* S *un sous-module simple de* E*. Alors* S *est isomorphe à l'un des* S_i.

Démonstration. — 1) Soit $\mathrm{J} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathrm{F} \cap (\bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{S}_j) = (0)$, et **maximal** pour cette propriété. Alors la somme

$$\mathrm{F}' := \mathrm{F} \bigoplus \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{S}_j$$

est une somme directe, et contient bien sûr S_j, pour tout $j \in \mathrm{J}$. Soit $i \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$; alors $\mathrm{F}' \cap \mathrm{S}_i \neq (0)$, car sinon on aurait une somme directe

$$\mathrm{F}'' = \mathrm{F}' \bigoplus \mathrm{S}_i,$$

contredisant la maximalité de J. Comme S_i est simple, on a donc $\mathrm{S}_i = \mathrm{S}_i \cap \mathrm{F}'$, soit $\mathrm{S}_i \subseteq \mathrm{F}'$. Il en résulte que $\mathrm{F}' = \mathrm{E}$. Ceci prouve 1).

2) Ceci peut se déduire de 1), comme suit. Posons $\mathrm{I} = \{1, \ldots, n\}$. D'après 1), il existe $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$ tel que

$$\mathrm{E} = \mathrm{S} \bigoplus \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{S}_j, \qquad (*)$$

et l'on a $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$, car sinon la somme ci-dessus ne serait pas directe. Il résulte de $(*)$ que :

$$\mathrm{S} \cong \frac{\mathrm{E}}{\bigoplus_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{S}_j} \cong \bigoplus_{i\in\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}} \mathrm{S}_i.$$

Comme S est irréductible, $\mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$ est nécessairement un singleton $\{i\}$, et l'on a $\mathrm{S} \cong \mathrm{S}_i$.

On peut aussi démontrer 2) directement, comme suit. Notons π_i la projection de E sur S_i et τ_i l'inclusion $\mathrm{S}_i \subset \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{id}_\mathrm{E} = \sum_i \tau_i \circ \pi_i$, alors l'une au moins des projections $\pi_i(\mathrm{S})$ est non nulle. Comme S et S_i sont tous les deux simples, alors π_i induit un isomorphisme de S sur S_i.

Corollaire 5.14. — *Soient* S *et* T *deux* A*-modules simples non-isomorphes, et* m, n *deux entiers* $\geqslant 1$. *Alors*

$$\mathrm{S}^{\oplus m} \ncong \mathrm{T}^{\oplus n}$$

Démonstration. — S'il existait un isomorphisme ϕ, alors $\phi(\mathrm{S})$ serait un sous-module de $\mathrm{T}^{\oplus n}$ isomorphe à S, or d'après le lemme précédent, tout sous-module simple de $\mathrm{T}^{\oplus n}$ est isomorphe à $\mathrm{T} \ncong \mathrm{S}$.

Corollaire 5.15. — *Soit* E *un* A*-module, et* $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de sous-modules simples.*

1) *Tout sous-module simple de* $\sum_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ *est isomorphe à l'un des* S_i.

2) *Si les* S_i *sont deux à deux non isomorphes, leur somme est directe.*

Démonstration. — 1) Soit S un sous-module simple de $\sum_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{S}_i$ et soit $s \in \mathrm{S}$ non nul. Alors s s'écrit comme une somme finie

$$s = \sum_j s_j, \quad \text{avec} \quad s_j \in \mathrm{S}_j.$$

Donc S est un sous-module de $\mathrm{V} = \sum_j \mathrm{S}_j$. Notons $\mathrm{M} = \bigoplus_j \mathrm{S}_j$ et soit K le noyau de la surjection

$$\bigoplus_j \mathrm{S}_j \twoheadrightarrow \mathrm{V}.$$

D'après le lemme 5.13, il existe un sous-module M' de M tel que $\mathrm{M} = \mathrm{K} \oplus \mathrm{M}'$, et l'on a

$$\mathrm{M}' \cong \mathrm{M}/\mathrm{K} \cong \mathrm{V}.$$

Par conséquent, S est isomorphe à un sous-module simple de M, donc à l'un des S_j. Ceci prouve 1).

2) Supposons les S_i deux à deux non isomorphes. Supposons qu'on ait une égalité

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} x_j = 0,$$

où J est un ensemble fini de I, et x_j un élément non nul de S_j. Soit $j \in J$. Alors

$$x_j = \sum_{k \neq j} x_k \in \sum_{k \neq j} S_k,$$

et donc $S_j \subseteq \sum_{k \neq j} S_k$. D'après le point 1), ceci est une contradiction avec l'hypothèse que les S_i sont deux à deux non isomorphes.

Démontrons maintenant le théorème 5.7. Il faut voir que si $\pi \ncong \pi'$, alors $c(\pi)$ et $c(\pi')$ ne sont pas isomorphes comme $G \times G$-modules. En fait, comme R(G)-module, $c(\pi)$ est isomorphe à

$$\pi^{\oplus \dim \pi},$$

et de même pour π'. Donc, d'après le corollaire 5.14, $c(\pi)$ et $c(\pi')$ ne sont déjà pas isomorphes comme R(G)-modules, donc ne le sont pas non plus comme $G \times G$-modules.

5.6. Appendice : preuve du théorème de Burnside. — Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.16. — *Soit* E *un* A*-module semi-simple, soit* C *son* commutant, *c.-à-d.,*

$$C = \mathrm{End}_A(E),$$

et soient $f \in \mathrm{End}_C(E)$ *et* $x \in E$. *Alors, il existe* $a \in A$ *tel que* $ax = f(x)$.

Démonstration. — D'après le lemme 5.13, le sous-module Ax admet un supplémentaire, c.-à-d., il existe un sous-A-module N de E tel que

$$E = Ax \bigoplus N.$$

Notons π la projection de E sur Ax, et τ l'inclusion de Ax dans E. Alors $p = \tau \circ \pi$ est un A-endomorphisme de E, c.-à-d., un élément de C, et l'on a $x = p(x)$. Par hypothèse, f commute à p donc

$$f(x) = f(p(x)) = p(f(x)).$$

Ceci montre que $f(x) \in Ax$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = ax$. (Joli, n'est-ce pas ?)

***Théorème 5.17* (de densité de Jacobson)**. — *Soit* S *un* A*-module simple, soit* $K = \mathrm{End}_A(S)$ *son commutant, et soit* $f \in \mathrm{End}_K(S)$. *Pour tout* $n \geqslant 1$ *et* $x_1, \dots, x_n \in S$, *il existe* $a \in A$ *tel que*

$$ax_i = f(x_i), \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Démonstration. — Soient $n \geqslant 1$ et $\mathrm{E} = \mathrm{S}^{\oplus n}$. Notons

$$f^{\oplus n} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \qquad (s_1, \ldots, s_n) \mapsto (f(s_1), \ldots, f(s_n))$$

l'application induite par f. Déterminons $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})$. Notons τ_i, resp. π_j, l'inclusion du i-ème facteur $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{E}$, resp. la projection sur le j-ème facteur $\mathrm{E} \twoheadrightarrow \mathrm{S}_j$. Pour tout $\phi \in \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})$, la composée

$$\pi_j \circ \phi \circ \tau_i : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}$$

est un A-morphisme, donc un élément de K (éventuellement nul). On en déduit que, si on identifie E à

$$\mathrm{K}^n \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{S},$$

alors $\mathrm{C} = \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})$ s'identifie à $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, agissant sur le premier facteur. D'autre part, $f^{\oplus n}$ s'identifie à f agissant sur le deuxième facteur, donc commute à C. Donc, d'après le lemme précédent, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}$, il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $ax = f^{\oplus n}(x)$, c.-à-d., $ax_i = f(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Le théorème est démontré.

Le théorème de Burnside en découle immédiatement. En effet, soit A une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $\mathrm{V} = \mathbb{C}^n$ soit un A-module simple. D'après le lemme de Schur, le commutant $\mathrm{K} = \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})$ égale $\mathbb{C}$, donc le bicommutant $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ égale $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $f \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$; d'après le théorème de densité, il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $ae_i = f(e_i)$, pour tout i, d'où $f = a$. Ceci montre que $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$.

4. Théorème de Peter-Weyl (suite)

4.4. Opérateurs à noyaux. —

***Théorème 4.7* (Ascoli).** — *Soit* X *un espace compact et* Φ *un sous-ensemble de* C(X). *On suppose que* Φ *est équicontinu et que pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *l'ensemble*

$$\Phi(x) := \{\phi(x) \mid \phi \in \Phi\}$$

est une partie bornée de $\mathbb{C}$. *Alors,* Φ *est totalement borné dans* C(X), *donc son adhérence est compacte.*

Démonstration. — Voir par exemple [**Di81**, 6.3.1] ou [**Ru73**, Appendix, A5]. □

Soit G un groupe compact. Sur C(G), on peut introduire le produit scalaire hermitien

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)\overline{\psi(g)}dg,$$

et donc la norme $\|\phi\|_2 = \sqrt{(\phi, \phi)}$. On note $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ le complété de $\mathrm{C}(\mathrm{G})$ pour cette norme. Alors l'inclusion $\tau : \mathrm{C}(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ est continue et son image est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$.

Pour tout $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, la forme linéaire

$$(-, \phi) : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \psi \mapsto (\psi, \phi)$$

est continue, car

$$|(\psi, \phi)| \leqslant \|\phi\|_2 \cdot \|\psi\|_2 \tag{1}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $k \in \mathrm{C}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$. Pour chaque $x \in \mathrm{G}$, l'application $k_x : y \mapsto k(x, y)$ est continue ; de plus, comme k est uniformément continue sur le compact $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, alors l'application

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{G}), \qquad x \mapsto k_x$$

est continue. Pour tout $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, définissons $\mathrm{K}(\phi)$ par

$$\mathrm{K}(\phi)(x) = \int_{\mathrm{G}} k(x, y)\phi(y)dy = (k_x, \overline{\phi}). \tag{2}$$

D'après ce qui précède, $\mathrm{K}(\phi)$ est une fonction continue. On a donc défini un opérateur linéaire

$$\mathrm{K} : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G}).$$

Lemme 4.8. — 1) *L'opérateur* $\mathrm{K} : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \to \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *est compact.*

2) *Si de plus k vérifie $k(y, x) = \overline{k(x, y)}$, alors* K *est auto-adjoint.*

3) *Si k est* G*-invariant à gauche, c.-à-d., si $k(gx, gy) = k(x, y)$, alors l'opérateur* K *commute aux translations* $\mathrm{L}(g)$. *Par conséquent, chaque espace propre de* K *dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *est stable par* $\mathrm{L}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — 1) Posons $\mathrm{M} = \|k\|_\infty = \sup_{(x,y)\in \mathrm{G}\times\mathrm{G}} |k(x, y)|$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{G}$, on a $\|k_x\|_2 \leqslant \mathrm{M}$. Combinant ceci avec (2) et (1), on obtient

$$|\mathrm{K}(\phi)(x)| \leqslant \mathrm{M} \cdot \|\phi\|_2.$$

Donc, pour tout $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ tel que $\|\phi\|_2 \leqslant 1$, on a

$$\|\mathrm{K}(\phi)\| \leqslant \mathrm{M}.$$

Il en résulte que la famille de fonctions

$$\mathscr{F} := \{\mathrm{K}(\phi) \mid \|\phi\|_2 \leqslant 1\}$$

est uniformément bornée. Elle est aussi équicontinue, car pour $x, x' \in \mathrm{G}$ et $\|\phi\|_2 \leqslant 1$, on a

$$|\mathrm{K}(\phi)(x) - \mathrm{K}(\phi)(x')| = |(k_x - k_{x'}, \overline{\phi})| \leqslant \|k_x - k_{x'}\|_2 \leqslant \|k_x - k_{x'}\|,$$

et quand $x' \to x$, ceci tend vers 0, indépendamment de ϕ dans la boule unité de $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. Donc, d'après le théorème d'Ascoli, l'adhérence $\overline{\mathscr{F}}$ dans $\mathrm{C}(\mathrm{G})$ est compacte. Comme l'inclusion $\tau : \mathrm{C}(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ est continue, alors $\tau(\overline{\mathscr{F}})$ est compact et coïncide donc avec l'adhérence de $\mathscr{F}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. Ceci montre que K est compact.

2) On a

$$(\mathrm{K}(\phi), \psi) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(\phi)(y)\overline{\psi(y)}dy = \int_{\mathrm{G}} \left(\int_{\mathrm{G}} k(y,x)\phi(x)dx\right) \overline{\psi(y)}dy,$$

et d'après le théorème de Fubini (3.18), ceci égale

$$\int_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} k(y,x)\phi(x)\overline{\psi(y)}dxdy.$$

On montre de même que

$$(\phi, \mathrm{K}(\psi)) = \int_{\mathrm{G}} \phi(x) \left(\int_{\mathrm{G}} \overline{k(x,y)\psi(y)}dy\right) dx = \int_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} \overline{k(x,y)}\phi(x)\overline{\psi(y)}dxdy,$$

et l'assertion 2) en découle.

3) Soient $f \in \mathrm{C}(\mathrm{G})$ et $g, x \in \mathrm{G}$. Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{K}f)(g^{-1}x) &= \textstyle\int_{\mathrm{G}} k(g^{-1}x, y)f(y)dy \\ &= \textstyle\int_{\mathrm{G}} k(x, gy)f(y)dy \\ &= \textstyle\int_{\mathrm{G}} k(x,y)f(g^{-1}y)dy = \mathrm{K}(\mathrm{L}(g)f)(x),\end{aligned}$$

où dans la seconde (resp. troisième) égalité on a utilisé l'invariance à gauche de k, resp. de la mesure de Haar. □

***Théorème 4.9* (Peter-Weyl).** — *Soit* G *un groupe compact.*

1) $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ *est dense dans* C(G) *pour la norme* $\|\cdot\|$*, et donc dans* C(G) *et* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *pour la norme* $\|\cdot\|_2$*.*

2) *Par conséquent,* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *est la somme directe hilbertienne*

$$\mathrm{L}^2(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\pi\in\widehat{\mathrm{G}}^f} c(\pi)$$

Démonstration. — Montrons que $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est dense dans C(G) pour la norme $\|\cdot\|$. Soient $f \in \mathrm{C}(\mathrm{G})$ et $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur le compact G, il existe un voisinage U de 1 tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{G}, \forall\, g \in \mathrm{U} \qquad |f(xg) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Quitte à remplacer U par $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}^{-1}$, on peut supposer $\mathrm{U} = \mathrm{U}^{-1}$. Comme G est compact, alors, d'après le lemme d'Urysohn ([**Ru75**, 2.12]), il existe une fonction continue $\phi : \mathrm{G} \to [0,1]$ telle que $\phi(1) = 1$ et $\phi(g) = 0$ pour $g \notin \mathrm{U}$. (Si G est métrisable, quitte à rapetisser U on peut supposer que

$$\mathrm{U} = \{g \in \mathrm{G} \mid d(g,1) + d(g^{-1},1) < \eta\}$$

pour un certain $\eta > 0$, et prendre alors

$$\phi(g) = \begin{cases} \eta - d(g,1) - d(g^{-1},1)\ , & \text{si } g \in \mathrm{U}; \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases}\ )$$

Remplaçant, si nécessaire, $\phi(g)$ par $(\phi(g)+\phi(g^{-1}))/2$, on peut de plus supposer que $\phi(g) = \phi(g^{-1})$. Comme ϕ est continue, $\geqslant 0$ et non nulle, alors

$$c := \int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg > 0.$$

Remplaçant enfin ϕ par ϕ/c, on peut supposer que $\int_{\mathrm{G}} \phi(g)dg = 1$. Considérons alors le « noyau » $k \in \mathrm{C}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$ défini par

$$k(x,y) = \phi(x^{-1}y).$$

Il est clairement G-invariant à gauche, et est hermitien, et en fait symétrique réel, puisque

$$k(y,x) = \phi(y^{-1}x) = \phi(x^{-1}y) = k(x,y) = \overline{k(x,y)}.$$

Donc, l'opérateur $\mathrm{K} : \mathrm{L}^2(\mathrm{G}) \to \mathrm{C}(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ qu'il définit :

$$(\mathrm{K}\psi)(x) = \int_{\mathrm{G}} \phi(x^{-1}y)\psi(y)dy$$

est compact, auto-adjoint et commute aux translations $\mathrm{L}(g)$. De plus, par invariance à gauche de la mesure de Haar, on a pour tout $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{G})$,

$$(\mathrm{K}\psi)(x) = \int_{\mathrm{G}} \phi(x^{-1}y)\psi(y)dy = \int_{\mathrm{G}} \phi(g)\psi(xg)dg.$$

Par conséquent, pour $\psi = f$, on obtient, pour tout $x \in \mathrm{G}$,

$$|(\mathrm{K}f)(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathrm{G}} \phi(g)|f(xg) - f(x)|dg < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\|\mathrm{K}f - f\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Notons H_0 le noyau de K et E la somme directe des espaces propres H_λ pour les valeurs propres $\lambda \neq 0$.

Soit $\lambda \neq 0$. Alors H_λ égale $\mathrm{K}(\mathrm{H}_\lambda)$ donc est contenu dans $\mathrm{C}(\mathrm{G})$, il est de plus stable par $\mathrm{L}(\mathrm{G})$ et de dimension finie, donc contenu dans $\mathscr{R}(\mathrm{G})$. D'après le théorème de décomposition spectrale, il existe

$$\theta \in \mathrm{H}_0,\ \psi \in \mathscr{R}(\mathrm{G}) \ \text{ tels que } \ \|f - \theta - \psi\|_2 < \varepsilon/2.$$

Comme $\|k\|_\infty \leqslant 1$ et $\mathrm{K}\theta = 0$, on obtient que

$$\|\mathrm{K}f - \mathrm{K}\psi\| < \varepsilon/2, \tag{3}$$

et $K\psi \in \mathscr{R}(G)$. Combiné avec (2), ceci donne

$$\|f - K\psi\| < \varepsilon, \quad \text{avec } K\psi \in \mathscr{R}(G).$$

Ceci montre que $\mathscr{R}(G)$ est dense dans $C(G)$ pour la norme $\|\cdot\|$, et a fortiori pour la norme $\|\cdot\|_2$. Enfin, $C(G)$ est dense dans $L^2(G)$, d'où (i).

(ii) en résulte. On a admis que les $c(\pi)$ sont deux à deux orthogonaux. Comme $\mathscr{R}(G)$ est dense dans $L^2(G)$, son orthogonal est nul, d'où le résultat.

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.
[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.
[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.
[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.
[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.
[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.
[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
[Va84] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.
[Va99] V. S. Varadarajan, An introduction to harmonic analysis on semi-simple Lie groups, Cambridge Univ. Press 1989, paperback edition with corrections, 1999.
[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.